https://doi.org/10.31891/2307-5732-2023-317-1-167-173
УДК 621.391

ПЕДЯШ Володимир
Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку
https://orcid.org/0000-0002-4071-357X
e-mail: vpedyash@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИЧНОГО ВОЛОКНА

Волоконно-оптичні системи передавання є основним типом систем для побудови сучасних телекомунікаційних мереж. В транспондерах сучасних оптичних систем передавання реалізовано ефективні методи модуляції та кодування, що дозволяє суттєво підвищити чутливість приймача і збільшити довжину ділянки регенерації. При проектуванні таких систем постає актуальне завдання з визначення характеристик якості оптичних каналів. Для вирішення цієї задачі слід розробити математичну модель системи передавання і провести імітаційне моделювання з її використанням. Одним із основних функціональних блоків моделі, що впливає на достовірність отриманих результатів, є середовища розповсюдження сигналу – оптичне волокно. В роботі проаналізовано найбільш поширений варіант побудови моделі на базі Фур'є методу розщеплення за фізичними факторами. Розглянуто перелік питань, пов'язаних зі зменшенням обчислювальної складності моделі та її тестування.

Ключові слова: математична модель, оптичне волокно, спотворення, дисперсія, сигнал

PEDYASH Volodymyr
State University of Intellectual Technologies and Communications

INVESTIGATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF OPTICAL FIBER

Fiber optic transmission systems are the main type of systems for building telecommunication networks. The transponders of modern optical transmission systems implement efficient modulation and coding methods, which can significantly increase the receiver sensitivity and increase the length of the regeneration area. The task to define the quality characteristics of optical channels occurs during the design of such systems.

To solve this problem, it is necessary to develop a mathematical model of the transmission system and perform a simulation using it. One of the main blocks of the system is the propagation medium (optical fiber). The optical fiber model is based on the nonlinear Schrödinger differential equation. Several groups of modeling methods have been developed on its basis. The most widespread is the Fourier method of splitting by physical factors, as it has a simple algorithm structure, high computing speed, and high accuracy. This method is recursive, so to reduce the number of iterations, it is reasonable to use the well-known method of nonlinear phase rotation.

To check the functionality of the developed program code, it is recommended to perform testing in several stages. At the first stage, it is proposed to check the accuracy of the distortion of chromatic dispersion. Single pulses of simple shape, such as Gaussian pulses, should be used as a test signal. By calculating the pulse shape using theoretical expressions and comparing them with the modeling results, the accuracy of the optical fiber modeling algorithm can be verified. The next step in verifying the fiber model is to evaluate the accuracy of the simultaneous introduction of dispersion and nonlinear distortions. For this purpose, it is proposed to analyze the propagation of pulses of optical solitons of the first and higher orders.

Keywords: mathematical model, optical fiber, distortion, dispersion, signal

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Швидкий ріст обсягу трафіку в телекомунікаційних мережах і розповсюдження технологій цифрового зв'язку потребують підвищення показників ефективності систем передавання. Сьогодні для досягнення цієї мети успішно використовуються волоконно-оптичні системи передавання (ВОСП), які знайшли широке застосування на ділянках транспортних мереж та мереж доступу. В транспондерах сучасних ВОСП для збільшення спектральної ефективності сигналу та довжини ділянки регенерації реалізовано когерентні методи прийому. Якість роботи цифрового тракту залежить від характеристик оптичного сигналу (метод модуляції, потужність, довжина хвилі, тощо) та функціональних блоків системи передавання. При проектуванні нових та модернізації існуючих фрагментів телекомунікаційних мереж слід вирішувати завдання з розробки та дослідження математичних моделей трактів ВОСП. Це дозволяє обрати оптимальні характеристики сигналу, налаштування функціональних блоків системи передавання і впевнитися у задоволенні допустимих показників якості цифрових трактів ВОСП.

На даний час для моделювання ВОСП вже розроблено пакети спеціалізованого програмного забезпечення, наприклад, Optiwave OptiSystem, Rsoft OptSim та VPIphotonics VPItransmissionMaker. Ці пакети є комерційним програмним продуктом із достатньо високою вартістю, оскільки орієнтовані на використання в наукових дослідженнях із достатньою фінансовою підтримкою. Тому при проведенні бюджетних наукових досліджень виконавцям доводиться вирішувати проблему з розробки і перевірки достовірності своїх моделей трактів ВОСП з використанням більш доступних пакетів моделювання MatLab, SciLab або GNU Octave. Одним із головних функціональних блоків моделі, якість реалізації якого впливає на достовірність отриманого результату є оптичне волокно.

Аналіз останніх досліджень

Проблема моделювання розповсюдження сигналу в ОВ не є новою і на сьогодні запропоновано кілька варіантів її вирішення. Відомо, що процес розповсюдження сигналу вздовж оптичного волокна

описується нелінійним диференційним рівнянням Шредінгера [1]. Воно встановлює взаємозв'язок між огинаючою оптичного сигналу на вході та виході ОВ. Зважаючи на форму виразу, аналітичного розв'язку дане рівняння не має, тому вирішується численними методами [2–4]. Найбільш поширеним є Фур'є метод розщеплення по фізичним факторам (ФМРФФ), що передбачає вирішення диференційного рівняння в часткових похідних. Таким чином, математична модель ОВ вносить спотворення, тотожні реальному оптичному волокну. Перевагою методу є точність, простота реалізації та висока швидкість алгоритму обчислень. Певним його недоліком є рекурентність, оскільки на кожному наступному кроці ітерації використовуються результати розрахунків з попереднього кроку.

Іншим менш поширеним методом моделювання ОВ є використання теорії рядів Вольтерра [5–7]. На відміну від ФМРФФ він не є рекурентним і дозволяє визначати окремі складові спектру сигналу. В своєму базовому варіанті цей метод передбачає визначати окремі складові спектру шляхом розрахунку суми нескінченої кількості доданків, кожен з яких є згорткою вхідного сигналу та функції - ядра Вольтерра. Але визначення всіх доданків є неможливим, оскільки кожен з них містить інтеграл з кратністю, що відповідає його номеру. Зважаючи на це, зазвичай враховують перші два-три доданки, що включають ядра Вольтерра першого, третього та, при необхідності, п'ятого порядку. Нехтування доданками ряду з ядрами вищих порядків призводить до значного зменшення достовірності математичної моделі ОВ. Зменшити погрішність моделювання можна використанням модифікованої версії даного методу [8, 9]. Але широкого розповсюдження даний метод не отримав. Тому в цій роботі дослідження достовірності моделювання ОВ виконано із використанням Фур'є методу розщеплення по фізичним факторам.

Формулювання цілей статті

Метою даної роботи є аналіз методів математичного моделювання оптичного волокна та визначення критеріїв достовірності отриманих результатів.

Виклад основного матеріалу

Зважаючи на конструкцію світловода та фізичні властивості його матеріалів, оптичний сигнал спотворюється при проходженні вздовж середовища розповсюдження. Спотворення, що призводять до зміни часової форми та спектру вихідного сигналу, можна розділити на дві основні групи – лінійні та нелінійні (рис. 1). В свою чергу, лінійні спотворення включають ефекти загасання (втрати потужності сигналу) та дисперсії (спотворення форми сигналу). При аналізі процесу передавання сигналів зі швидкістю до 40 Гбіт/с по одномодовим волокнам, проявами модової та поляризаційної дисперсії можна знехтувати [1].

Загасання призводить до зменшення потужності (інтенсивності) оптичного сигналу зі збереженням його форми в часовій та спектральній області:

$$P(z,t) = P(0,t)e^{-\alpha z}, \quad (1)$$

де $P(z,t)$ та $P(0,t)$ – потужність сигналу на вході та відстані z від точки вводу випромінювання в ОВ; α – коефіцієнт загасання ОВ.

Потужність оптичного сигналу є квадратом модуля напруженості електричного поля:

$$P(z,t) = |A(z,t)|^2. \quad (2)$$

В оптично прозорих середовищах розповсюдження виникають також і нелінійні спотворення (залежать від потужності вхідного сигналу), які можна розділити на дві групи:

1) ефекти Керра, пов'язані з нелінійністю показника заломлення ОВ (фазова самомодуляція, ФСМ; перехресна модуляція, ПХМ та чотирихвильове змішування, ЧХЗ);

2) ефекти стимульованих Раманівського та Брілюенівського розсіювань.

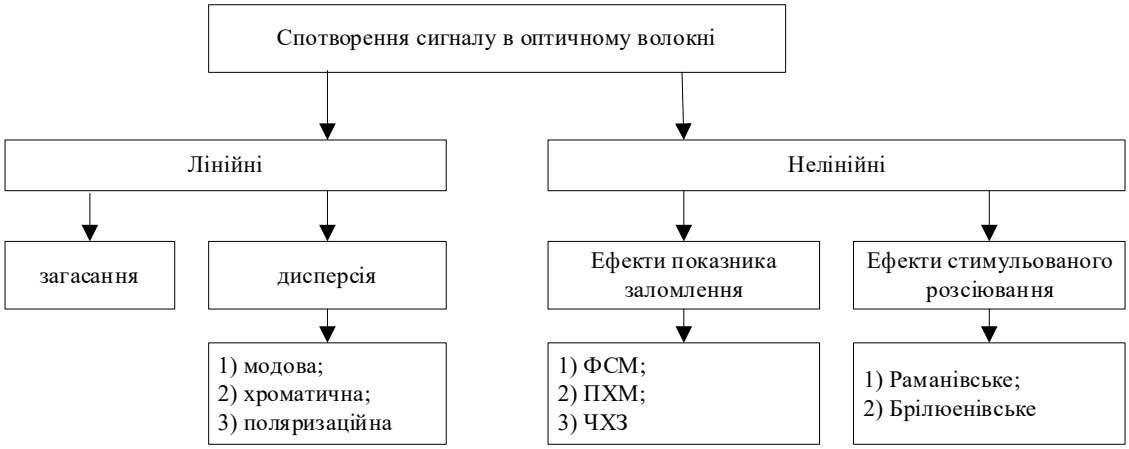


Рис. 1. Класифікація спотворень сигналу в оптичному волокні

Повну величину показника заломлення n_Σ оптичного матеріалу з врахуванням нелінійності матеріалу визначають за виразом

$$n_\Sigma = n_0 + n_2\left(\frac{P_c}{A_{еф}}\right), \tag{3}$$

де n_0 та n_2 - відповідно постійна складова показника заломлення та його нелінійний коефіцієнт (для кварцу $n_2 \approx 2,6\cdot 10^{-20}$ м^2/Вт); $A_{еф}$ - ефективна площа ОВ.

Моделі розповсюдження сигналу в оптичному волокні можна будувати на основі двох груп методів: правилами геометричної (променевої) та хвилеводної оптики. Перший варіант є більш простим для розуміння і базується на відомому у фізиці законі Снелліуса, що описує поведінку світлового променю на межі двох оптично прозорих середовищ розповсюдження з різними показниками заломлення. Але даний метод не дозволяє побудувати повноцінну модель середовища розповсюдження, що буде відповідати реальному ОВ.

Повний опис процесу розповсюдження оптичного сигналу в оптично прозорому середовищі розповсюдження з лінійними та нелінійними спотвореннями досягається шляхом використання нелінійного рівняння Шредінгера [1, 2]:

$$j\frac{dA}{dz} = -\frac{j}{2}dA + \frac{1}{2}\beta_2\frac{d^2A}{dT^2} - \gamma|A|^2 A, \tag{4}$$

де A – огинаюча оптичного сигналу; T – час; α, β_2 та γ - загасання, дисперсія та нелінійність середовища розповсюдження.

Для сигналів довільної форми, рівняння (4) аналітичного розв'язку не має, тому вирішується чисельними методами. Одним із найточніших є Фур'є метод розщеплювання по фізичним факторам (ФМРФФ). В його основу покладена ідея умовного поділу ОВ з сумарною довжиною $L_{ов}$ на скінчену кількість N_c елементарних сегментів (відрізків) довжиною h_n кожен. Довжина сегментів може бути довільною (в тому числі однаковою), але в будь-якому випадку їхня сума повинна дорівнювати сумарній довжині ОВ.

В базовому варіанті методу [1], вхідний сигнал $A(z,t)$ зі спектром $A(z,\omega)$ на кожному сегменті послідовно обробляється операторами $\hat{D}\{\ \}$ та $\hat{N}\{\ \}$, що відповідно вносять лінійні та нелінійні спотворення (рис. 2, а):

$$A(z+h_,t) = F_{-1}\left\{\hat{D}\left\{F\left\{A(z,t)\right\}\right\}\right\}, \tag{5}$$

$$A(z+h,t) = \hat{N}\left\{A(z+h_,t)\right\}, \tag{6}$$

де $F\{\ \}$ та $F_{-1}\{\ \}$ - оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є; $A(z+h_,t)$ та $A(z+h,t)$ - напруженість електричного поля оптичного сигналу до та після внесення нелінійних спотворень відповідно.

Вирази для лінійного та нелінійного операторів можна отримати шляхом вирішення рівняння Шредінгера (4) за умови ігнорування одним із ефектів спотворення сигналу, прирівнюючи $\beta_2 = 0$ або $\gamma = 0$. Результатом розв'язку є диференційні рівняння [1]:

$$A(z,t) = A(0,t)e^{j\gamma|A(0,t)|^2 z}. \tag{7}$$

$$A(z,\omega) = A(0,\omega)e^{j\frac{\beta_2}{2}\omega^2 z}. \tag{8}$$

З метою спрощення запису, у виразах (7) та (8) проігнорований коефіцієнт загасання ОВ $e^{-\alpha z}$.

В результаті, вирази для обробки сигналу на кожному сегменті приймають наступну форму:

$$A(z+h_,t) = F_{-1}\left\{\hat{D}\left\{A(z,\omega)\right\}\right\} = F_{-1}\left\{A(z,\omega)e^{j\frac{\beta_2}{2}\omega^2 h}\right\}, \tag{9}$$

$$A(z+h,t) = \hat{N}\left\{A(z+h_,t)\right\} = A(z+h_,t)e^{j\gamma|A(z+h_,t)|^2 z}, \tag{10}$$

Недоліком базового варіанту ФМРФФ є значний вплив довжини сегменту *h* на точність чисельного моделювання. Кращої точності можна досягти шляхом використання симетричної версії ФМРФФ [10], який передбачає внесення нелінійних спотворень посередині сегменту (рис. 2, б). Обробку сигналу на кожному з трьох кроків можна описати наступними виразами:

$$A(z+h_/2,\omega) = \hat{D}\left\{A(z,\omega)\right\} = A(z,\omega)e^{j\frac{\beta_2}{2}\omega^2\frac{h}{2}}, \tag{11}$$

$$A(z+h/2,t) = \hat{N}\left\{A(z+h_/2,t)\right\} = A(z+h_/2,t)e^{j\gamma|A(z+h_/2,t)|^2 h}, \tag{12}$$

$$A(z+h,\omega) = \hat{D}\left\{A(z+h/2,\omega)\right\} = A(z+h/2,\omega)e^{j\frac{\beta_2}{2}\omega^2\frac{h}{2}}. \tag{13}$$

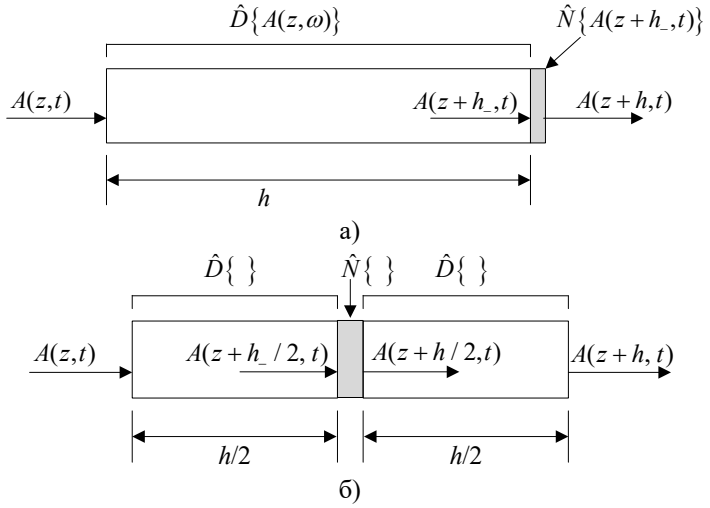


Рис. 2. Графічна інтерпретація варіантів методу ФМРФФ: а) базовий; б) симетричний

Наведений алгоритм симетричного ФМРФФ є досить точним і простим методом, внаслідок чого знайшов широке розповсюдження в імітаційному програмному забезпеченні для ВОСП. Для отримання ідеально достовірних результатів необхідно вибирати довжину елементарного сегменту $h \to 0$. Оскільки на кожному сегменті виконується дві операції перетворення Фур'є (пряме та зворотне), це призводить до значного росту розрахункових операцій та часу моделювання. Одним з варіантів зменшення кількості елементарних сегментів ОВ зі збереженням достатньої точності є використання методу нелінійного повороту фази [10].

Його суть полягає в тому, що в оптичному сигналі з потужністю P_c, який пройшов відрізок волокна довжиною h виникає зсув фази $\varphi_{нл}$, викликаний нелінійністю середовища розповсюдження:

$$\varphi_{нл} = \gamma \cdot P_c \cdot h. \tag{14}$$

Для ВОСП, критичних до нелінійних спотворень, можна зафіксувати максимально допустиме значення фазового зсуву значенням $\varphi_{нл\,max}$ і розрахувати відповідно йому довжину сегменту:

$$h = \frac{\varphi_{нл\,max}}{\gamma P_c} \tag{15}$$

Для середовища з втратами слід виконувати перерахунок потужності сигналу на вході кожного послідуючого сегменту. Блок-схема даного алгоритму наведена на рис. 3.

При аналізі спотворень сигналу в оптичних волокнах, окрім фактичної довжини оптичного волокна $L_{ов}$, користуються поняттями дисперсійної $L_д$ та нелінійної $L_{нл}$ довжини, які розраховуються відповідно за виразами [1]:

$$L_д = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \tag{16}$$

та

$$L_{нл} = \frac{1}{\gamma P_0}, \tag{17}$$

де T_0 - початкова тривалість імпульсу; P_0 - потужність сигналу.

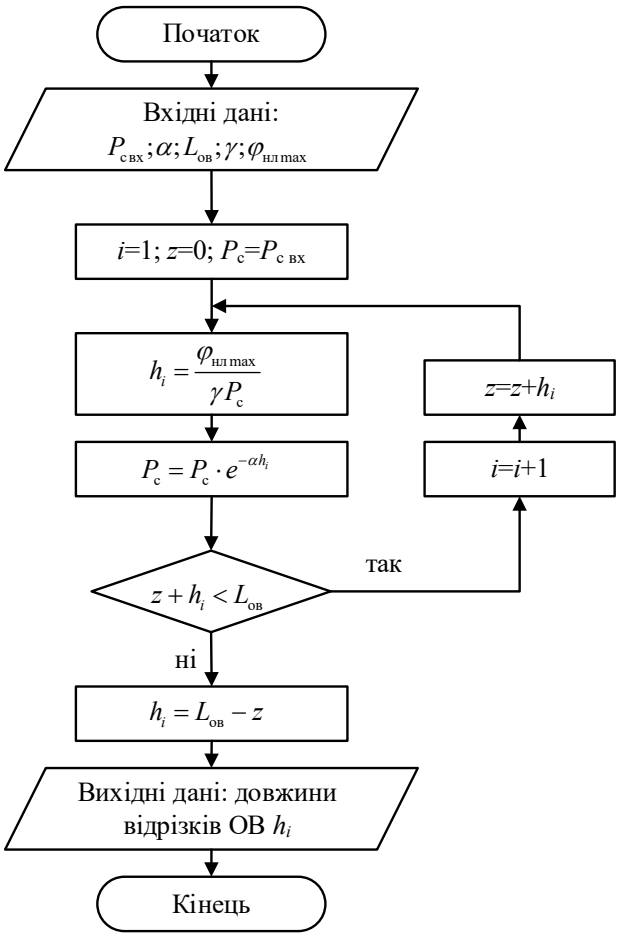


Рис. 3. Блок-схема алгоритму нелінійного повороту фази при моделюванні ОВ

В якості тестового сигналу при дослідженні математичної моделі ОВ доцільно використати гаусівський імпульс з напівшириною T_0 :

$$A(0,t)=\sqrt{P_0}\exp\left[-\frac{t^2}{2T_0^2}\right]. \tag{18}$$

Виконаємо спочатку перевірку на достовірність внесення спотворень хроматичної дисперсії. Джерело [1] містить форму гаусівського імпульсу на виході дисперсійного середовища розповсюдження для трьох варіантів нормованої довжини лінії: $L_{\text{ов}}/L_{\text{д}}=0$, $L_{\text{ов}}/L_{\text{д}}=2$ та $L_{\text{ов}}/L_{\text{д}}=4$. Аналогічний графік, розрахований шляхом моделювання згідно вищенаведених виразів в середовищі MatLab, наведений на рис. 4. Він повністю співпадає з прототипом із вищевказаного джерела, що підтверджує точність внесення спотворень хроматичної дисперсії.

Остаточну відповідь на питання достовірності математичної моделі ОВ може дати моделювання процесу розповсюдження оптичних солітонів у середовищі з дисперсійними та нелінійними спотвореннями одночасно. В загальному випадку, вираз для форми оптичного солітону має вигляд [11]:

$$A(0,t)=\sqrt{P_0}\,\text{sech}\left(\frac{t}{T_0}\right), \tag{19}$$

де T_0 - тривалість імпульсу.

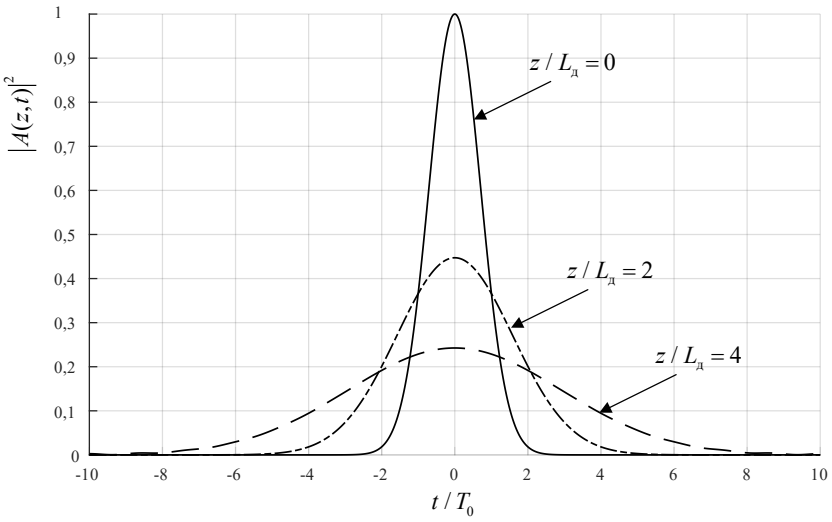


Рис. 4. Спотворення гаусівського імпульсу внаслідок хроматичної дисперсії

($\beta_2 = -20 \cdot 10^{-24}$ с²/км; $T_0 = 1 \cdot 10^{-10}$ с; $L_д$ =500 км; $N_c = 40$)

Пікова потужність імпульсу, необхідна для розповсюдження солітона, розраховується за виразом:

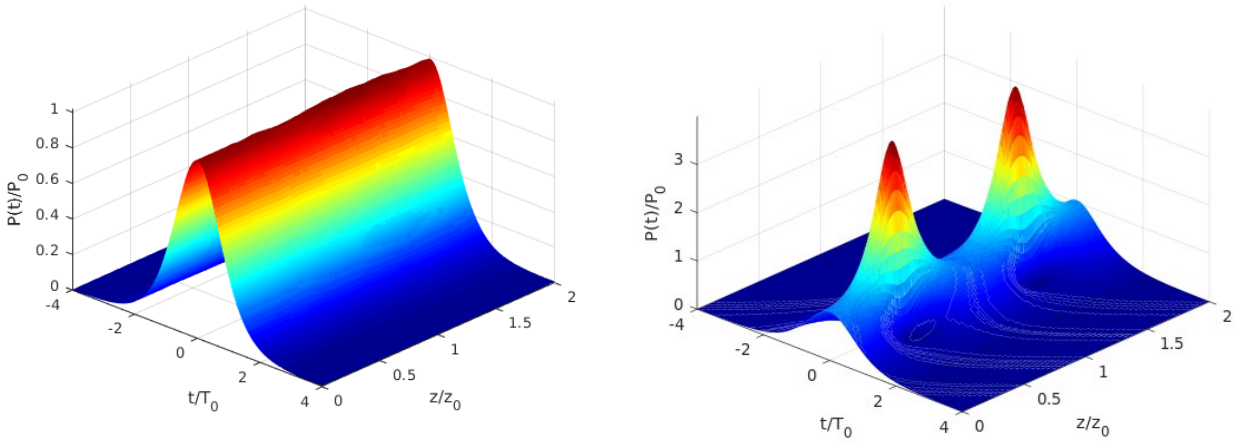
$$P_0 = N^2 \frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}, \tag{20}$$

де N – порядок солітону ($N \geq 0, N \in$).

При розповсюдженні солітона вищих порядків спостерігається зміна його часової форми, яка повторюється через певну відстань z_0, яка називається періодом солітона [1]:

$$z_0 = \frac{\pi}{2} L_д = \frac{\pi}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|}. \tag{21}$$

Випадок $N = 1$ відповідає основному солітону, який не змінює часової форми при розповсюдженні в просторі. Приклад розрахунку просторової форми солітонів першого та другого порядку в середовищі MatLab наведено на рис. 5. Отримана часово-просторова форма сигналу повністю відповідає поведінці оптичних солітонів, що підтверджує достовірність функціонування розробленого програмного коду до вище описаної математичної моделі ОВ на базі ФМРФФ.



N=1 ***N*=2**

Рис. 5. Еволюція форми основного солітону та вищого порядку

($\beta_2 = -20 \cdot 10^{-24}$ с²/км; $A_{еф} = 80$ мкм²; $\gamma =$ 1,317 1/(Вт*км); $T_0 = 7,09$ пс; z_0=3,948 км)

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

В статті виконано аналіз методів математичного моделювання оптичного волокна. Встановлено, що найбільш розповсюдженим є Фур'є метод з розщепленням по фізичним факторам, оскільки він дозволяє достовірно реалізувати внесення дисперсійних та нелінійних спотворень в оптичний сигнал. З метою зменшення обчислювальних ресурсів, довжини елементарних відрізків ОВ доцільно розраховувати за допомогою методу нелінійного повороту фази. Первинне тестування розробленої моделі ВОСП

пропонується проводити на прикладі аналізу розповсюдження сигналу з простою формою, наприклад, гаусового імпульсу. Більш глибоку перевірку доцільно виконувати з використанням імпульсів оптичних солітонів першого та вищих порядків.

В подальших дослідженнях слід виконати аналіз більш комплексних моделей оптичного середовища розповсюдження для поляризованих сигналів.

Література

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. New York: Academic Press, 2013. 631 p.

2. Shaw J.K. Mathematical principles of optical fiber communications. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. 93 p.

3. Педяш В.В. Влияние фазовой самомодуляции оптического сигнала на качество каналов ВОСП СРК / В.В. Педяш, О.С. Решетникова // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. 2010.– № 1. – С. 109-114.

4. Педяш В.В. Влияние нелинейных искажений оптических волокон на качество каналов ВОСП СРК / В.В. Педяш // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2010. – № 2. – С. 70-74.

5. Peddanarappagari K.V., Brandt-Pearce M. Volterra Series Transfer Function of Single-Mode Fibers. Journal of Lightwave technology. 1997. Vol. 15, No 12. P. 2232-2241.

6. Anilionis R., Andriukaitis D., Anilioniene J. Modeling of Nonlinear Circuit using Volterra Series. Elektronika ir elektrotechnika. 2012. No 4(120). P. 43-46.

7. Brandt-Pearce M., Xu B. Comparison of FWM- and XPM-Induced Crosstalk Using the Volterra Series Transfer Function Method. Journal of Lightwave technology. 2003. Vol. 21, No 1. P. 40-53.

8. Brandt-Pearce M., Xu B. Modified Volterra Series Transfer Function Method. IEEE Photonics technology letters. 2002. Vol. 14, No 1. P. 47-49.

9. Педяш В.В. Усовершенствование модели распространения оптического сигнала на базе рядов Вольтерра / В.В. Педяш // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2015. – № 2. – С. 96-103.

10. Sinkin O.V., Holzlohner R., Zweck J., Menyuk C.R. Optimization of the split-step Fourier method in modeling optical-fiber communications systems. Journal of Lightwave Technology. 2003. Т. 21, № 1. С. 61–68.

11. Mitschke F., Mahnke C. Soliton Content of Fiber-Optic Light Pulses. Applied Sciences. 7, no. 6: 635.

References

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. New York: Academic Press, 2013. 631 p.

2. Shaw J.K. Mathematical principles of optical fiber communications. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. 93 p.

3. Pedjash V.V. Vlijanie fazovoj samomoduljacii opticheskogo signala na kachestvo kanalov VOSP SRK / V.V. Pedjash, O.S. Reshetnikova // Naukovi praci UDAZ im. O.S. Popova. 2010.– № 1. – S. 109-114.

4. Pedjash V.V. Vlijanie nelinejnyh iskazhenij opticheskih volokon na kachestvo kanalov VOSP SRK / V.V. Pedjash // Naukovi praci UDAZ im. O.S. Popova. – 2010. – № 2. – S. 70-74.

5. Peddanarappagari K.V., Brandt-Pearce M. Volterra Series Transfer Function of Single-Mode Fibers. Journal of Lightwave technology. 1997. Vol. 15, No 12. P. 2232-2241.

6. Anilionis R., Andriukaitis D., Anilioniene J. Modeling of Nonlinear Circuit using Volterra Series. Elektronika ir elektrotechnika. 2012. No 4(120). P. 43-46.

7. Brandt-Pearce M., Xu B. Comparison of FWM- and XPM-Induced Crosstalk Using the Volterra Series Transfer Function Method. Journal of Lightwave technology. 2003. Vol. 21, No 1. P. 40-53.

8. Brandt-Pearce M., Xu B. Modified Volterra Series Transfer Function Method. IEEE Photonics technology letters. 2002. Vol. 14, No 1. P. 47-49.

9. Pedjash V.V. Usovershenstvovanie modeli rasprostranenija opticheskogo signala na baze rjadov Vol'terra / V.V. Pedjash // Naukovi praci ONAZ im. O.S. Popova. – 2015. – № 2. – S. 96-103.

10. Sinkin O.V., Holzlohner R., Zweck J., Menyuk C.R. Optimization of the split-step Fourier method in modeling optical-fiber communications systems. Journal of Lightwave Technology. 2003. Т. 21, № 1. С. 61–68.

11. Mitschke F., Mahnke C. Soliton Content of Fiber-Optic Light Pulses. Applied Sciences. 7, no. 6: 635.