

ДОРОФЄЄВ ЮРІЙ

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0001-0242-6094>e-mail: yurdorof@gmail.com

ВИБІР МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ З ГРАНУЛЬОВАНИМ ТЕХНОЛОГІЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Аналізуються існуючі моделі для оцінки ефективності їх використання для математичного моделювання взаємодії елементів транспортуючих машин та механізмів з гранульованим технологічним середовищем: моделі логіко-математичного класу; моделі граничного стану; інтегрального типу; моделі, що використовують фізичні співвідношення нелінійної теорії пружності і теорії пластичності.

Найбільш перспективними для моделювання взаємодії елементів транспортуючої машини з гранульованим технологічним середовищем є моделі, що базуються на фізичних співвідношеннях деформаційного типу. Вони відображають вплив внутрішнього тертя на закони деформування та руйнування матеріалів. Для можливості використання цих моделей необхідно: чітко описати особливості деформування та руйнування дискретних матеріалів; сформулювати математичну модель, що відображає ці особливості; обґрунтувати та розробити алгоритми і обчислювальні процедури, що дозволяють одержати розв'язання поставленого завдання. Крім того, моделювання конкретних задач вимагає розробки методик та лабораторного устаткування для визначення величини розрахункових параметрів моделі.

Ключові слова: гранульоване середовище; математична модель; внутрішнє тертя.

DOROFIEIEV YURIY

Khmelnytskyi National University

CHOOSING A MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERACTION OF MACHINES ELEMENTS AND MECHANISMS WITH A GRANULAR TECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

Existing models are analyzed to assess the effectiveness of their use for mathematical modeling of the interaction of elements of transporting machines and mechanisms with a granular technological environment.

Logical-mathematical class models require field tests to determine empirical coefficients.

The non-deformability of limit state models makes it impossible to use them for modeling the entire technological process.

The use of integral-type models is limited by the need to determine model parameters from field studies and the inability to use them to model the process of material destruction when it comes into contact with transporting elements.

Models that use the physical relations of the nonlinear theory of elasticity and the theory of plasticity open up the fundamental possibility of detailed modeling of the entire process of interaction between machine elements and the environment.

In our opinion, the most promising for modeling the interaction of elements of a conveying machine with a granular technological medium are models based on physical relations of the deformation type. They reflect the influence of internal friction on the laws of deformation and fracture of materials and, in principle, allow us to implement the modeling procedure based on the methods of the theory of a deformable solid. To be able to use these models, it is necessary to: clearly describe the features of deformation and fracture of discrete materials; formulate a mathematical model that reflects these features; substantiate and develop algorithms and computational procedures that allow us to obtain a solution to the problem. In addition, modeling specific problems requires the development of methods and laboratory equipment to determine the values of the calculated parameters of the model.

Keywords: granular medium; mathematical model; internal friction.

Стаття надійшла до редакції / Received 13.10.2025

Прийнята до друку / Accepted 15.11.2025

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Галузеве машинобудування зосереджується на проектуванні, виробництві та експлуатації машин та обладнання для різних галузей промисловості. Це включає в себе не тільки розробку технологій, вибір обладнання, контроль якості та організацію виробничих процесів на машинобудівних підприємствах, але й вивчення проблем раціонального функціонування окремих класів конструкцій та машин.

Великий клас машин, конструкцій або їх елементів взаємодіє з технологічним середовищем, яке може являти собою тверде тіло, рідину або матеріал дискретної структури. Це середовище безпосередньо впливає на умови експлуатації, працездатність та надійність машин і механізмів.

Взаємодія машин з гранульованими матеріалами (грунтами, сипкими вантажами, гірськими породами, гранулами хімічних речовин і т. ін.) найменш вивчена. Враховуючи поширеність гранульованих матеріалів (ГМ) в довіллі, перед науковцями постає завдання розуміння законів їх поведінки.

Інтерес до вивчення ГМ також зумовлений важливістю розуміння їх фізичних властивостей для раціоналізації промислового виробництва і можливістю створення на їх основі принципово нових наукомістких технологій. ГМ широко представлені в довіллі і використовуються у виробництві (пудра, пісок, ґрунт, цемент,

графіт, вугілля, зерно, сипкі порошки і гранули, суміші в будівельній, хімічній, фармакологічній, харчовій, легкій промисловостях, металургії тощо).

Масштабність застосування гранульованих матеріалів в різних промислових технологіях, низька енергоємність в маніпулюванні ними, а також їх присутність у натуральному вигляді в довкіллі не залишає сумнівів у важливості вивчення їх структури і динаміки поведінки в зовнішніх полях різної природи, розуміння механізмів формування їх властивостей і можливості управління ними.

Класичним представником гранульованих матеріалів є пісок. Тиск в ньому при навантаженні спочатку росте, потім досягає максимуму і далі залишається незмінним. Сили, що діють між частинками піску (гранулами) переносять надлишковий тиск на стінки резервуара.

Більшість сипучих матеріалів вже давно описана й вивчена. Однак в останні роки «текучі тверді тіла», і навіть пересічний їхній представник – пісок, усе сильніше приваблюють до себе увагу дослідників. Процеси, що відбуваються в піщаній купі, мають безпосереднє відношення до самого широкого кола фізичних проблем, а загадкове поведіння піску й схожих з ним речовин кидає серйозний виклик фізичній науці.

Щоб одержати інформацію про розподіл тиску усередині сипучої речовини, зазвичай будується фізична модель явища.

Формулювання цілей статті

Метою статті є обґрунтування найбільш перспективної математичної моделі взаємодії елементів машин з гранульованим технологічним середовищем. Ця модель повинна враховувати внутрішнє тертя, що виникає в середовищі.

Аналіз досліджень та публікацій

Інформаційний пошук показав, що на даний час не розроблено математичної моделі, яка на основі сучасних теорій моделювала б поведінку повної системи «транспортуюча машина – гранульовані матеріали». Відсутні не тільки алгоритми та програмне забезпечення, а й саме математичне формулювання задачі взаємодії елементів машини з дискретним середовищем.

Недоліком розглянутих моделей взаємодії елементів машин з дискретним середовищем є те, що вони не в повній мірі враховують характерні особливості деформування дискретних матеріалів і в першу чергу – складних законів їх деформування, що відображають вплив внутрішнього тертя.

Найбільш перспективними для розробки математичної моделі взаємодії машини з дискретним технологічним середовищем можна вважати фізичні співвідношення А.І. Боткіна. Вони достатньо повно відображають вплив внутрішнього тертя на усіх етапах деформування дискретного матеріалу аж до моменту руйнування, принципово дозволяють їх використання при формуванні граничної задачі теорії твердого деформівного тіла.

Виклад основного матеріалу

Аналіз літературних даних, а також результатів спеціально проведених нами досліджень, дозволяють сформулювати такі особливості фізичних співвідношень дискретних матеріалів, за якими можна оцінювати адекватність відомих моделей процесу взаємодії елементів машин і механізмів з технологічним дискретним середовищем.

1. Зв'язок між напруженнями і деформаціями є нелінійним і в граничному стані повинен природно переходити в умову руйнування матеріалу.

2. Залежність між напруженнями і деформаціями повинна відображати вплив стискуючого напруження на величину деформацій і граничного опору зсуву дискретного матеріалу (прояв внутрішнього тертя).

3. Параметри законів деформування та руйнування принципово повинні бути визначувальними шляхом лабораторних випробувань зразків матеріалу, а не з натурних або стендових випробувань.

При порівняльному аналізі відомих моделей враховано також можливість їх використання як фрагментів узагальненої моделі «машина – середовище», а також повноту відображення впливу технічних і технологічних факторів: конструктивних особливостей елементів, технологічних параметрів процесу та інше.

Логіко-математичні моделі являють собою математичне узагальнення натурних чи стендових досліджень процесу взаємодії елементів машини з дискретним середовищем. В них процес взаємодії елементів машин і дискретного середовища описується з урахуванням впливу багатьох конструктивних і технологічних факторів: жорсткості елемента, характеру контактної поверхні, швидкості та характеру переміщення та інше, що, безумовно, є позитивною особливістю даних моделей. Тому логіко-математичні моделі широко використовуються в проектуванні машин і в наукових дослідженнях.

До їхніх недоліків слід віднести неможливість їх використання при створенні повної математичної моделі системи «елемент – середовище», оскільки вони описують поведінку середовища в дограничному і граничному станах не зв'язаними між собою співвідношеннями. Крім цього, представлення фізичних залежностей в інтегральній формі потребує визначення коефіцієнтів і параметрів цих залежностей не з лабораторних, а з натурних досліджень.

До недоліків **контактних моделей граничного стану середовища** можна віднести те, що вони не описують поведінку дискретного матеріалу в дограничному стані, а також не пов'язують силові та кінематичні характеристики технологічного процесу. Описані моделі не можуть бути використаними для побудови загальної моделі взаємодії елементів машини з середовищем, оскільки не описують поведінку системи в дограничній стадії.

Контактні моделі на основі інтегральних залежностей між переміщеннями поверхні та навантаженням. Моделювання в цих випадках зводиться до чисельного інтегрування обраних співвідношень. Позитивною особливістю описаних моделей є їх відносна простота. До принципових недоліків слід віднести те, що визначувальні співвідношення моделей прийняті не як залежності між напруженнями й деформаціями, а у формі інтегральних залежностей між навантаженнями на поверхні та її переміщеннями. Тому розрахункові параметри моделі неможливо визначити з лабораторних чи стендових дослідів. Для цього необхідно проведення спеціальних натурних випробувань. Крім того, моделі не можуть бути використані для моделювання роботи робочих органів машини.

Моделі механіки деформівного тіла.

Моделі, що базуються на лінійних фізичних співвідношеннях. Моделювання зводиться до багаторазового розв'язання системи диференціальних рівнянь в часткових похідних. Лінійні моделі теорії суцільних середовищ не враховують особливості законів деформування дискретних матеріалів: нелінійність залежностей «напруження-деформації» та суттєвий вплив внутрішнього тертя, і тому дають значне розходження з експериментальними результатами. Розходження збільшується з ростом інтенсивності навантаження та появою локальних зон пластичної деформації.

Моделі, що базуються на фізично-нелінійних співвідношеннях. При аналізі раціональності використання базових фізично-нелінійних моделей середовища деформаційного типу як позитивне слід відмітити те, що вони враховують нелінійність залежностей «напруження-деформації», а також можливість визначення параметрів моделі в лабораторних умовах.

До недоліків моделей наведеного типу слід віднести неврахування ними впливу внутрішнього тертя на деформації та деяку умовність описування однією залежністю дограничного та граничного станів матеріалу.

Моделі, що враховують вплив внутрішнього тертя на деформування матеріалу. Найсуттєвішою особливістю дискретних (гранульованих) матеріалів є вплив внутрішнього тертя на процес їх деформування і руйнування. Це проявляється в тому, що опір зсуву і деформації зсуву не тільки в граничній, але й у дограничній стадії залежать від величини стискуючих нормальних напружень.

При моделюванні шляхом послідовного розв'язання крайових задач принципово можуть бути використані три найбільш відомі інваріантні залежності деформаційного типу, що описують закономірності формозміни дискретного матеріалу.

Аналіз описаних моделей дозволяє провести оцінку ефективності їх використання для математичного моделювання взаємодії елементів транспортуючих машин та механізмів з гранульованим технологічним середовищем.

Моделі логіко-математичного класу враховують деякі конструктивні і технологічні особливості процесу, але потребують для визначення емпіричних коефіцієнтів, що входять в їх співвідношення, проведення натурних випробувань. Це не дозволяє використовувати моделі при проектуванні нових класів машин й розглядати їх як фрагменти повної моделі системи «машина-середовище».

Моделі граничного стану дозволяють у спрощеній формі моделювати взаємодію органів машин з матеріалом середовища в момент його руйнування. Бездеформативність моделей унеможливує їх використання для моделювання всього технологічного процесу.

Моделі інтегрального типу можуть використовуватись для описання взаємодії деяких елементів машин з середовищем при його деформуванні в дограничній стадії. Більш широке їх застосування в моделюванні обмежується необхідністю визначати параметри моделі із натурних досліджень і неможливістю моделювати за їх допомогою процес руйнування матеріалу при його контактуванні з транспортуючими елементами.

Моделі, що використовують фізичні співвідношення нелінійної теорії пружності і теорії пластичності, відносяться до моделей принципово іншого класу. Шляхом багаторазового розв'язання граничних чи контактних задач для багатозв'язних областей при варіюванні переміщень робочого елемента машини чи навантажень на середовище визначаються поля напружень і деформацій в межах цих областей, що відкриває принципову можливість детального моделювання усього процесу взаємодії машини і середовища.

Реалізація такого підходу може бути досягнута шляхом формулювання математичної моделі, розробки алгоритмів і програм чисельного розв'язання сформульованої задачі, визначення значень параметрів моделі за результатами лабораторних випробувань і проведенням комп'ютерного імітаційного моделювання технологічного процесу.

Нелінійні моделі деформаційного типу, що враховують вплив внутрішнього тертя на процес деформування середовища, є найбільш перспективними для моделювання системи «машина-технологічне середовище». Для можливості використання цих моделей необхідно: чітко описати особливості деформування та руйнування дискретних матеріалів; сформулювати математичну модель, що відображає ці особливості; обґрунтувати та розробити алгоритми і обчислювальні процедури, що дозволяють одержати розв'язання поставленого завдання. Крім того, моделювання конкретних задач вимагає розробки методик та лабораторного устаткування для визначення величини розрахункових параметрів моделі.

Таким чином, найбільш перспективним для моделювання взаємодії елементів транспортуючої машини з технологічним середовищем є моделі, що базуються на фізичних співвідношеннях деформаційного типу, котрі відображають вплив внутрішнього тертя на закони деформування та руйнування матеріалів і принципово дозволяють реалізувати процедуру моделювання на основі методів теорії деформівного твердого тіла.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Найбільш перспективним для моделювання взаємодії елементів транспортуючої машини з технологічним середовищем є моделі, що базуються на фізичних співвідношеннях деформаційного типу, котрі відображають вплив внутрішнього тертя на закони деформування та руйнування матеріалів і принципово дозволяють реалізувати процедуру моделювання на основі методів теорії деформівного твердого тіла.

Література

1. Герасимов О. І. Фізика гранульованих матеріалів : Монографія / О. І. Герасимов; Одеськ. держ-ний екол-ний ун-т. – Одеса, ТЕС, 2015. – 264 с.
2. Дорофєєв О. А., Горященко С. Л., Дорофєєв Ю. О. Обґрунтування моделі взаємодії елементів машин та механізмів з дискретним середовищем: Технічна творчість: Збірник наукових праць. / Укл.: Скиба М.Є., Поліщук О.С., Романець Т.П. Хмельницький: ХНУ, 2024. – № 8 – С. 49–50.
3. Дорофєєв О.А. Математична модель взаємодії елементів машини з дискретним середовищем та методи її реалізації: Дис... канд. техн. наук. – Хмельницький, 2004. – 168 с.
4. Дорофєєв О.А. Математичне моделювання взаємодії елементів машин та механізмів з дискретним середовищем / О. А. Дорофєєв, О. В. Багрій, Ю. О. Дорофєєв // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2025. – № 2. – С. 144–149. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-21>
5. Дорофєєв О.А. Реологічні моделі середовища з суттєвим внутрішнім тертям / О. А. Дорофєєв, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2019. – № 3 (271). – С. 50–58.
6. Дорофєєв Ю., Дорофєєв О., Вплив внутрішнього тертя на процеси деформування сипких та гранульованих матеріалів: матеріали II міжнародної наукової конференції студентів і молодих вчених «Проблеми та інновації у розвитку інженерії, технологій та транспорту», м. Хмельницький, ХНУ, 24-26 квітня 2025 р. Хмельницький, 2025. С. 855–865.
7. Ковтун В. В. Основи механіки дискретних матеріалів : монографія / В. В. Ковтун, О. А. Дорофєєв. – Хмельницький : ХНУ, 2018. – 131 с.

References

1. Herasymov, Oleh Ivanovych Fyzyka hranulovanykh materialiv. : Monohrafiia./ Herasymov O.I.; Odesk. derzh-nyi ekol-nyi un-t. - Odesa, TES, 2015. - 264 s.
2. Dorofiev O. A., Horiashchenko S. L., Dorofiev Yu. O. Obgruntuvannya modeli vzaïemodii elementiv mashyn ta mekhanizmiv z dyskretnym seredovyshchem: Tekhnichna tvorchist: Zbirnyk naukovykh prats. / Ukl.: Skyba M.Ie., Polishchuk O.S., Romanets T.P. Khmelnytskyi: KhNU, 2024. – № 8 – S. 49–50.
3. Dorofiev O.A. Matematychna model vzaïemodii elementiv mashyny z dyskretnym seredovyshchem ta metody yïi realizatsii: Dys... kand. tekhn. nauk. – Khmelnytskyi, 2004. – 168 s.
4. Dorofiev O.A. Matematychno modeliuвання vzaïemodii elementiv mashyn ta mekhanizmiv z dyskretnym seredovyshchem / O. A. Dorofiev, O. V. Bahrii, Yu. O. Dorofiev // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2025. – № 2. – S. 144–149. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-21>
5. Dorofiev O.A. Reolohichni modeli seredovyshcha z suttiyvym vnutrishnim tertiam / O. A. Dorofiev, V. V. Kovtun // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2019. – № 3 (271). – S. 50-58.
6. Dorofiev Yu., Dorofiev O., Vplyv vnutrishnoho tertia na protsesy deformuvannya sypkykh ta hranulovanykh materialiv: materialy II mizhnarodnoi naukovoï konferentsii studentiv i molodykh vchenykh «Problemy ta innovatsii u rozvytku inzhenerii, tekhnolohii ta transportu», m. Khmelnytskyi, KhNU, 24-26 kvitnia 2025 r. Khmelnytskyi, 2025. S. 855–865.
7. Kovtun V. V. Osnovy mekhaniky dyskretnykh materialiv : monohrafiia / V. V. Kovtun, O. A. Dorofiev. – Khmelnytskyi : KhNU, 2018. – 131 s.