DOI 10.31891/2307-5732-2022-315-6(2)-100-103
УДК 621.396.61

Віктор СТЕЦЮК
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0003-1413-8724
e-mail: sv_rt@i.ua
Костянтин ГОРЯЩЕНКО
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0002-7034-8702
e-mail: kostyakst@ukr.net

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БАГАТОЧАСТОТНИХ П'ЄЗОРЕЗОНАНСНИХ АВТОКОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

В роботі проводиться аналіз математичних моделей багаточастотних п'єзорезонансних коливальних систем. Вказано на сутність явища багаточастотного збудження, як нормальної фізичної властивості кварцових резонаторів. Однак для задач побудови високостабільних автоколивальних систем в якості джерела опорного коливання дана властивість КР являється небажаною, більш того, з нею борються всіма можливими методами. В результаті аналізу математичних моделей багаточастотних коливальних систем встановлено, що жодна з них не дозволяє в повній мірі проводити дослідження динаміки багаточастотних коливальних систем в умовах вібраційних дестабілізуючих впливів, що вимагає їх подальшого вивчення. Запропонований власний підхід до вирішення проблем моделювання багаточастотних ПКС.

Ключові слова: кварцовий резонатор, п'єзорезонансна система, коливання, багаточастотність, математична модель.

Viktor STETSIUK, Kostyantyn HORIASCHENKO
Khmelnitskyi National University

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS OF MULTI-FREQUENCY PIONEERING AUTOMOTIVE SYSTEMS

In the work the analysis of mathematical models of multi-frequency piezoresonance oscillatory systems is carried out. It is indicated on the essence of the phenomenon of multifrequency excitation, as a normal physical property of quartz resonators. However, for the tasks of constructing highly stable self-oscillating systems as a source of reference oscillation, this property of the CR is undesirable, moreover, it is struggling with all possible methods. As a result of the analysis of mathematical models of multifrequency oscillation systems, it is established that none of them allows to fully study the dynamics of multifrequency oscillation systems under conditions of vibrational destabilizing effects, which requires their further study. Proposed own approach to solving problems of simulation of multi-frequency PCBs.

Key words: quartz resonator, piezoresonance system, oscillations, multifrequency, mathematical model.

Будь-яка п'єзорезонансна коливальна система (ПКС) може розглядатися як багаточастотна, адже така сама фізична суть кварцового резонатора (КР). Анізоторопія кристалічного елемента в принципі призводить до виникнення різноманітних видів пружного зв'язку напруг і деформацій та викликає появу побічних резонансів у всіх п'єзорезонансних пристроях (ПРП). Зазвичай багаточастотність являється небажаною властивістю ПКС і з нею борються найрізноманітнішими конструктивно-технологічними методами. Однак в умовах масового використання ПКС, безперервного підвищення вимог до їх метрологічним характеристик при дії не одного дестабілізуючого фактора, а ансамблю (температури, вібрації, радіації, електромагнітного поля, тощо) ці методи виявляються малоефективними у вирішенні головної проблеми ПКС – інваріантності до дестабілізуючих факторів.

Дослідження автоколивальних систем значно ускладнюються із збільшенням числа частот збудження. Узагальнення методів усереднення, які використовуються під час аналізу даних систем приведене в [1], де розглядається система диференціальних рівнянь із малим параметром:

$$\frac{dp}{dt} = \varepsilon X(p,q)$$
$$\frac{dq}{dt} = \omega(p) + \varepsilon Y(p,q) \quad (1)$$

де $p = (p_1,...,p_m)$ – m-мірний вектор повільних рухів, $q = (q_1,...,q_n)$ – n-мірний вектор швидких рухів, $\omega(p) = (\omega_1(p), ..., \omega_n(p))$, а вектор-функції $X(p,\ q)$ і $Y(p,\ q)$ можуть бути представлені у вигляді доданків:

$$X(p,\ q) = \sum_{|k|\geq 0} X_k(p)e^{i(k,\ q)}$$
$$Y(p,\ q) = \sum_{|k|\geq 0} Y_k(p)e^{i(k,\ q)} \quad (2)$$

де $k = (k_1, ..., k_n)$ – вектор із цілочисленими додатними та від'ємними компонентами, норма якого обчислюється за формулою:

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i| ,$$

Розв'язок диференціальних рівнянь (1) базується на припущенні існування в правих частинах цих рівнянь рівномірних середніх значень. Однак багато задач приводять до необхідності дослідження диференціальних рівнянь, для яких умова існування рівномірних середніх не виконується. В [2] показано, що неіснування рівномірних середніх значень призводить до того, що рішення системи диференціальних рівнянь типу (1) і відповідної усередненої за простором змінних q системи

$$\frac{dp}{dt} = \varepsilon \overline{X}(\overline{p}) , \tag{3}$$

де

$$\overline{X}(\overline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} X(\overline{p}, q) dq_1 \ldots dq_n , \tag{4}$$

отримані при однакових початкових значеннях, відрізняються на скінченну величину, при $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$. У результаті одержується еквівалентна система:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x + p_0,\ y + \omega_0 t + q_0) ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega(x + p_0) - \omega_0 + \varepsilon Y(x + p_0,\ y + \omega_0 t) + q_0) , \tag{5}$$

де $\omega_0 = \omega(p)$.

Так, згідно [3], якщо власні частоти контурів не перебувають у співвідношенні простих цілих чисел і затухання контурів досить малі, укорочені диференціальні рівняння представляються системою виду (для одноконтурних автогенераторів):

$$\begin{gathered} X_1 = F_1(X_1, \ldots, X_n); \\ X_2 = F_2(X_1, \ldots, X_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = F_n(X_1, \ldots, X_n) \end{gathered} \tag{6}$$

де

$$F_i = [S_i(X_1, \ldots, X_n) R_i k_{зз} - 1] X_i . \tag{7}$$

де X – відносні безрозмірні амплітуди коливань; S_i – середня крутизна для основної частоти; R_i – резонансний опір контуру; $k_{зз}$ – коефіцієнт зворотного зв'язку.

Рівняння стаціонарного режиму, у яких амплітуди коливань постійні, виходять із (6), (7), якщо прийняти $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0$:

$$F_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n ,$$

звідки визначаються стаціонарні значення амплітуд коливань X_{i0}.

Для дослідження стійкості стаціонарного режиму необхідно скласти рівняння лінійного наближення для варіацій амплітуд ξ_i . Ці рівняння мають вигляд:

$$\xi_i = s_{i1}\xi_1 + s_{i2}\xi_2 + \ldots + s_{ij}\xi_j + \ldots + s_{in}\xi_n , \tag{8}$$

$$i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n ,$$

де $s_{ij} = dF_i / dX_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, і визначено в точці досліджуваного стаціонарного режиму $(X_i = X_{i0})$.

У загальному вигляді одержати прості умови стійкості стаціонарного режиму не представляється можливим, тому в даній системі обмежуються дослідженням системи симетричних зв'язаних автогенераторів, що мають однакові коефіцієнти взаємного зв'язку k. Окрім цього дана модель не дозволяє дослідження динаміки встановлення багаточастотного режиму коливань, що значно обмежує можливості її використання.

В [4] розглянута модель системи для дослідження багаточастотних коливань в газотурбінному двигуні, яка описується системою рівнянь:

$$x + W_1(p) W_2(p) y - W_2(p) z - 0; \tag{9}$$

$$y = F(x). \tag{10}$$

Якщо сигнали на вході та виході нелінійного елемента (НЕ):

$$x = x_0 + A e^{j\omega_1 t} + B e^{j\omega_2 t} e^{j\alpha} ; \tag{11}$$

$$y = y_0 + AW(\omega_1 / \omega_2) e^{j\omega_1 t} + BW(\omega_2 / \omega_1) e^{j\omega_2 t} e^{j\alpha} , \tag{12}$$

де $W(\omega_1/\omega_2)$ – передатна функція НЕ на частоті ω_1 при впливі сигналу на частотах ω_1 і ω_2; $W(\omega_2/\omega_1)$ – передатна функція НЕ на частоті ω_2 при впливі сигналу на частотах ω_2 і ω_1 ; *A*, *B* – амплітуди коливань.

Коефіцієнт поширення:

$$\gamma = \beta + j\alpha \, , \tag{13}$$

де, за аналогією з електротехнікою, дійсна частина β являє собою коефіцієнт затухання, а уявна частина α – коефіцієнт фази.

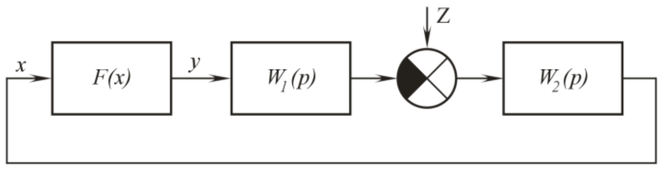

Рис. 1. Модель системи для дослідження багаточастотних коливань:
***x*, *y* – параметри на вході та виході НЕ; *z* – зовнішній вплив; *F(x)* – характеристика НЕ; $W_1(p)$, $W_2(p)$ – передатні функції лінійних частин системи**

Зовнішній вплив задається у вигляді [4]:

$$z = z_0 + z_1 e^{jw_1 t} e^{j\beta_1} + z_2 e^{j\omega_2 t} e^{j\beta_2} \tag{14}$$

В подібних системах, гармонічна лінеаризація може бути застосована не тільки при одно- або двочастотному коливаннях, але й при коливаннях з будь-якою кількістю частот і при будь-якому співвідношенні між частотами та амплітудами складових. Наприклад, для випадку $y=x^3$ при наявності постійної складової та $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, маємо:

$$x = x_0 + A\sin\omega_1 t + B\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + C\sin(\omega_3 t + \alpha_3) \; ;$$

$$y = y_0 + AW_{HE1}\sin\omega_1 t + BW_{HE2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + CW_{HE3}\sin(\omega_3 t + \alpha_3)$$

Для випадку співвідношення частот $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1:3:5$ та x_0=0, маємо систему рівнянь трьохчастотного режиму має наступний вигляд:

$$\begin{gathered} W_{HE1} = \frac{3}{4}A^2 + \frac{3}{2}\left(B^2 + C^2\right) - \frac{3}{4}ABe^{j\alpha_2} - \frac{3}{2}BCe^{j(\alpha_3-\alpha_2)} \; ; \\ W_{HE2} = \frac{3}{4}B^2 + \frac{3}{2}\left(A^2 + C^2\right) - \frac{1}{4}\frac{A^3}{B}e^{-j\alpha_2} - \frac{3}{4}\frac{A^2 C}{B}e^{j(\alpha_3-\alpha_2)} \; ; \\ W_{HE3} = \frac{3}{4}C^2 + \frac{3}{2}\left(A^2 + B^2\right) - \frac{3}{4}\frac{A^2 B}{C}e^{j(\alpha_3-\alpha_2)} \, . \end{gathered} \tag{15}$$

Суттєвим недоліком даної моделі є можливість її використання тільки для дослідження стійкості багаточастотного режиму коливань та її погану придатність для дослідження термо- та вібродинамічних процесів в п’єзорезонансних коливальних системах [5].

Математична модель, яка описує поведінку багаточастотної п’єзорезонансної коливальної системи (БПКС) і найбільш наближена до вирішення поставленої задачі описується системою диференціальних рівнянь [6]:

$$\begin{gathered} \mathbf{T}\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[\mathbf{G_a}\cdot\mathbf{R} - \mathbf{E_{mm}}\right]\cdot\mathbf{U} \; ; \\ \mathbf{T}\frac{d\Phi}{dt} = \left[\mathbf{G_p}\cdot\mathbf{R} - \Delta\right]\cdot\mathbf{E_{m1}} \; ; \\ \mathbf{T_{аз}}\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{аз}}}{dt} = -(\mathbf{R_{аз}}\cdot\mathbf{I_0} + \widetilde{\mathbf{E}}) \, , \end{gathered} \tag{16}$$

де $\mathbf{T} = diag(T_1,...,T_m)$, $\mathbf{T_{аз}} = diag(T_{аз_1},...,T_{аз_n})$ – матриці постійних часу парціальних кіл БПКС; $\mathbf{U} = (U_1,...,U_m)^{\text{T}}$, $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_m)^{\text{T}}$, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{аз}} = (\widetilde{E}_{аз_1},...,\widetilde{E}_{аз_n})^{\text{T}}$ – вектори амплітуд, фаз коливань БПКС та напруг автозміщення; $\mathbf{G_a} = \text{Re}\dot{\mathbf{G}} = \left|\dot{\mathbf{G}}\right|\cos\Delta\varphi^{\text{T}}$, $\mathbf{G_p} = \text{Im}\dot{\mathbf{G}} = \left|\dot{\mathbf{G}}\right|\sin\Delta\varphi^{\text{T}}$ – матриці дійсної та уявної складових еквівалентної комплексної провідності активної частини генератора, елементи яких формуються за правилом $g_{a_{ji}} = \delta_{ji}(\text{Re}\,g_{ji})$, $g_{p_{ji}} = \delta_{ji}(\text{Im}\,g_{ji})$, де δ_{ji} – символ Кронекера;

$$|\dot{\mathbf{G}}| = \begin{pmatrix} S_{11}K_{11} & S_{12}K_{12} \; ... \; S_{1n}K_{1n} \\ S_{21}K_{21} & S_{22}K_{22} \; ... \; S_{2n}K_{2n} \\ & . \; . \; . \\ S_{m1}K_{m1} & S_{m2}K_{m2} ... S_{mn}K_{mn} \end{pmatrix}$$ – матриця модулів приведених еквівалентних комплексних провідностей БПКС розміром $m \times n$; $\mathbf{R} = \mathbf{R_e} \cdot \mathbf{K_ф}$ – матриця приведених опорів, $\mathbf{R_e} = diag(R_{e_1}, R_{e_2}, ..., R_{e_m})$, $\mathbf{K_ф} = diag(K_{ф_1}, K_{ф_2}, ..., K_{ф_m})$;

$$\Delta\varphi = \begin{pmatrix} (\Delta\varphi_{11} + \Delta\varphi_{ф_1})\,(\Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{ф_1})\,...\,(\Delta\varphi_{1n} + \Delta\varphi_{ф_1}) \\ (\Delta\varphi_{21} + \Delta\varphi_{ф_2})\,(\Delta\varphi_{22} + \Delta\varphi_{ф_2})\,...\,(\Delta\varphi_{2n} + \Delta\varphi_{ф_2}) \\ . \; . \; . \\ (\Delta\varphi_{m1} + \Delta\varphi_{ф_m})\,(\Delta\varphi_{m2} + \Delta\varphi_{ф_m})...(\Delta\varphi_{mn} + \Delta\varphi_{ф_m}) \end{pmatrix}$$ – матриця розміром $m \times n$, яка визначає фазові співвідношення в каналах збудження БПКС; $\Delta = diag(\Delta\omega_1 T_1, ..., \Delta\omega_m T_m)$ – матриця узагальнених розладнань; $\mathbf{R_{аз}} = diag(R_{аз_1}, ..., R_{аз_n})$ – матриця опорів автозміщень; $\mathbf{I_0} = (I_{0_1}, ..., I_{0_n})^{\mathrm{T}}$ – вектор постійних складових вихідних струмів $i_{вих_i}(e_i)$; $\mathbf{E_{mm}}$, $\mathbf{E_{m1}}$ – одинична матриця розміром $m \times m$ та одиничний вектор-стовпець $m \times 1$; m – кількість частот генерування, n – кількість каналів збудження.

Дана модель може бути вдосконалена шляхом введення термодинамічної складової нестабільності, що дозволяє проводити дослідження динаміки встановлення коливань як на етапі встановлення теплового балансу резонатора після включення, так і під час дії зовнішніх дестабілізуючих теплових впливів. Таким чином, жодна із існуючих моделей не забезпечує можливість дослідження динаміки термо- та вібродинамічних процесів за багаточастотного збудження п’єзорезонансних коливальних систем, що потребує їх подальшого вивчення і розвитку.

Висновки

На основі аналізу фундаментальних процесів під час функціонування кварцових резонаторів та пристроїв на їх основі показана необхідність врахування реакцій КР на вібраційні впливи в реальних умовах їх експлуатації. Явища багаточастотного збудження є нормальними фізичними властивостями кварцових резонаторів. Однак для задач побудови високостабільних автоколивальних систем в якості джерела опорного коливання дана властивість КР являється небажаною, більш того, з нею борються найрізноманітнішими конструктивно-технологічними методами.. В результаті аналізу математичних моделей багаточастотних коливальних систем встановлено, що жодна з них не дозволяє в повній мірі проводити дослідження динаміки багаточастотних коливальних систем в умовах вібраційних дестабілізуючих впливів, що вимагає їх подальшого вивчення.

Література

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Митропольский Ю. А. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.

2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / Арнольд В. И. – М., Наука,1974. – 472 с.

3. Уткин Г. М. Автоколебательные системы и волновые усилители / Уткин Г. М. – М.: Сов. радио, 1978. – 272 с.

4. Письменный И. Л. Многочастотные нелинейные колебания в газотурбинном двигателе / Письменный И. Л. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.: ил.

5. Стецюк В. І. Методи мінімізації вібраційних впливів на стабільність п’єзорезонансних пристроїв. “Современные проблемы радиотехники и телекоммуникаций” / материалы 5-й международной молодёжной научно-техн. конф. – Севастополь: изд. “Вебер”, 2009 г. с. 106.

References

1. Mytropolskyi Yu. A. Metod usrednenyia v nelyneinoi mekhanyke / Mytropolskyi Yu. A. – K.: Nauk. dumka, 1971. – 440 s.

2. Arnold V. Y. Matematycheskye metodы klassycheskoi mekhanyky / Arnold V. Y. – M., Nauka,1974. – 472 s.

3. Utkyn H. M. Avtokolebatelnыe systemy y volnovыe usylytely / Utkyn H. M. – M.: Sov. radyo, 1978. – 272 s.

4. Pysmennыi Y. L. Mnohochastotnыe nelyneinыe kolebanyia v hazoturbynnom dvyhatele / Pysmennыi Y. L. – M.: Mashynostroenye, 1987. – 128 s.: yl.

5. Stetsiuk V. I. Metody minimizatsii vibratsiinykh vplyviv na stabilnist piezorezonansnykh prystroiv. “Sovremennыe problemy radyotekhnyky y telekommunykatsyi” / materyalы 5-y mezhdunarodnoi molodëzhnoi nauchno-tekhn. konf. – Sevastopol: yzd. “Veber”, 2009 h. s. 106.