

СИНЮК Олег

Хмельницький національний університет

КРАВЧУК Ольга

Хмельницький національний університет

КРАВЧУК Андрій

Хмельницький національний університет

МАГДІН Віктор

Хмельницький національний університет

ЗОЛОТЕНКО Іван

Хмельницький національний університет

МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОЛІМЕРНОГО МАТЕРІАЛУ

В статті розглядається модель пластичної деформації полімерного матеріалу в міжвалковому просторі перероблювального обладнання в умовах стиску і зсуву, на основі якої встановлено, що всебічний тиск, який створюється в полімері робочими органами перероблювального обладнання, викликає лише в'язкопружну деформацію, а тому пластичного ущільнення матеріалу в процесі його руйнування не відбувається.

Числове моделювання пластичної деформації полімерних відходів між валками профілю Рело дозволило отримати розподіл дотичних напружень по площині полімерного матеріалу, за яким побудовано графічні залежності напруження від швидкості деформації, яка визначається коловими швидкостями та радіусами валків.

Ключові слова: полімерний матеріал, напружено-деформований стан, пластична, в'язкопружна деформація, руйнування, напруження, валки.

SYNYUK Oleg, KRAVCHUK Olga, KRAVCHUK Andrii, MAGDIN Victor, ZOLOTENKO Ivan
Khmelnitskyi National University

MODEL OF PLASTIC DEFORMATION OF POLYMER MATERIAL

The article considers a model of plastic deformation of polymer material in the inter-roll space of the processing equipment under conditions of compression and shear, based on which it is established that the all-round pressure created in the polymer by the working bodies of the processing equipment causes only viscoelastic deformation, and therefore plastic compaction of the material in the process of its destruction does not occur.

Numerical modeling of the plastic deformation of polymer waste between the rolls of the Relo profile made it possible to obtain the distribution of tangential stresses on the plane of the polymer material, based on which graphical dependences of the stress on the rate of deformation, which is determined by the circular speeds and radii of the rolls, are constructed.

Key words: polymer material, stress-strain state, plastic, viscoelastic deformation, failure, stress, rolls.

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Запропонувати модель пластичної деформації полімерного матеріалу в міжвалковому просторі перероблювального обладнання в умовах стиску і зсуву, на основі якої встановити, що всебічний тиск, який створюється в полімері робочими органами перероблювального обладнання, викликає лише в'язкопружну деформацію, а тому пластичного ущільнення матеріалу в процесі його руйнування не відбувається.

При моделюванні процесу деформації полімерного матеріалу між валками в умовах стиску і зсуву будемо рахувати, що тіло однорідне та трансверсально ізотропне (рис. 1). В будь-якому перерізі $y = const$ буде мати місце однаковий напружено-деформований стан. Компоненти напруження будуть залежати від x та z , причому τ_{xy} , τ_{zy} дорівнюють нулю через відсутність в тих площинах деформацій зсуву.

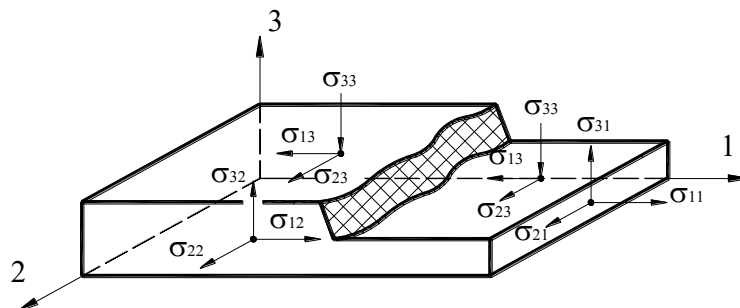


Рис. 1. Пластична деформація нескінченно малого об'єму полімеру

На відміну від теорії пружності, де наведені достатні умови для вирішення плоских задач, в теорії пластичності необхідно вводити додаткові спрощення.

Виклад основного матеріалу дослідження

Перше спрощення – будемо використовувати схему тільки пластичного тіла. Звичайно, дане припущення вносить певну похибку, але вирішення пружно-пластичної задачі є досить складним завданням і для нашого випадку, де мають місце пластичні деформації, достатньо концепції пластичного тіла.

Задача деформації полімерного матеріалу між валками профілю Рело передбачає, що пластична деформація локалізована поблизу контактних площин. Технологічні задачі такого типу відносяться до задач пластичного усталеного руху з великими деформаціями [1]. Крім того, мета наших досліджень передбачає знаходження граничних напружень зсуву, що, в свою чергу, дозволяє використовувати вибрану раніше концепцію пластичного тіла.

Для моделювання процесу пластичної деформації полімерного матеріалу скористаємося відомими з теорії пружності формулами [1]. Рівняння руху матеріалу під впливом напружено-деформованого стану в тензорній формі запишемо таким чином:

$$\sigma_{nm} + \rho \cdot F_n = \rho \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad (1)$$

з якого отримаємо рівняння рівноваги:

$$\sigma_{nm} + \rho \cdot F_n = 0, \quad (2)$$

де σ_{nm} – компоненти тензора напруження, Па; u_n – компоненти вектора швидкості, м/с, які розраховуються за таким рівнянням: $u_n = \frac{dx_n}{dt}$; ρ – щільність полімерного матеріалу, кг/м³; F – масові сили, Н.

Додамо умову нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot u_n = 0. \quad (3)$$

Припустимо, що полімерний матеріал, який оброблюється між валками, є симетричним стосовно парності тангенціальних напружень: $\sigma_{nm} = \sigma_{mn}$.

Задамо також деформації та швидкості їх зміни співвідношеннями Коши:

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2}(x_n + x_m), \quad (4)$$

$$d\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} dx_n + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_m \right). \quad (5)$$

Для дослідження чисто пластичної деформації полімерного матеріалу між валками в умовах стиску і зсуву будемо використовувати моделі пластичності, відповідно до яких швидкість деформації в процесі обробки матеріалу будемо знаходити як суму швидкостей високоеластичної та пластичної деформацій:

$$d\varepsilon_{nm} = d\varepsilon_{nm}^e + d\varepsilon_{nm}^{nl}. \quad (6)$$

Будь-яку непружну і невисокоеластичну деформацію будемо вважати пластичною незалежно від виникнення.

В процесі пластичної деформації напружено-деформований стан, що виникає в полімерному матеріалі, представимо у такому вигляді:

$$\sigma_{nm} = (\lambda \cdot \xi \cdot \delta_{nm} + 2\mu \cdot e_{nm}^{nl}) \cdot t, \quad (3.57)$$

де λ , μ – коефіцієнти Ламе, Па; σ_{nm} та e_{nm} – компоненти тензора напружень та тензора швидкості деформацій, с⁻¹; δ_{nm} – символ Кронекера; ξ – швидкість зміни відносної об'ємної деформації, с⁻¹; t – час дії валків на полімерний матеріал, с.

Як відомо з [1], добуток коефіцієнтів Ламе на час деформування полімерного матеріалу дорівнює в'язкості: $\eta_{zc} = \mu \cdot t$, $\eta_{cm} = \lambda \cdot t$.

Вплив температури на активність руху сегментів ланцюгів макромолекул, а отже на напружено-деформований стан в полімерному матеріалі врахуємо за допомогою рівняння Арреніуса:

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{\frac{U}{RT}}, \quad (8)$$

де U – енергія активації в'язкої течії, Дж; η_0 – постійна, яка може бути визначена з умови $T > T_{nl}$, де T_{nl} – температура плавлення полімеру, °С.

Запишемо рівняння (7) таким чином:

$$\sigma_{nm} = \sigma \cdot \delta_{nm} + s_{nm}, \quad (9)$$

де $\sigma \cdot \delta_{nm}$ – компоненти кульового тензора напружень, що описують зміну об’єму без зміни форми, тобто ущільнення матеріалу, Па; S_{nm} – компоненти девіатора тензора напружень, що описують зміну форми тіла без зміни його об’єму, Па; σ – гідростатичний тиск, Па; δ_{nm} – символ Кронекера.

Таким чином, будемо вважати, що в процесі пластичної деформації полімерного матеріалу між валками відбувається деформація елементарного об’єму матеріалу, на який діє гідростатичний тиск, і деформація зсуву. Згідно з [1], запишемо рівняння, яке пов’язує зміну девіатора напружень і швидкості деформацій в такому вигляді:

$$ds_{nm} = G \cdot (2e_{nm} - 3 \cdot \xi \cdot \delta_{nm}), \quad (10)$$

де G – вязкопружний модуль зсуву, Па.

Можливість обертання елементів середовища як цілого будемо враховувати виразом Яумана [1]:

$$ds_{nm} = s_{nm} - s_{np} \cdot \omega_{mp} - s_{mp} \cdot \omega_{np}, \quad (11)$$

де ω_{mp} – компоненти тензора відносних швидкостей обертання.

Швидкість зміни всебічного тиску на матеріал визначимо з такого рівняння:

$$d\sigma = -K \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (12)$$

де V_0 – об’єм полімерного матеріалу до деформації, м³; ΔV – зміна об’єму полімеру, м³; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ –

модуль об’ємного розширення (стиснення), Па; ν – коефіцієнт Пуассона (для нестисливих матеріалів $\nu = 0,5$).

Перепишемо рівняння (12) з урахуванням впливу зміни температури:

$$d\sigma = -K \frac{\Delta V}{V_0} + \alpha \cdot K \cdot dT, \quad (13)$$

де α – коефіцієнт теплового розширення, °C⁻¹; dT – зміна температури матеріалу, °C.

Визначимо компоненти тензорів швидкостей відносної деформації та обертання з таких рівнянь:

$$e_{nm} = \frac{1}{2}(u_n + u_m), \quad (14)$$

$$\omega_{nm} = \frac{1}{2}(u_n - u_m). \quad (15)$$

Розглянемо окремо всебічне стискування полімеру, що приводить до зміни його об’єму (ущільнення), а отже й зміцнення, і пластичну деформацію зсуву при постійному об’ємі (вважаємо, що матеріал нестисливий). Спочатку змодельємо процес зміцнення полімеру, що можливий при дії лише гідростатичного тиску на полімер.

Стан середовища, що відповідає пружним напруженням, обмежений поверхнею, при досягненні якої починається пластичне деформування та руйнування полімерного матеріалу. Рівняння поверхні граничного стану запишемо в такий спосіб:

$$f(\sigma_{nm}) = 0. \quad (16)$$

Граничну поверхню зручно представляти в системі координат інваріантів тензора напруження – по вісі x будемо відкладати гідростатичний тиск, а по вісі y будемо відкладати інтенсивність дотичних напружень, що з’являються в результаті всебічного стиснення елементарного об’єму полімерного матеріалу. З урахуванням сказаного вище та рівняння (9), перепишемо вираз (16) таким чином:

$$f(\sigma, \tau) = 0, \quad (17)$$

де σ – гідростатичний тиск на елементарний об’єм полімерного матеріалу, Па;

τ – інтенсивність дотичних напружень, Па.

Згідно теорії пластичної течії [1, 2, 3], пластична деформація визначається так (цей зв’язок встановлює теорема Мізеса):

$$d\varepsilon_{nm}^{pl} = d\lambda \frac{\partial g(\sigma_{nm})}{\partial \sigma_{nm}}, \quad (18)$$

де $d\lambda$ – деякий множник; $\partial g(\sigma_{nm})$ – пластичний потенціал, який можна визначити з такого рівняння [4, 5]:

$$\partial g(\sigma_{nm}) = -\beta_1 \sigma + \kappa \tau, \quad (19)$$

де $\beta_1 = \sin \psi$, $\kappa = \cos \psi$ – параметри; ψ – кут нахилу поверхні пластичного потенціалу.

Граничну поверхню в області зсувних деформацій на інтервалі тисків $\sigma_h \leq \sigma \leq \sigma_0$, згідно з [1], опишемо таким рівнянням:

$$f_1(\sigma, \tau) = \tau - \alpha \cdot \sigma - \beta = 0, \quad (20)$$

де $\tau = \sqrt{0,5 \cdot s_{nm} s_{nm}}$ – інтенсивність тангенціальних напружень, Па; σ_h – тиск, при якому відбувається крихке руйнування (знаходимо з експерименту, шляхом визначення допустимого напруження під час стиску полімеру при температурі склування), Па; σ_0 – тиск, при якому починається ущільнення матеріалу, Па; α , β – параметри, які описують поверхню текучості Друкера-Прагера і можуть бути визначені з рівнянь, що наведені нижче.

Якщо конус Друкера-Прагера вписаний в поверхню Кулона-Мора, то:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad \beta = \frac{6 \cdot c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad (21)$$

де C – перетин кривої критерію Кулона-Мора з віссю τ , а φ – кут нахилу кривої критерію міцності Кулона-Мора.

Якщо конус Друкера-Прагера описує поверхню Кулона-Мора, то:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, \quad \beta = \frac{6 \cdot c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}. \quad (22)$$

Граничну поверхню в області зсувних деформацій на інтервалі тисків $\sigma > \sigma_0$, згідно до [4], опишемо таким рівнянням:

$$f_2(\sigma, \tau) = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{A^2} + \frac{\tau^2}{B^2} - 1 = 0, \quad (23)$$

де $A = \sigma_1 - \sigma_0$, $B = c + \alpha \cdot \sigma_0$ – коефіцієнти внутрішнього тертя полімерного матеріалу.

Так як ми описуємо полімерний матеріал під впливом напружень стиску і зсуву, то можна говорити про в'язке середовище, тоді $\varphi = \pi/2$ і модель Кулона-Мора перетворюється на модель в'язкого середовища Ренкіна:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta = 0, \quad A = \sigma_1 - \sigma_0, \quad B = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

Тоді рівняння (20) та (23), з урахуванням виразів (24), переписуться таким чином:

$$f_1(\sigma, \tau) = \tau - \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0. \quad (25)$$

$$f_2(\sigma, \tau) = \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} + 3 \frac{\tau^2}{\sigma_0^2} - 1 = 0. \quad (26)$$

Складність моделювання деформації полімерних матеріалів за межами пружності полягає у тому, що поверхні (25) або (26), при досягненні яких починається розвиватися пластична деформація, змінюються в процесі цієї деформації. Крім того, під час пластичної деформації змінюється не тільки гранична поверхня, але й співвідношення між приростом зсувної і об'ємної частинами пластичної деформації. Через це моделювання пластичної деформації має передбачати визначення параметрів, які є функціями від накопиченої повної пластичної деформації (об'ємного стискання та зсувного руйнування).

В процесі пластичної деформації відбувається зміцнення полімерного матеріалу в результаті всебічного стиску. Згідно до [5] рівняння, які дозволяють описати зміну поверхні під час пластичної деформації, можна представити таким чином:

$$y(\gamma^{nl}) = y_0 \left[1 + h \cdot \left(\frac{2\gamma^{nl}}{\gamma^g} - \left(\frac{\gamma^{nl}}{\gamma^g} \right)^2 \right) \right], \quad (27)$$

де $h = \sigma/(\sigma_1 - \sigma_0)$ – коефіцієнт зміцнення матеріалу; $2 \cdot \gamma^{nl}/\gamma^g$ – параметр, що враховує зміцнення матеріалу; $(\gamma^{nl}/\gamma^g)^2$ – параметр, що враховує послаблення матеріалу; $y(\gamma^{nl})$ – функція, що визначає зміну граничної поверхні в залежності від пластичної деформації зсуву γ^{nl} ; y_0 – значення цієї функції на граничній поверхні, яка відповідає пружним напруженням; γ^g – критична пластична деформація, після досягнення якої починається послаблення матеріалу.

Кожного разу після досягнення критичної деформації необхідно змінювати параметри залежності (27), враховуючи той факт, що послаблення відбувається повільніше, чим зміцнення.

Вплив тиску на граничну пластичну деформацію полімерного матеріалу, який матеріал витримує до початку послаблення структури полімерного матеріалу, згідно з [1], визначається з такого рівняння:

$$\gamma^g = \gamma_0^g \cdot \left(1 + w \frac{\sigma}{\sigma^g} \right), \quad (28)$$

де γ_0^g – пластична деформація початку пластичного руйнування полімеру при відсутності ущільнення (гідростатичний тиск відсутній, тобто $\sigma = 0$); w та σ^g – критичне дотичне напруження, при якому матеріал починає руйнуватися, Па; w – параметр, який приймається рівним в межах діапазону від 0,5 до 1,5.

Рівняння (28) дозволяє описати перехід від в'язкопружної до пластичної деформації без ущільнення полімерного матеріалу (або у випадку, коли полімер був вже ущільнений, тобто орієнтований).

У зв'язку із низькою міцністю орієнтованих полімерів на розрив σ_h у поперечному до орієнтації напрямку, обмежимо граничну поверхню областю в'язкопружної деформації (27). Обмеження граничної поверхні дії руйнівних зсувних напружень згідно з [6, 7] визначимо з такого рівняння:

$$\sigma^g = \frac{\sigma^0}{3} \cdot \left[\left(\gamma^{nn} / \gamma^g \right)^2 - 1 \right], \quad (29)$$

Зміну міцності навантаженого протягом певного часу полімерного тіла визначимо за допомогою функції накопичення пошкоджень [8]

$$P(\sigma_{nm}, t) = \int \frac{(s - s_0)^2}{(s^h)^2 t} dt \quad \text{для } s > s_0, \quad (30)$$

де S – максимальне значення зі всіх компонентів девіатора тензора напружень S_{nm} ; S_0 – значення напруження, при якому починається зміна форми полімерного тіла; t – час деформації полімеру.

З рівняння (27), використовуючи вираз (30), отримаємо рівняння, що описує зміцнення та послаблення полімеру, з врахуванням часу його обробки у валковому пристрої:

$$y(\gamma^{nn}) = y_0 \left[1 + h \cdot \left(\frac{2\gamma^{nn}}{\gamma^g} - \left(\frac{\gamma^{nn}}{\gamma^g} \right)^2 \right) \right] \cdot \left[1 - \int \frac{(s - s_0)^2}{(s^h)^2 t} dt \right]. \quad (31)$$

Застосування отриманих вище співвідношень дозволяє розв'язувати задачі, що описують складний напружено-деформований стан, та досліджувати розвиток деформації і процесів руйнування за рахунок зниження міцності протягом певного періоду часу при постійному зовнішньому навантаженні.

Слід зауважити, що ущільнення, яке відбувається під час пластичної деформації, впливає на орієнтацію або переорієнтацію надмолекулярної структури полімерного матеріалу, але, в цьому випадку, матеріал буде послаблятися в поперечному до орієнтації напрямку. Вид функцій, що описують зміцнення і руйнування полімерного матеріалу, підбирається, виходячи із даних відповідних експериментальних досліджень.

Згідно теорії течії матеріалів під дією навантажень [1] пластична деформація розвивається по нормалі до поверхні пластичного потенціалу. У випадку, якщо в рівняння пластичного потенціалу входить перший інваріант напружень (або гідростатичний тиск), то пластична деформація супроводжується зміною об'єму, якщо другий інваріант, то деформація супроводжується зміною форми полімерного тіла при зсуві.

Наведена вище математична модель процесу пластичної деформації полімерного матеріалу між валками перероблювального пристрою була розрахована за допомогою скінченнорізницевого методу [9]. Числове моделювання напружено-деформованого стану здійснювалося послідовними кроками протягом певного періоду часу при зміні навантаження. Для розрахунку навантаження за межами в'язкопружності була застосована процедура миттєвого приведення напружень до поверхні текучості [7, 8]. Приведення напружень здійснювалося з врахуванням часу релаксації.

Згідно схем розрахунків з використанням скінченнорізницевого методу, що наведені в роботах [9], всі диференціальні рівняння та граничні умови записуються у скінченних різницях на сітці фіксованих комірок, що покриває область полімерного матеріалу. Час також розбивається на скінченне число інтервалів.

Через громіздкість наведемо тільки основні рівняння, що описують напружено-деформований стан в полімерному матеріалі. Перший етап розрахунків після визначення нових координат точок розрахункової схеми і знаходження повних приростів деформації полягає у попередньому розрахунку напружень за рівняннями теорії пружності. На кожному розрахунковому кроці приріст пластичної деформації буде пропорційним різниці між напруженнями, визначеними за рівняннями теорії пружності, і напруженнями, що відповідають граничній поверхні текучості. Позначимо попередньо розраховані напруження штрихом.

$$\begin{aligned} s_{nm}^{(k+1)'} &= s_{nm}^{(k)} + \Delta s_{nm}^{(k+1)'}, \\ \sigma^{(k+1)'} &= \sigma^{(k)} + \Delta \sigma^{(k+1)'}. \end{aligned} \quad (32)$$

В просторі напружень напружений стан буде представлено у вигляді певної A точки з координатами $(\sigma^{(k+1)'}, \tau^{(k+1)'})$, де $\tau^{(k+1)'}$ – інтенсивність дотичних напружень (рис. 6). Після цього перевіряємо, знаходиться ця точка A в середині граничної поверхні чи вийшла за її межі. Цим ми визначаємо, чи почав полімерний матеріал під впливом напружено-деформованого стану пластично деформуватися. Перевірка здійснюється підстановкою розрахованих за допомогою рівняння (32) значень напружень у вираз (20), що визначає граничну поверхню пружної деформації. У випадку, якщо вираз (20) після підстановки в нього значень напружень дасть результат, що менший або дорівнює нулю, то можна говорити, що полімерне тіло знаходиться в пружному стані і слід використовувати для розрахунку залежності, що описують пружну деформацію. Після чого знову визначаємо напруження, але вже на іншому інтервалі часу. У випадку, якщо результат, отриманий за рівнянням (14) буде більшим за нуль, то це означає, що точка A знаходиться за межами поверхні, що відповідає пружним деформаціям, а це означає, що полімер перебуває в пластичному стані і відбувається його зміцнення. У цьому випадку використовуємо залежності, що описують пластичне ущільнення полімеру.

Змоделюємо ущільнення полімеру в результаті його деформації в перероблювальному обладнанні.

Розміри полімерних відходів, що деформуються між валками перероблювального обладнання (рис. 2), та їх зміна залежать від конструктивних параметрів цього обладнання. Враховуючи рівняння (31), при деформації полімеру у валкових пристроях, що розглядаються, запишемо:

$$\xi = 1 - \frac{l_2 h_2}{l_1 h_1}, \quad (33)$$

де l_1, l_2 – довжина, відповідно, до і після деформації полімеру, м; h_1, h_2 – товщина, відповідно, до і після деформації полімеру, м.

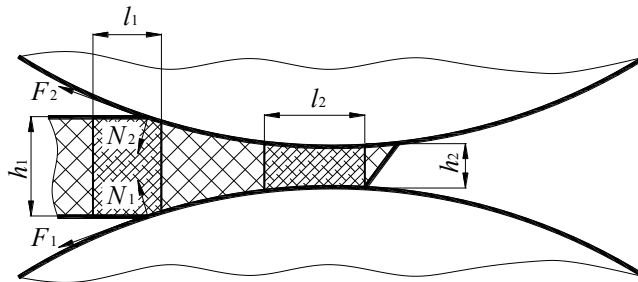


Рис. 2. Деформація полімерного матеріалу між валками обладнання

Виразивши відносну зміну розмірів певного об'єму полімеру через відносну деформацію стиску, що створюється робочими органами перероблювального обладнання, та підставивши ці вирази в рівняння (12) з урахуванням формули (33), отримаємо:

$$d\sigma = -K \cdot (1 - (1 + d\varepsilon_2) \cdot (1 - \nu \cdot d\varepsilon_2)), \quad (34)$$

де ε_2 – деформація стиску; ν – коефіцієнт Пуассона для певного полімеру.

Враховуючи рівняння (32), запишемо рівняння (34) в такому вигляді:

$$\sigma^{(k+1)} = -K \cdot (1 - (1 + \varepsilon_2^{(k+1)}) \cdot (1 - \nu \cdot \varepsilon_2^{(k+1)})) + \Delta\sigma^{(k+1)}, \quad (35)$$

де k – номер часового інтервалу, на які, згідно до гіпотези квазістаціонарності, розбивається весь процес деформації полімерного матеріалу [6, 9].

Граничні значення деформації стиску ε_2 залежать від конструктивних параметрів робочих органів перероблювального обладнання та технологічних режимів процесу переробки полімерних відходів. При моделюванні пластичного ущільнення полімерних відходів для отримання певного діапазону значень максимального тиску, що створюється робочими органами в полімері, приймалися різні граничні значення деформації стиску. Для цього параметри обладнання варіювалися в таких межах: міжвалковий простір – від $0,1 \cdot 10^{-3}$ м до $1,0 \cdot 10^{-3}$ м; діаметр зубчастих валків та базовий діаметр валків профілю Рело – від 0,05 м до 0,2 м; ексцентриситет валків Рело приймався рівним $(0,2 \dots 0,5) \cdot R_0$, де R_0 – базовий радіус валків; швидкість обертання валків – від $0,001$ с⁻¹ до $0,01$ с⁻¹. Товщина полімерних відходів приймалася рівною від 0,001 м до 0,005 м (рис. 3).

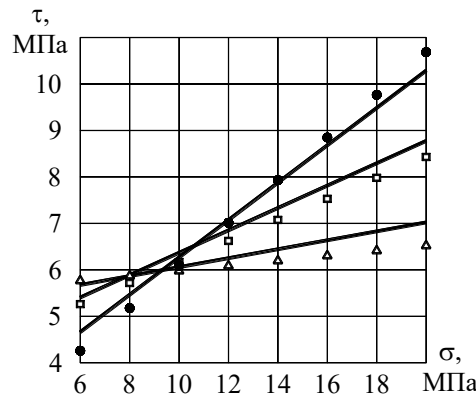


Рис. 3. Залежність інтенсивності дотичних напружень від тиску, що створюється робочим органом в полімері; 1, 2, 3 – граничні поверхні, відповідно, для ПВХ, ПП та ПЕ; Δ , \square , \bullet – точки з координатами $(\sigma^{(k+1)}, \tau^{(k+1)})$, визначеними числовим методом, відповідно, для ПЕ, ПП та ПВХ

З рис. 3 видно, що для різних полімерних матеріалів інтенсивність дотичних напружень різна і залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу. При цьому для поліпропілену (ПП) і поліетилену (ПЕ) координати точок не виходять за межі граничної поверхні в'язкопружної деформації, для полівінілхлориду (ПВХ) координати точок лежать на межі або трохи перевищують її, що не є значущим фактором. Отже, всебічний тиск, що створюються в полімері робочими органами перероблювального обладнання, викликає лише в'язкопружну деформацію, тому ущільнення не відбувається. У зв'язку з цим в дисертаційній роботі моделюється вплив на полімерний матеріал лише напружень зсуву, що створюються валками профілю Рело, як наслідок форма полімеру змінюється аж до його руйнування, при цьому об'єм лишається незмінним.

Відповідно до інкрементальної теорії пластичності, швидкість пластичної деформації пропорційна девіатору напружень, який є постійним:

$$e_{nm} = d\lambda \cdot s_{nm}, \tag{36}$$

де $d\lambda$ – множник пропорційності в диференціальній формі.

Запишемо рівняння Ламе для плоского в'язкого середовища таким чином:

$$\partial\tau/\partial x = \mu \cdot \nabla^2 u; \quad \partial\tau/\partial y = \mu \cdot \nabla^2 v, \tag{37}$$

де μ – коефіцієнт Ламе при чистому зсуві; u, v – компоненти вектора швидкості пластичної деформації, м/с; τ – дотичні напруження, що викликають пластичну деформацію, Па.

Враховуючи модель Кельвіна для в'язкопружних деформацій полімеру $\tau = \mu \cdot t \cdot \partial\varepsilon/\partial t$ (ε – деформація полімеру), умову незмінності об'єму:

$$D = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0, \tag{38}$$

де D – дивергенція швидкості пластичної деформації, та використовуючи гіпотезу квазістаціонарності, перепишемо рівняння (3.87) таким чином:

$$\begin{aligned} \partial\tau/\partial x &= \eta \cdot \left[\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 \right], \\ \partial\tau/\partial y &= \eta \cdot \left[\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 \right], \end{aligned} \tag{39}$$

де $\eta = \mu \cdot t$ – динамічна в'язкість полімерного матеріалу, Па·с.

Для визначення напруження зсуву τ скористаємося рівнянням Пуассона:

$$\nabla^2 \tau = \partial^2 \tau/\partial x^2 + \partial^2 \tau/\partial y^2. \tag{40}$$

Диференціюючи перше і друге рівняння системи (3.89), відповідно, по x і y та підставляючи їх у рівняння (40), враховуючи рівняння (38), отримаємо рівняння Лапласа для напруження зсуву:

$$\nabla^2 \tau = -u \cdot \partial D/\partial x - v \cdot \partial D/\partial y + \eta \cdot \nabla^2 D = 0. \tag{41}$$

Отже, система рівнянь (39), рівняння (41) є основними рівняннями для визначення полів швидкості деформації та напружень зсуву. Додамо до них граничні умови в точках дотику полімеру з валками та умову нестисливості (38).

Наведена вище математична модель процесу пластичної деформації полімеру між валками перероблювального пристрою була розрахована за допомогою скінченнорізницевого методу, згідно з яким всі диференціальні рівняння та граничні умови записуються у скінченних різницях на сітці фіксованих комірок (рис. 4), що покриває область деформованого полімерного матеріалу. У результаті отримали таку систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j} &= 0,25 \cdot \left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - (\tau_{i+1,j} - \tau_{i,j}) \cdot h_g / \eta_{ij} \right] \\ v_{i,j} &= 0,25 \cdot \left[v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - (\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j}) \cdot h_v / \eta_{ij} \right] \\ \tau_{i,j} &= 0,25 \cdot (\tau_{i+1,j} + \tau_{i-1,j} + \tau_{i,j+1} + \tau_{i,j-1}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

де h – розмір комірки, м.

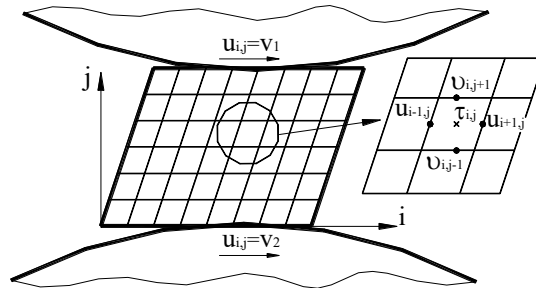


Рис. 4. Сітка фіксованих комірок, що покриває область деформації полімеру між валками перероблювального обладнання

З рис. 4 видно, що з часом горизонтальний розмір комірки h_g лишається постійним, а вертикальний розмір комірки h_v змінюється після кожного визначення полів швидкостей деформацій та напружень зсуву. Цю зміну можна врахувати таким чином:

$$h_v = h_g / [\cos(k \cdot \arctg[(v_1 - v_2) / h_2])], \quad (43)$$

де h_2 – товщина затиснутого між валками полімерного матеріалу, м.

Вплив температури полімерного матеріалу на напружено-деформований стан, що створюється в ньому перероблювальним обладнанням, враховується рівнянням (8). Для визначення розповсюдження тепла в полімерному матеріалі, що передається від валків пристрою, скористаємося виразом, який описує зміну температури в деякому двовимірному просторі, тобто рівнянням теплопровідності [9]:

$$\partial T / \partial t = a^2 \cdot (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2), \quad (44)$$

де a – коефіцієнт температуропроводності, $^{\circ}\text{C}^{-1}$; T – температура досліджуваного середовища, $^{\circ}\text{C}$.

Запишемо рівняння (8) та (44) у формі скінченних різниць в такий спосіб:

$$\left. \begin{aligned} T_{i,j} &= 0,25 \cdot (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) \\ \eta_{ij} &= \eta_0 \cdot \exp(U / RT_{ij}). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Отже, наведені вище вирази в скінченнорізницькій постановці утворюють повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення всіх невідомих компонентів тензора напружень та деформацій. Для розв'язку таких систем доцільно використовувати ітераційні методи рішення, що враховують спеціальний вигляд таких систем і є зручними для реалізації на ЕОМ [9]. У цій роботі використовується ітераційний метод Лібмана [6, 9] з проведенням послідовних релаксацій.

В результаті числового моделювання отримано розподіл дотичних напружень по площині поліпропіленового зразка внаслідок його деформації між валками профілю Рело.

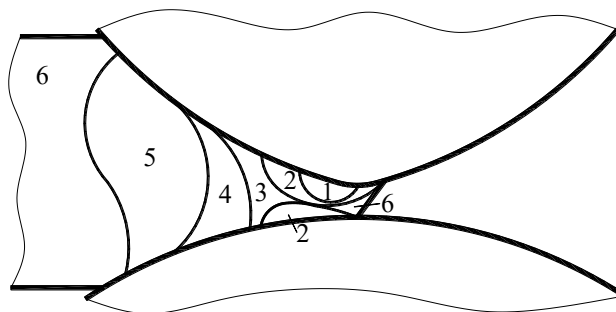


Рис. 4. Розподіл дотичних напружень по площині поліпропіленового зразка внаслідок його деформації між валками профілю Рело:

1 – напруження зсуву $\tau = 1,25$ МПа; 2 – $\tau = 1,10$ МПа; 3 – $\tau = 0,86$ МПа;
4 – $\tau = 0,62$ МПа; 5 – $\tau = 0,50$ МПа; 6 – $\tau = 0,35$ МПа

З рис. 4 видно, що максимальні напруження зсуву виникають в області 1, яка граничить з верхнім валком. Це пояснюється тим, що в зазначеній області створюються максимальні швидкості деформацій. Отже, варіюючи конструктивними параметрами валків та технологічними параметрами перероблювального

обладнання можна визначити раціональну конструкцію робочих органів обладнання та ефективні режими їх взаємодії із полімерними відходами.

За результатами числового моделювання отримано графіки, що пов'язують швидкість зсувних деформацій, створених робочими органами перероблювального обладнання, з дотичними напруженнями, що виникають в полімерному матеріалі (рис. 5, 6).

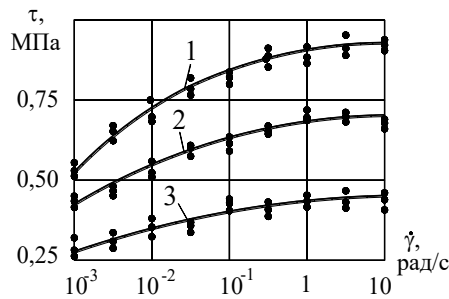


Рис. 5. Залежність зсувного напруження від швидкості деформації поліетилену: 1 – при температурі $T=20$ °C; 2 – $T=50$ °C; 3 – $T=80$ °C

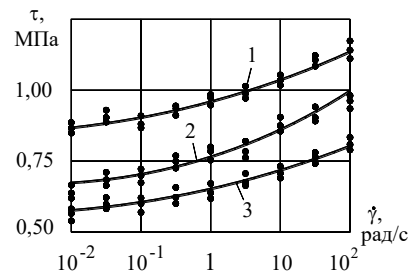


Рис. 6. Залежність зсувного напруження від швидкості деформації поліпропілену: 1 – при тиску, що створюється валками, $\sigma=5$ МПа; 2 – $\sigma=3,5$ МПа; 3 – $\sigma=2$ МПа

З рис. 5, 6 видно, що в результаті збільшення швидкості деформації, яка визначається коловими швидкостями та радіусами валків, збільшується значення максимальних дотичних напружень в матеріалі. Водночас спостерігається суттєвий вплив на величину цих напружень температури матеріалу і тиску, що створюється валками.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Запропоновано модель пластичної деформації полімерного матеріалу в міжвалковому просторі перероблювального обладнання в умовах стиску і зсуву, на основі якої встановлено, що всебічний тиск, який створюється в полімері робочими органами перероблювального обладнання, викликає лише в'язкопружну деформацію, а тому пластичного ущільнення матеріалу в процесі його руйнування не відбувається.

В результаті числового моделювання пластичної деформації полімерних відходів між валками профілю Рело отримано розподіл дотичних напружень по площині полімерного матеріалу, за яким побудовано графічні залежності напруження від швидкості деформації, яка визначається коловими швидкостями та радіусами валків.

Література

1. Kachanov L. M. Fundamentals of the Theory of Plasticity (Dover Civil and Mechanical Engineering) / L. M. Kachanov – Dover Publications; Illustrated edition, 2004, – 513 p. (ISBN-13: 978-0486435831).
2. Lurie A. I. Theory of Elasticity (Foundations of Engineering Mechanics) / A. I. Lurie, Alexander Belyaev (Translator) – Springer; 2005th edition, – 1050 p. (ISBN-13: 978-3540245568).
3. Синюк О.М. Експериментальні дослідження руйнування поліетиленових та поліпропіленових плівок / О.М. Синюк // Міжнародний науковий журнал «Проблеми трибології». – Хмельницький : ХНУ, 2017. – № 4 (86). – С. 51-59.
4. Makarov P.V., Stefanov Yu.P., Smolin I.Yu., Cherepanov O.I. Modeling of mechanical behavior of geomaterials on the mesoscale // Int. J. Multiscale Comput. Eng. - 2005. - V. 3. - Iss. 2. - P. 135-148.
5. Stefanov Yu.P. Numerical investigation of deformation localization and crack formation in elastic brittle-plastic materials // Int. J. Fract. - 2004. - V. 128(1). - P. 345-352.
6. Бурмістенков О.П. Числові методи математичного моделювання в створенні технологічної оснастки для лиття виробів з полімерних матеріалів: монографія / О.П. Бурмістенков, Б.М. Злотенко, М.Є. Скиба, О.М. Синюк. – Хмельницький : ПП Ковальський В.В, 2002. – 148 с.10.
7. Eremin Mikhail. Numerical simulation of failure of sandstone specimens utilizing the finite-difference continuous damage mechanics approach / Mikhail Eremin // Procedia Structural Integrity. – 2019. – V. 18. – P. 135-141. (<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.148>).
8. Davoli Elisa. Dynamic perfect plasticity and damage in viscoelastic solids / Elisa Davoli, Tomas Roubicek, Ulisse Stefanelli // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. – 2019. – V. 99 (7). – 30 p. (DOI: 10.1002/zamm.201800161).
9. Synyuk O. Improvement of Footwear Moulding Machines for the Production of the Advanced Reliability Items / O. Synyuk, M. Skyba // The eleventh world congress in Mechanism and Machine Science (1-4 April 2004). – Tianjin (China) : Editor Tian Huang School of Mechanical Engineering Tianjin University, 2004. – V. 5. – P. 2212-2216.

References

1. Kachanov L. M. Fundamentals of the Theory of Plasticity (Dover Civil and Mechanical Engineering) / L. M. Kachanov – Dover Publications; Illustrated edition, 2004, – 513 p. (ISBN-13: 978-0486435831).
2. Lurie A. I. Theory of Elasticity (Foundations of Engineering Mechanics) / A. I. Lurie, Alexander Belyaev (Translator) – Springer; 2005th edition, – 1050 p. (ISBN-13: 978-3540245568).
3. Sinyuk O.M. Experimental studies of the destruction of polyethylene and polypropylene films / O.M. Sinyuk // International Scientific Journal "Problems of Tribology". - Khmelnytskyi: KhNU, 2017. - No. 4 (86). - P. 51-59.
4. Makarov P.V., Stefanov Yu.P., Smolin I.Yu., Cherepanov O.I. Modeling of mechanical behavior of geomaterials on the mesoscale // Int. J. Multiscale Comput. Eng. - 2005. - V. 3. - Iss. 2. - P. 135-148.
5. Stefanov Yu.P. Numerical investigation of deformation localization and crack formation in elastic brittle-plastic materials // Int. J. Fract. - 2004. - V. 128(1). - P. 345-352.
6. Burmistenkov O.P. Numerical methods of mathematical modeling in the creation of technological equipment for casting products from polymer materials: monograph / O.P. Burmistenkov, B.M. Zlotenko, M.E. Skiba, O.M. Son of a bitch - Khmelnytskyi: PP Kovalskyi VV, 2002. - 148 p. 10.
7. Eremin Mikhail. Numerical simulation of failure of sandstone specimens utilizing the finite-difference continuous damage mechanics approach / Mikhail Eremin // Procedia Structural Integrity. – 2019. – V. 18. – P. 135-141. (<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.148>).
8. Davoli Elisa. Dynamic perfect plasticity and damage in viscoelastic solids / Elisa Davoli, Tomas Roubicek, Ulisse Stefanelli // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. – 2019. – V. 99 (7). – 30 p. (DOI: 10.1002/zamm.201800161).
9. Sinyuk O. Improvement of Footwear Moulding Machines for the Production of the Advanced Reliability Items / O. Sinyuk, M. Skyba // The eleventh world congress in Mechanism and Machine Science (1-4 April 2004). – Tianjin (China) : Editor Tian Huang School of Mechanical Engineering Tianjin University, 2004. – V. 5. – P. 2212-2216.