

КОВТУН ІГОР

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-1430-6479>e-mail: [kovtunih@khmnu.edu.ua](mailto:kovtunih@khmnu.edu.ua)

БІЛОВУС АНДРІЙ

Національний університет «Львівська політехніка»

<https://orcid.org/0009-0002-5865-822X>e-mail: [andrii.r.bilovus@lpnu.ua](mailto:andrii.r.bilovus@lpnu.ua)

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНИХ І КІНЕМАТИЧНО ЗБУДЖУВАНИХ КОЛИВАНЬ ДРУКОВАНОЇ ПЛАТИ ЕЛЕКТРОННОЇ АПАРАТУРИ

Метою статті є проведення комплексного математичного моделювання динамічних процесів у механічній системі друкованої плати, яке включає розрахунок власних частот і форм коливань плати, а також визначення амплітудно-частотних характеристик кінематично-збуджуваних коливань системи. Моделювання напружено-деформованого стану і коливальних процесів у друкованій платі здійснено на основі застосування розрахункової моделі друкованої плати у вигляді багатопрогової балки із зосередженими та розподіленими масами, шарнірно-закріпленої на кінцях, що дало можливість істотно спростити динамічний аналіз механічної системи. В статті представлено дискретну математичну модель вільних коливань друкованої плати, дискретну математичну модель кінематично збуджуваних коливань друкованої плати та континуально-дискретну математичну модель вільних коливань друкованої плати. Здійснено розрахунок форми коливань для переміщень та максимальних нормальних напружень поперечних перерізів друкованої плати на 4-х критичних частотах коливань для 9 варіантів розташування зосереджених та рівномірно розподілених мас електронних компонентів на поверхні друкованої плати. Проілюстровано істотний вплив вібрацій на умови експлуатації електронної апаратури. Обґрунтовано можливість виникнення резонансних коливань друкованої плати під час експлуатації не лише на нижчій, а й на більш високій власних частотах. Усунення цих небезпечних явищ може бути здійснено лише на основі детального аналізу динамічних процесів у механічній системі плати.

Ключові слова: динамічні процеси; резонанс; форми коливань; друкована плата; коливна система; електронна апаратура.

KOVTUN IHOR

Khmelnyskyi National University

BILOVUS ANDRII

Lviv polytechnic national university

## MATHEMATICAL MODELING FREE AND KINEMATIC GENERATED OSCILLATIONS FOR PRINTED CIRCUIT BOARD OF ELECTRONIC EQUIPMENT

The paper is aimed at performing complex mathematical modeling of dynamic processes in mechanical system of printed circuit board, which includes calculation of natural frequencies and oscillation modes of the board, as well as determination of the amplitude-frequency response for kinematic excited oscillations of the system. Modeling the stress-strain condition and oscillation processes in the printed circuit board is performed on the basis of application of calculation model for the printed circuit board represented in the form of multi-span beam with concentrated and distributed masses, hinged at the ends, what significantly simplifies dynamic analysis of mechanical system. The paper represents the discrete mathematical model for free oscillations of the printed circuit board, the discrete mathematical model for kinematic excited oscillations of the printed circuit board and the continuous-discrete mathematical model for free oscillations of the printed circuit board. Calculation is performed to determine oscillation shape of displacements and maximum normal stresses in the cross-sections of printed circuit board at 4 critical oscillation frequencies on 9 variants for concentrated and uniformly distributed masses of electronic components layout on the surface of printed circuit board. The significant influence of vibrations on electronic equipment operating conditions has been illustrated. The possibility for resonant oscillations occurrence of the printed circuit board during operation has been substantiated not only at lower but also at higher frequencies. Elimination of these dangerous phenomena can be accomplished only on the basis of dynamic processes detailed analysis in the mechanical system of the printed circuit board.

Keywords: dynamic processes; resonance; oscillation modes; printed circuit board; oscillating system; electronic equipment.

### Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

На відміну від статичних навантажень, зміна яких від нуля до кінцевих значень відбувається настільки повільно, що виникаючими при цьому прискореннями можна знехтувати, динамічні навантаження, такі як вібрації та удари, змінюються з часом з великою швидкістю і створюють деформації та напруження, які мають багатократно перевищувати статичні. Дії динамічних навантажень в процесі експлуатації піддаються несівні конструкції (НК) електронної апаратури усіх рівнів: НК1 – корпуси чарунок; НК2 – блокові каркаси, корпуси блоків; НК3 – корпуси шафи, пульта, тумби, каркаси стояків, стелажі, столи, візки. Через механічний зв'язок і взаємодію елементів несівних конструкцій, таких як панелі, рамки, напрямні, кронштейни, основи, бічні стінки, днища корпусів та друковані плати відбувається передача динамічних

деформацій, створюючи механічне напруження, яке нерідко виявляється причиною руйнування електричних кіл та втрати працездатності вузлів, блоків та систем електронної апаратури. Найбільшу небезпеку представляє передача динамічних деформацій на відповідальні функціональні вузли і елементи, зокрема на друковані плати, та на змонтовані на них електронні компоненти.

#### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

В [1] Штайнберг дає практичні емпіричні формули для визначення границі втоми електронних компонентів вмонтованих на друкованій платі ЕА на рухомих об'єктах в авіаційному та автомобільному транспорті де вона піддається дії ударів та вібрацій. Увага приділена напруженню при згині, яке відчувають паяні з'єднання та виводи. Граничне значення визначається відносним переміщенням центру плати в 20 млн. циклах на резонансній частоті. Вібрація вважається стаціонарною за розподілом Гауса. Розрахунок прогину ДП здійснюють методом скінченних елементів, в якому плата представлена коливною системою із багатьма ступенями вільності. Штайнберг вказує, що в певному розгляді багато плат прагнуть бути коливною системою із одним ступенем вільності, або якщо плата поводить себе як коливна система із багатьма ступенями вільності то найбільші напруження виникають за основною формою коливань, тому для розрахунку приймається спрощена система із одним ступенем вільності. В якості моделі приймається спрощене представлення коливної системи балки, в якій інерційні властивості моделі вважаються зосередженими в окремій точці, а пружні елементи приймаються без інерційними.

В [2] дослідження стосується динамічного аналізу друкованої плати з встановленим на ній компонентом під вібраційним навантаженням. Метою дослідження є розробка аналітичної моделі для звичайних конфігурацій друкованої плати та електронних компонентів, щоб передбачити динаміку конструкцій під вібраційним навантаженням і, таким чином, вивчити вплив розташування компонентів. Як додаток, у цій статті подано аналітичну модель друкованої плати з простою опорою електронного компонента. Достовірність аналітичної моделі двох ступенів вільності демонструється шляхом порівняння чисельних результатів для випадкової вібрації з результатами моделі скінченних елементів.

У [3] для оцінки модальних характеристик плати використовується моделювання методом скінченних елементів. Великі компоненти, розміщені на друкованій платі, такі як кристалічний генератор і деякі блоки інтегральних схем, моделюються як прості однорідні прямокутні блоки або циліндри. Модуль пружності для цих компонентів визначається експериментальним випробуванням. Форми і власні частоти коливання друкованої плати обчислюються та співвідносяться за вимірюванням за допомогою вібраційного експерименту. Показано, що це потенційний спосіб для попереднього прогнозування оцінки вібраційної надійності досліджуваного об'єкта.

У статті [4] представлена методологія моделювання, яка використовує еквівалентне статичне навантаження для моделювання механічної реакції віброуючих електронних структур при збудженні в резонансі. Математичне виведення еквівалентного статичного навантаження було повністю розроблено з використанням простих механічних теорій. На основі цього еквівалентного навантаження був проведений статичний аналіз скінченних елементів, підтверджений експериментами та динамічним моделюванням скінченних елементів. Використання методу еквівалентного статичного навантаження настійно рекомендується оскільки, на відміну від динамічного аналізу, він дозволяє критично враховувати нелінійні механічні властивості паяних з'єднань в обчислювально ефективному моделюванні.

Надійність на рівні плати може представляти велике значення для автомобільних електронних компонентів, коли вони піддаються впливу середовищ, схильних до вібрації [5]. Однак відсутність галузевого стандарту для тестування вібрації на рівні плати створює кілька проблем у створенні добре охарактеризованої тестової установки. Ця стаття має на меті співвіднести напруги від автомобільних модулів до рівнів плати шляхом вимірювання спектру вібрації друкованої плати (PCB). Експерименти та моделювання показують, що лазерний доплерівський віброметр забезпечує хорошу кореляцію з акселерометрами мікроелектромеханічних систем. Цей підхід до перевірки надійності дає змогу перенести результати перевірки надійності з лабораторії на термін служби компонентів після того, як вони будуть вбудовані в кінцеве обладнання для застосування.

У статті [6] проаналізовано стійкість до вібрації та конструктивну оптимізацію плати керування бурової установки. Спочатку для пошуку слабких ланок у друкованій платі використовувалися аналіз якісних та кількісних відмов, наслідків та критичності та аналіз дерева несправностей. За результатами аналізу встановлюється точна спрощена модель для основних компонентів, включаючи слабкі ланки, і виконується модальне моделювання та модальні тести. Ключові параметри впливу отримано шляхом порівняльного аналізу та вивчення кривих власної частоти та частоти. Нарешті, положення чутливого до напружень і деформацій джерела в реальному виробничому середовищі визначається за допомогою динамічного імітаційного аналізу випадкової вібрації моделі кінцевих елементів. Отримані результати можуть стати основою для оптимізації антивібраційного дизайну друкованих плат.

У дослідженні [7] експериментально та чисельно з використанням методу скінченних елементів було досліджено вплив локалізованої маси та жорсткості компонентів на резонансні характеристики друкованої плати. Для плат з невеликою кількістю паяних компонентів показано, що ефект маси переважає над ефектами жорсткості, а власна частота знижується в порівнянні з чистою друкованою платою. Також показано, що форми сигналів обох плат практично ідентичні. Отримано хорошу узгодженість скінченно-елементних моделей друкованих плат з експериментальними результатами. Точність моделей скінченних елементів і зміна резонансної поведінки, пов'язана зі зміною кількості компонентів на друкованій платі, підкреслюють

потенціал розробників для отримання певного контролю над динамічними характеристиками друкованої плати. У роботі також розглядався тільки один тип конфігурації збудження і, отже, один набір граничних умов.

У статті [8] представлено аналітичне рішення для вирішення динамічної проблеми електронних вузлів, що піддаються ударним і вібраційним навантаженням. Рішення вперше було сформульовано для отримання характеристик вільних коливань, першої власної частоти і форми коливань електронного вузла. Отже воно знайшло своє застосування для вирішення задач вимушених коливань ударних і гармонічних основних збуджень. Результати цієї аналітичної моделі були порівняні з експериментально вимірними даними та аналізом кінцевих елементів. Нарешті, результати цього рішення були використані для вивчення впливу геометричних і матеріальних конфігурацій електронної структури на втомні характеристики електронних виробів, що піддаються механічним ударам і гармонічним коливанням.

В [9] побудовано математичну модель для дослідження вібраційних коливань друкованих плат блоків управління транспортом. Для отримання залежностей використовувалися методи нелінійної механіки, зокрема, метод Ван дер Поля і поняття хвильового руху. Враховано вплив зовнішніх і внутрішніх факторів на коливальні процеси в друкованій платі. Отримані результати свідчать про те, що, незважаючи на вихідні параметри впливу на друковану плату, амплітуда її коливань під час роботи машини приймає постійне значення. Величина амплітуди стійких коливань шару плати залежить від фізико-механічних характеристик плати і її складових.

У дослідженні [10] представлено аналітичне обговорення випадкових вібраційних навантажень, що прикладаються до друкованих плат, оснащених компонентами поверхневого монтажу. Електронний вузол моделюється за допомогою теорії багатошарових пластин, де плата, шар припою та компонент концептуалізуються як еластичні прямокутні пластини. Подальші напруження і потенційне руйнування шарів паяного шва внаслідок випадкового вібраційного навантаження ретельно вивчаються, поряд з вивченням того, як проблемні параметри, такі як ширина плати і накладені граничні умови, впливають на значення напружень в паяних з'єднаннях. Результати, отримані в результаті аналітичного розв'язку, показують, що напруження припою, викликані випадковими вібраціями, зменшуються в більш коротких з'єднаннях, що підвищує їх надійність. Результати даного дослідження підтверджують результати, отримані за допомогою скінченно-елементного моделювання, тим самим підтверджуючи аналітичний підхід.

#### **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується стаття.**

У практиці випробувань виробів на віброуючих основах, а також під час експлуатації мають місце випадки руйнування окремих елементів конструкцій та/або компонентів електронної апаратури. Вимірювання вібрацій у виробів в місцях, де розташовані ці елементи показують, що на деяких частотах збудження амплітуди вібрацій цих елементів, віброшвидкості або віброприскорення (віброперевантаження) в десятки разів перевищують аналогічні параметри вібрацій, вимірювані на столі вібростенда, або на віброуючій основі при експлуатації. Хоча у випробуваннях малося на увазі, що вібрації всього випробуваного виробу і його елементів були рівні вібраціям, вимірним на столі вібростенда. Проте все набагато складніше і вимагає розвитку підходу до вібраційного захисту електронної апаратури за рахунок застосування комплексного математичного моделювання вільних і кінематично-збуджуваних коливань друкованих плат.

#### **Формулювання цілей статті**

Метою статті є проведення комплексного математичного моделювання динамічних процесів у механічній системі друкованої плати, яке включає розрахунок власних частот і форм коливань плати, а також визначення амплітудно-частотних характеристик кінематично-збуджуваних коливань системи.

Вибір балки, як тіла, що моделює друковану плату, пояснюється припущенням про те, що циліндричний згин плати можна розглядати як згин балки (смуги) прямокутного перетину в одній площині коливань, чому сприяють умови закріплення плати в двох паралельних напрямках корпусу несівної конструкції. Слід зазначити, що таке представлення відрізняється від заміни згину пластин (друкованої плати) згином безлічі балок-смуг прямокутного перетину, подумки вирізаних із пластини в поздовжньому напрямку, оскільки жорсткість пластини, в такому випадку, в цілому зменшується (прогини збільшуються). В наслідок ефекту Пуассона перерізи балок-смуг будуть деформуватись так, як це було б неможливо в суцільній пластині без порушення її цілісності. Ця стисненість деформації матеріалу в пластині і є причиною підвищеної жорсткості пластини у порівнянні із вирізаними з неї балками-смугами.

Застосування методу скінченних елементів для моделювання напружено-деформованого стану і коливальних процесів у друкованій платі дозволило теоретично обґрунтувати застосування розрахункової моделі друкованої плати у вигляді багатопрогової балки із зосередженими та розподіленими масами, шарнірно-закріпленої на кінцях, що дало можливість істотно спростити динамічний аналіз механічної системи.

#### **1 Дискретна математична модель вільних коливань друкованої плати**

Розглянемо вільні коливання друкованої плати з шарнірно закріпленими торцями, розрахункова схема якої подана у вигляді балки, встановленої на шарнірних опорах (рис. 1), де  $l$  – ширина плати;  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – маси електронних компонентів, визначені з урахуванням зведених мас основи плати;  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – горизонтальні координати центрів мас електронних компонентів, що відраховуються від опори А у напрямі осі  $x$ ;  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – вертикальні переміщення центрів мас електронних компонентів;  $R_A, R_B$  – реакції опор плати.

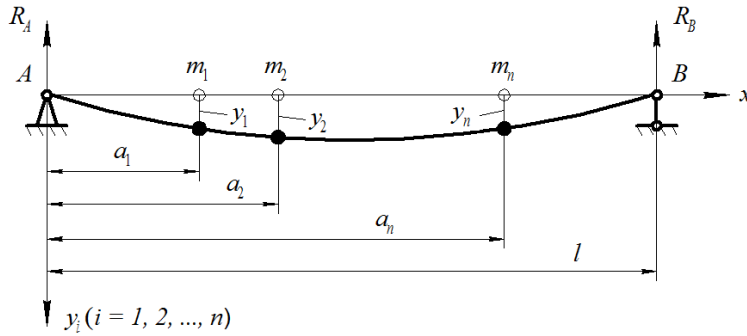


Рис. 1. Розрахункова схема друкованої плати для визначення власних частот і форм коливань

Запишемо рівняння динамічної рівноваги механічної системи плати в оберненій формі:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1\delta_{11}\ddot{y}_1 - m_2\delta_{12}\ddot{y}_2 - \dots - m_n\delta_{1n}\ddot{y}_n; \\ y_2 &= -m_1\delta_{21}\ddot{y}_1 - m_2\delta_{22}\ddot{y}_2 - \dots - m_n\delta_{2n}\ddot{y}_n; \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= -m_1\delta_{n1}\ddot{y}_1 - m_2\delta_{n2}\ddot{y}_2 - \dots - m_n\delta_{nn}\ddot{y}_n. \end{aligned} \quad (1)$$

У випадку вільних коливань переміщення матеріальних тіл системи описуються гармонічними функціями:

$$y_i = Y_i \sin(\omega t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Підставляючи вирази (2) до рівнянь (1), одержуємо

$$\begin{aligned} Y_1 &= m_1\omega^2\delta_{11}Y_1 + m_2\omega^2\delta_{12}Y_2 + \dots + m_n\omega^2\delta_{1n}Y_n; \\ Y_2 &= m_1\omega^2\delta_{21}Y_1 + m_2\omega^2\delta_{22}Y_2 + \dots + m_n\omega^2\delta_{2n}Y_n; \\ &\dots\dots\dots \\ Y_n &= m_1\omega^2\delta_{n1}Y_1 + m_2\omega^2\delta_{n2}Y_2 + \dots + m_n\omega^2\delta_{nn}Y_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут  $\delta_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ) – коефіцієнти впливу, які визначаємо шляхом обчислення інтегралів Мора:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M_i(x)M_j(x)dx, \quad (4)$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду матеріалу основи плати;  $I_z$  – момент інерції поперечного перерізу основи плати у вертикальній площині, паралельній до її шарнірно закріплених торців;  $M_i(x), M_j(x)$  – згинальні моменти у поперечних перерізах основи плати, спричинені дією одиничних сил, прикладених у точках закріплення  $i$ -го та  $j$ -го електронних компонентів.

Значення згинального моменту  $M_i(x)$  знаходимо як:

$$M_i(x) = R_{Ai} \cdot x, \text{ якщо } 0 \leq x \leq a_i; \quad M_i(x) = R_{Bi} \cdot (l - x), \text{ якщо } a_i \leq x \leq l, \quad (5)$$

причому,

$$R_{Ai} = \frac{l-a_i}{l}; \quad R_{Bi} = \frac{a_i}{l}. \quad (6)$$

Згинальний момент  $M_j(x)$  знаходимо аналогічно, тобто:

$$M_j(x) = R_{Aj} \cdot x, \text{ якщо } 0 \leq x \leq a_j; \quad M_j(x) = R_{Bj} \cdot (l - x), \text{ якщо } a_j \leq x \leq l, \quad (7)$$

причому,

$$R_{Aj} = \frac{l-a_j}{l}; \quad R_{Bj} = \frac{a_j}{l}. \quad (8)$$

Запишемо однорідну систему алгебричних рівнянь (3) у вигляді:

$$\begin{aligned} (m_1\delta_{11} - \lambda)Y_1 + m_2\delta_{12}Y_2 + \dots + m_n\delta_{1n}Y_n &= 0; \\ m_1\delta_{21}Y_1 + (m_2\delta_{22} - \lambda)Y_2 + \dots + m_n\delta_{2n}Y_n &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ m_1\delta_{n1}Y_1 + m_2\delta_{n2}Y_2 + \dots + (m_n\delta_{nn} - \lambda)Y_n &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

де:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}. \quad (10)$$

Зведемо систему рівнянь (9) до матричної форми:

$$\Delta \cdot M - E \cdot \lambda = 0, \quad (11)$$

де  $\Delta, M, E$  – квадратні матриці розмірності  $n \times n$ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обчислення  $n$  дійсних значень параметра  $\lambda$  зводиться до розв’язання задачі на власні числа для квадратної матриці, що дорівнює  $\Delta \cdot M$ . Далі, відповідно до формули (10) знаходимо циклічні власні частоти ( $k = 1, 2, \dots, n$ )  $\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}$  і технічні власні частоти  $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ .

Для кожної із власних частот механічної системи із системи рівнянь (9) визначаємо власні форми коливань у вигляді обчислених з точністю до сталого множника амплітуд коливань механічної системи.

**2 Дискретна математична модель кінематично збуджуваних коливань друкованої плати**

Розглянемо вимушені кінематично збуджувані коливання друкованої плати, зображеної на рис. 2. У даному випадку повні вертикальні переміщення електронних компонентів плати  $y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{sn}$  складаються з переміщення основи  $y_0$  і відносних переміщень компонентів  $y_1, y_2, \dots, y_n$  щодо основи.

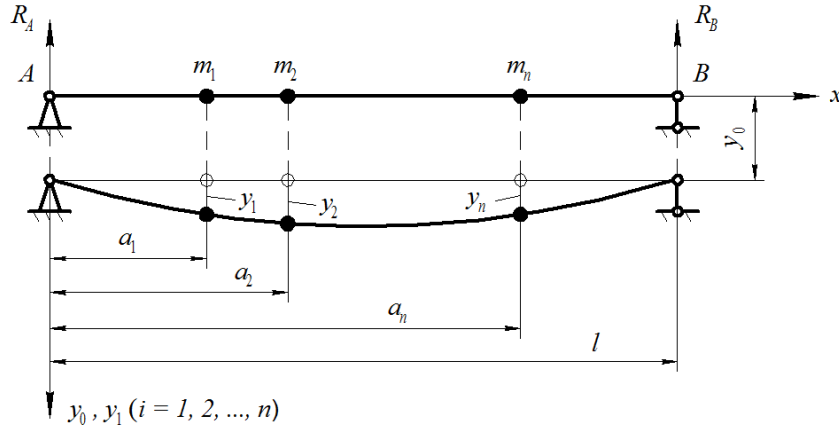


Рис. 2. Розрахункова схема друкованої плати для визначення амплітуд кінематично збуджуваних коливань друкованої плати

Покладемо, що рух основи описується гармонічною функцією:

$$y_0(t) = Y_0 \sin \omega t. \tag{12}$$

Тоді відносні переміщення електронних компонентів щодо основи плати будемо відшукувати у вигляді:

$$y_i(t) = Y_i \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{13}$$

а їх основні переміщення набувають виду:

$$y_{Si}(t) = Y_{Si} \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{14}$$

причому,

$$Y_{Si} = Y_0 + Y_i. \tag{15}$$

Рівняння динамічної рівноваги електронних компонентів запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \delta_{11} \ddot{y}_{s1} - m_2 \delta_{12} \ddot{y}_{s2} - \dots - m_n \delta_{1n} \ddot{y}_{sn}; \\ y_2 &= -m_1 \delta_{21} \ddot{y}_{s1} - m_2 \delta_{22} \ddot{y}_{s2} - \dots - m_n \delta_{2n} \ddot{y}_{sn}; \\ &\dots \\ y_n &= -m_1 \delta_{n1} \ddot{y}_{s1} - m_2 \delta_{n2} \ddot{y}_{s2} - \dots - m_n \delta_{nn} \ddot{y}_{sn}. \end{aligned} \tag{16}$$

З урахуванням (12)-(16) зводимо систему диференціальних рівнянь до системи алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} Y_1 &= m_1 \omega^2 \delta_{11} Y_1 + m_2 \omega^2 \delta_{12} Y_2 + \dots + m_n \omega^2 \delta_{1n} Y_n + (m_1 \omega^2 \delta_{11} + m_2 \omega^2 \delta_{12} + \dots + m_n \omega^2 \delta_{1n}) Y_0; \\ Y_2 &= m_1 \omega^2 \delta_{21} Y_1 + m_2 \omega^2 \delta_{22} Y_2 + \dots + m_n \omega^2 \delta_{2n} Y_n + (m_1 \omega^2 \delta_{21} + m_2 \omega^2 \delta_{22} + \dots + m_n \omega^2 \delta_{2n}) Y_0; \\ &\dots \\ Y_n &= m_1 \omega^2 \delta_{n1} Y_1 + m_2 \omega^2 \delta_{n2} Y_2 + \dots + m_n \omega^2 \delta_{nn} Y_n + (m_1 \omega^2 \delta_{n1} + m_2 \omega^2 \delta_{n2} + \dots + m_n \omega^2 \delta_{nn}) Y_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Перетворюючи неоднорідну систему алгебричних рівнянь (16) до канонічної форми, одержуємо:

$$\begin{aligned} (m_1 \delta_{11} - \lambda) Y_1 + m_2 \delta_{12} Y_2 + \dots + m_n \delta_{1n} Y_n &= -(m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{12} + \dots + m_n \delta_{1n}) Y_0; \\ m_1 \delta_{21} Y_1 + (m_2 \delta_{22} - \lambda) Y_2 + \dots + m_n \delta_{2n} Y_n &= -(m_1 \delta_{21} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{2n}) Y_0; \\ &\dots \\ m_1 \delta_{n1} Y_1 + m_2 \delta_{n2} Y_2 + \dots + (m_n \delta_{nn} - \lambda) Y_n &= -(m_1 \delta_{n1} + m_2 \delta_{n2} + \dots + m_n \delta_{nn}) Y_0, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}. \tag{19}$$

Подаючи систему рівнянь (17) у матричній формі, одержуємо:

$$(\Delta \cdot M - E \cdot \lambda) Y = \Delta \cdot m \cdot Y_0, \tag{20}$$

причому, квадратні матриці  $\Delta, M, E$  зберігають форму (11), матриця-стовпець – форму (13), а матриця-стовпець  $m$  має вигляд:

$$m = \text{col}(m_1, m_2, \dots, m_n). \tag{21}$$

Отже, знаходження амплітуд відносних коливань електронних компонентів друкованої плати щодо опор основи зводиться до числового розв'язання системи алгебричних рівнянь (18) за відомих геометричних параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  та  $l$ ; коефіцієнтів впливу  $\delta_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ); амплітуди  $Y_0$  і частоти коливань основи.

**3 Континуально-дискретна математична модель вільних коливань друкованої плати**

Для уточнення результатів модального аналізу друкованої плати із застосуванням дискретної математичної моделі механічної системи розглянемо більш точну, континуально-дискретну модель цієї системи. Розрахункову схему основи друкованої плати у вигляді прямокутної платини з шарнірно закріпленими паралельними краями будемо розглядати як балку, встановлену на двох шарнірних опорах (рис. 3). Електронні компоненти, закріплені на основі, подаємо у вигляді точкових тіл масами  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  і центральними моментами

інерції  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ . Центри мас електронних компонентів ділять балку (модель основи) на відрізки (прогони) довжинами  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , що є проєкціями відрізків, які сполучають центри мас електронних компонентів, на площину, перпендикулярну до шарнірно закріплених країв основи плати. Напружено-деформований стан прогонів балки розглядаємо у координатних системах  $x_i, w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) з початками у центрах лівих крайніх поперечних перерізів відповідних прогонів, причому,  $w_i(x_i, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – прогини балки.

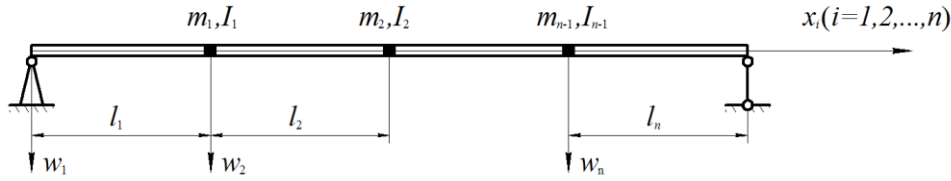


Рис. 3. Розрахункова схема аналізу вільних поперечних коливань друкованої плати

Рівняння поперечних коливань прогонів основи друкованої плати запишемо із застосуванням технічної теорії згину у вигляді:

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial \xi_i^4} + \frac{\mu_i l_i^4}{E I_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу основи друкованої плати;  $I_i, \mu_i$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу і погонна маса прогону плати;  $\xi_i = x_i / l_i$  – відносна поздовжня координата прогону;  $t$  – час.

Кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і поперечна сила на  $i$ -му прогоні плати визначаються залежностями

$$\phi_i = \frac{1}{l_i} \frac{\partial w_i}{\partial \xi_i}; \quad M_i = -\frac{E I_i}{l_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2}; \quad Q_i = -\frac{E I_i}{l_i^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial \xi_i^3} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Крайові умови для лівого шарнірно опертого кінця нижнього прогону плати запишемо у вигляді:

$$w_1(0, t) = 0; \quad M_1(0, t) = 0. \quad (24)$$

Умови спряження прогонів плати виражаються співвідношеннями:

$$w_{i+1}(0, t) = w_i(1, t); \quad \phi_{i+1}(0, t) = \phi_i(1, t);$$

$$Q_{i+1}(0, t) = Q_i(1, t) + m_i \partial^2 w_i(1, t); \quad M_{i+1}(0, t) = M_i(1, t) - I_i \frac{\partial^2 \phi_i(1, t)}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (25)$$

Крайові умови для шарнірно опертого кінця  $n$ -го прогону плати мають вигляд:

$$w_n(1, t) = 0; \quad M_n(1, t) = 0. \quad (26)$$

Таким чином, аналіз вільних коливань друкованої плати зводиться до знаходження розв’язків рівнянь з частковими похідними (22), які б задовольняли крайові умови (24) – (26).

У випадку гармонічних коливань механічної системи розв’язки рівнянь (22) відшукуємо у вигляді:

$$w_i(\xi, t) = W_i(\xi_i) \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (27)$$

де  $W_i(\xi_i)$  – амплітудні функції прогинів прогонів основи плати.

Кут повороту поперечного перерізу і внутрішні силові чинники прогонів плати з урахуванням (23, 27) подаємо як:

$$\phi_i(\xi, t) = \Phi_i(\xi_i) \sin \omega t; \quad M_i(\xi, t) = M_i^*(\xi_i) \sin \omega t; \quad Q_i(\xi, t) = Q_i^*(\xi_i) \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

де  $\Phi_i(\xi_i), M_i^*(\xi_i), Q_i^*(\xi_i)$  – амплітудні функції обертального переміщення поперечного перерізу та відповідних внутрішніх силових чинників.

Розділяючи змінні в рівняннях (28) з урахуванням (27), одержуємо диференціальні рівняння амплітудних функцій

$$\frac{d^4 W_i}{d \xi_i^4} - c_i^4 W_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (29)$$

де

$$c_i^4 = \frac{\omega^2 \mu_i l_i^4}{E I_i}.$$

Відповідно до методу початкових параметрів, розв’язки рівнянь (29) подаємо у матричній формі:

$$Y_i(\xi_i) = S_i(\xi_i) Y_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (30)$$

де

$$Y_i(\xi_i) = \text{col}(W_i(\xi_i), W_i'(\xi_i), W_i''(\xi_i), W_i'''(\xi_i)), \quad S_i(\xi_i) = \begin{pmatrix} \psi_{1i}(\xi_i) & \psi_{2i}(\xi_i) & \psi_{3i}(\xi_i) & \psi_{4i}(\xi_i) \\ \psi_{1i}'(\xi_i) & \psi_{2i}'(\xi_i) & \psi_{3i}'(\xi_i) & \psi_{4i}'(\xi_i) \\ \psi_{1i}''(\xi_i) & \psi_{2i}''(\xi_i) & \psi_{3i}''(\xi_i) & \psi_{4i}''(\xi_i) \\ \psi_{1i}'''(\xi_i) & \psi_{2i}'''(\xi_i) & \psi_{3i}'''(\xi_i) & \psi_{4i}'''(\xi_i) \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тут  $\psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}, \psi_{4i}$  – фундаментальна система інтегралів рівняння (29), що визначаються за формулами:

$$\psi_{1i}(\xi_i) = \frac{1}{2} (\text{ch} c_i \xi_i + \text{cosh} c_i \xi_i), \quad \psi_{2i}(\xi_i) = \frac{1}{2} (\text{sh} c_i \xi_i + \text{sinc} c_i \xi_i),$$

$$\psi_{3i}(\xi_i) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}c_i\xi_i - \operatorname{cosh}c_i\xi_i), \quad \Psi_{4i}(\xi_i) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}c_i\xi_i - \operatorname{sinc}c_i\xi_i). \quad (32)$$

Із сумісного розгляду залежностей (23), (27), (28) одержуємо матричні рівності:

$$F_i(\xi_i) = B_{1i}Y_i(\xi_i), \quad Y_i(\xi_i) = B_{2i}F_i(\xi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (33)$$

де

$$B_{1i} = \operatorname{diag}(1, 1/l_i, -EI_i/l_i^2, -EI_i/l_i^3), \quad B_{2i} = \operatorname{diag}(1, l_i, -l_i^2/(EI_i), -l_i^3/(EI_i)); \quad (34)$$

$$F_i(\xi_i) = \operatorname{col}(W_i(\xi_i), \Phi_i(\xi_i), M_i^*(\xi_i), Q_i^*(\xi_i)). \quad (35)$$

Беручи до уваги залежності (30)–(35), запишемо матричне співвідношення:

$$F_i(\xi_i) = B_{1i}S_i(\xi_i)B_{2i}F_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

З урахуванням (27), (28) виключаємо з крайових умов (24)–(26) функції часу, після чого одержуємо:

$$F_{i+1}(0) = R_iF_i(1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (37)$$

де

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_i\omega^2 & 1 & 0 \\ -m_i\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (38)$$

$$F_1(0) = \operatorname{col}(0, \Phi_1(0), 0, Q_1^*(0)); \quad (38)$$

$$F_n(1) = \operatorname{col}(0, \Phi_n(1), 0, Q_n^*(1)). \quad (39)$$

На основі матричних співвідношень (36) і (37), а також виразів (38), (39) встановлюємо зв'язок матриць-стовпців  $F_1(0)$  і  $F_n(1)$ :

$$F_n(1) = B_{1n}S_n(1)B_{2n}[\prod_{i=n-1}^1(R_iB_{1i}S_i(1)B_{2i})]F_1(0). \quad (40)$$

Вільні коливання механічної системи аналізуємо у такій послідовності. Реакції першого і третього елементів матриці-колонки  $F_n(1)$ , що виражається співвідношенням (39), на одиничні значення другої та четвертої компонент матриці-колонки  $F_1(0)$ , яка має вигляд (38), позначаємо  $w_\phi$ ,  $w_q$ ,  $m_\phi$  та  $m_q$  відповідно. Для того, щоб третій і четвертий елементи матриці-колонки  $F_n(1)$  дорівнювали нулю, повинні задовольнятися співвідношення:

$$w_\phi\Phi_1(0) + w_qQ_1^*(0) = 0; \quad m_\phi\Phi_1(0) + m_qQ_1^*(0) = 0. \quad (41)$$

Ненульові розв'язки однорідної системи рівнянь (40) існують за умови, що її визначник дорівнює нулю. Отже, частотне рівняння механічної системи має вигляд:

$$w_\phi m_q - w_q m_\phi = 0. \quad (42)$$

Величини  $w_\phi$ ,  $w_q$ ,  $m_\phi$  та  $m_q$ , що входять до рівнянь (41), є функціями циклічної частоти коливань  $\omega$  і визначаються за допомогою матричної рівності (40). З умови (42) визначаємо власні частоти механічної системи. Форми коливань прогонів основи друкованої плати знаходимо за залежністю (36) з урахуванням співвідношень (30)–(34). Для того, щоб сформулювати матрицю-колонку  $F_1(0)$  (17), яка містить початкові параметри першого прогону плати, визначаємо з точністю до сталого множника невідомі однорідної системи рівнянь (41). Початкові параметри інших ділянок знаходимо за співвідношеннями:

$$F_i(0) = \prod_{j=i-1}^1(R_jB_{1j}S_j(1)B_{2j})F_1(0) \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (43)$$

що впливають із залежностей (36) та (37).

Розглянута методика розрахунку частот і форм вільних коливань друкованої плати ґрунтується на застосуванні методу початкових параметрів що сприяє систематизації обчислювального процесу та полегшенню числової реалізації математичної моделі за допомогою комп'ютера.

#### 4 Розрахунок форми коливань для переміщень та максимальних нормальних напружень поперечних перерізів друкованої плати на 4-х критичних частотах коливань

Конструкція друкованої плати представлена моделлю, яка схематично складається із двох частин: основи друкованої плати та встановлених на ній електронних компонентів. Основа друкованої плати представлена у вигляді балки, інерційні та пружно-дисипативні параметри якої є рівномірно розподіленими, а електронні компоненти представлені закріпленими на поверхні балки масами із розподіленими або зосередженими інерційними параметрами. Балка встановлена на двох опорах – нерухомій (з одним ступенем вільності) та рухомій (з двома ступенями вільності) шарнірних опорах, через які балка може піддаватися дії кінематичного навантаження в наслідок вертикального переміщення опор під дією зовнішнього силового навантаження. В представленій коливній системі поперечні перерізи балки здійснюють вертикальні переміщення в одній площині за рахунок деформацій тіла балки.

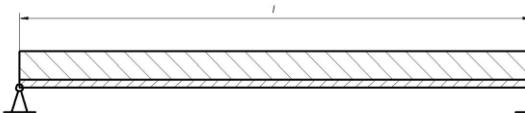
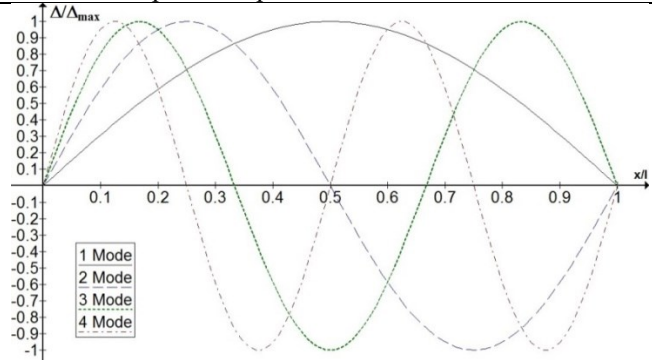
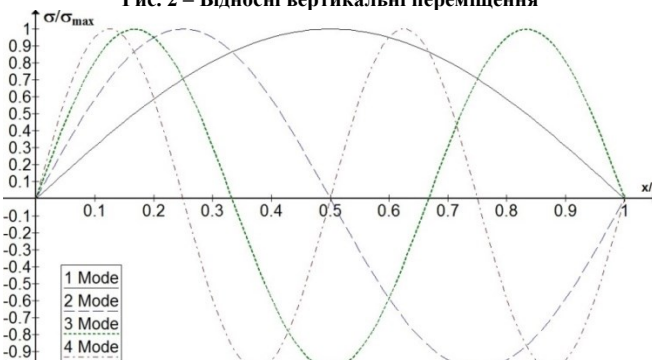
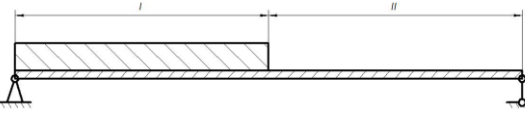
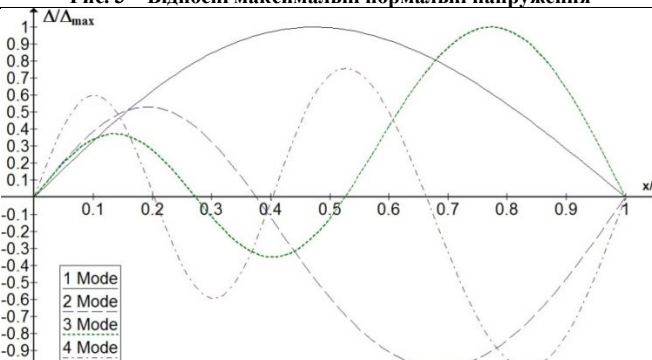

В таблиці подано 1 варіантів розташування мас електронних компонентів на поверхні балки та розраховані форми коливань для переміщень та максимальних нормальних напружень поперечних перерізів балки на 4-х критичних частотах коливань. Розрахунок форм поперечних коливань був виконаний за такими параметрами. Габаритні розміри балки:  $l = 0,18$  м – довжина;  $b = 0,05$  м – ширина;  $h = 0,0015$  м – товщина. Загальна маса коливної системи  $m = 0,2$  кг складається із маси основи друкованої плати  $m_{\text{оп}} = 0,05$  кг та маси електронних компонентів  $m_{\text{ЕК}} = 0,15$  кг, яка, в свою чергу, представлена рівномірно розподіленою масою  $m_{\text{ЕКР}}$ , або зосередженою масою  $m_{\text{ЕКЗ}}$ .  $K = 21$  – кількість точок апроксимації по довжині балки для визначення



поперечних коливань. Модуль пружності Юнга балки  $E = 14 \times 10^9 \text{ Н/м}^2$ . Площа поперечного перерізу балки  $N = 75 \times 10^{-6} \text{ м}^2$ . Осьовий момент інерції поперечного перерізу балки  $J = \frac{bh^3}{12} = 14,06 \times 10^{-12} \text{ м}^4$ .

Таблиця 1

**Розраховані форми вільних коливань моделей друківаних плат**

Параметри та схеми коливних систем	Форми поперечних вільних коливань
 <p><b>Рис. 1 – Варіант 1</b></p> <p><math>l = 0,18 \text{ м}; b = 0,05 \text{ м}; h = 0,0015 \text{ м}.</math>  <math>m_{\text{оп}} = 0,05 \text{ кг};</math>  <math>m_{\text{екр}} = 0,15 \text{ кг}.</math></p> <p>Резонансні частоти коливань:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>f_{01} = 14,44 \text{ Гц} - 1 \text{ Mode}</math> (рис. 2, 3);</li> <li>2) <math>f_{02} = 57,74 \text{ Гц} - 2 \text{ Mode}</math> (рис. 2, 3);</li> <li>3) <math>f_{03} = 129,9 \text{ Гц} - 3 \text{ Mode}</math> (рис. 2, 3);</li> <li>4) <math>f_{04} = 230,9 \text{ Гц} - 4 \text{ Mode}</math> (рис. 2, 3).</li> </ol>	 <p><b>Рис. 2 – Відносні вертикальні переміщення</b></p>  <p><b>Рис. 3 – Відносні максимальні нормальні напруження</b></p>
 <p><b>Рис. 4 – Варіант 2</b></p> <p>Ділянка I:  <math>l^I = 0,09 \text{ м}; b^I = 0,05 \text{ м}; h^I = 0,0015 \text{ м}.</math>  <math>m_{\text{оп}}^I = 0,025 \text{ кг};</math>  <math>m_{\text{екр}}^I = 0,15 \text{ кг}.</math></p> <p>Ділянка II:  <math>l^{II} = 0,09 \text{ м}; b^{II} = 0,05 \text{ м}; h^{II} = 0,0015 \text{ м}.</math>  <math>m_{\text{оп}}^{II} = 0,025 \text{ кг}.</math></p> <p>Резонансні частоти коливань:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>f_{01} = 20,12 \text{ Гц} - 1 \text{ Mode}</math> (рис. 5, 6);</li> <li>2) <math>f_{02} = 101,2 \text{ Гц} - 2 \text{ Mode}</math> (рис. 5, 6);</li> <li>3) <math>f_{03} = 208,1 \text{ Гц} - 3 \text{ Mode}</math> (рис. 5, 6);</li> <li>4) <math>f_{04} = 373,7 \text{ Гц} - 4 \text{ Mode}</math> (рис. 5, 6).</li> </ol>	 <p><b>Рис. 5 – Відносні вертикальні переміщення</b></p>  <p><b>Рис. 6 – Відносні максимальні нормальні напруження</b></p>



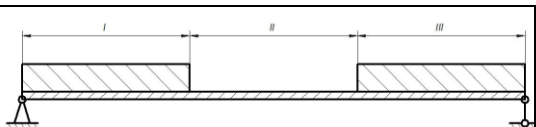


Рис. 7 – Варіант 3

Ділянка I:  
 $l^I = 0,06$  м;  $b^I = 0,05$  м;  $h^I = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^I = 0,017$  кг;  
 $m_{екр}^I = 0,075$  кг.  
 Ділянка II:  
 $l^{II} = 0,06$  м;  $b^{II} = 0,05$  м;  $h^{II} = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^{II} = 0,017$  кг.  
 Ділянка III:  
 $l^{III} = 0,06$  м;  $b^{III} = 0,05$  м;  $h^{III} = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^{III} = 0,017$  кг.  
 $m_{екр}^{III} = 0,075$  кг.

Резонансні частоти коливань:

- 1)  $f_{01} = 24,48$  Гц – 1 Mode (рис. 8, 9);
- 2)  $f_{02} = 75,69$  Гц – 2 Mode (рис. 8, 9);
- 3)  $f_{03} = 218,1$  Гц – 3 Mode (рис. 8, 9);
- 4)  $f_{04} = 345,5$  Гц – 4 Mode (рис. 8, 9).

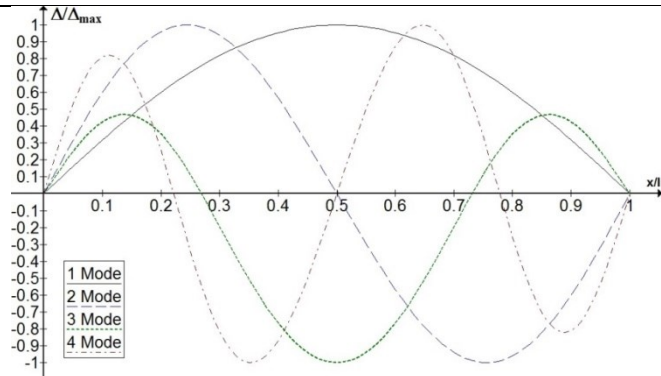


Рис. 8 – Відносні вертикальні переміщення

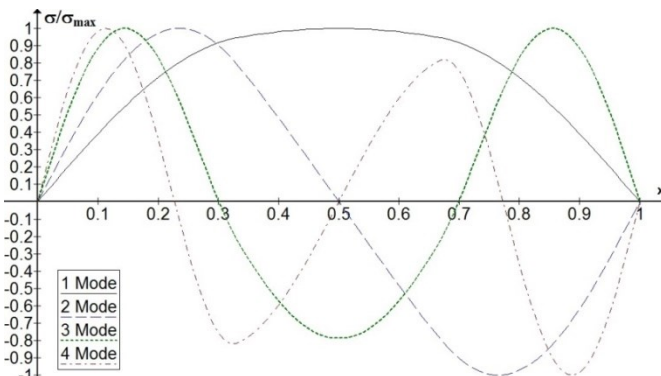


Рис. 9 – Відносні максимальні нормальні напруження

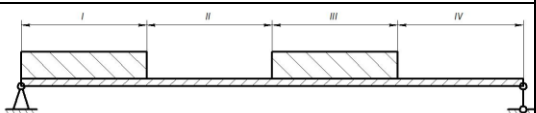


Рис. 10 – Варіант 4

Ділянка I:  
 $l^I = 0,045$  м;  $b^I = 0,05$  м;  $h^I = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^I = 0,0125$  кг;  $m_{екр}^I = 0,075$  кг.  
 Ділянка II:  
 $l^{II} = 0,045$  м;  $b^{II} = 0,05$  м;  $h^{II} = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^{II} = 0,0125$  кг.  
 Ділянка III:  
 $l^{III} = 0,045$  м;  $b^{III} = 0,05$  м;  $h^{III} = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^{III} = 0,0125$  кг.  $m_{екр}^{III} = 0,075$  кг.  
 Ділянка IV:  
 $l^{IV} = 0,045$  м;  $b^{IV} = 0,05$  м;  $h^{IV} = 0,0015$  м.  
 $m_{оп}^{IV} = 0,0125$  кг.

Резонансні частоти коливань:

- 1)  $f_{01} = 20,36$  Гц – 1 Mode (рис. 11, 12);
- 2)  $f_{02} = 81,02$  Гц – 2 Mode (рис. 11, 12);
- 3)  $f_{03} = 203,8$  Гц – 3 Mode (рис. 11, 12);
- 4)  $f_{04} = 411,1$  Гц – 4 Mode (рис. 11, 12).

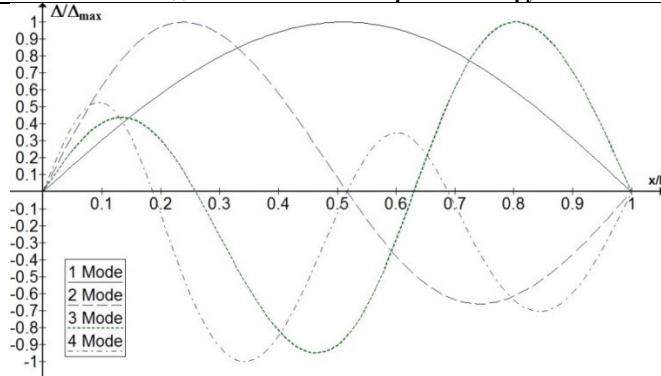


Рис. 11 – Відносні вертикальні переміщення

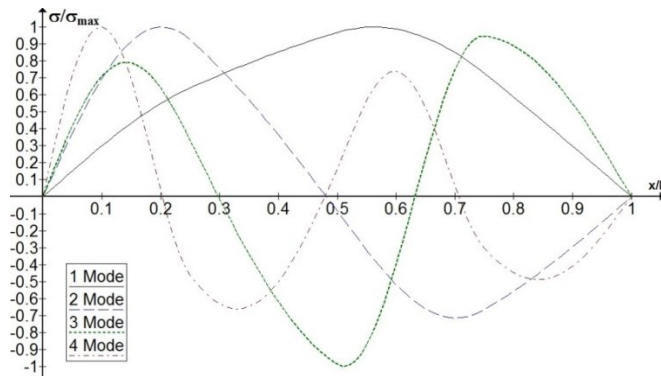


Рис. 12 – Відносні максимальні нормальні напруження

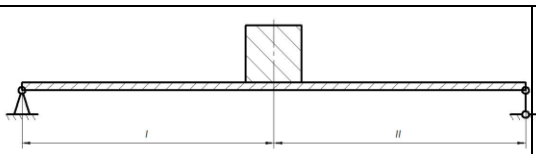


Рис. 13 – Варіант 5

$m_{\text{ЕКЗ}} = 0,15 \text{ кг.}$

$J_{\text{ЕКЗ}} = 33,3 \times 10^{-9} \text{ м}^4.$

Ділянка I:

$l^I = 0,09 \text{ м; } b^I = 0,05 \text{ м; } h^I = 0,0015 \text{ м.}$

$m_{\text{оп}}^I = 0,025 \text{ кг;}$

Ділянка II:

$l^{II} = 0,09 \text{ м; } b^{II} = 0,05 \text{ м; } h^{II} = 0,0015 \text{ м.}$

$m_{\text{оп}}^{II} = 0,025 \text{ кг.}$

Резонансні частоти коливань:

1)  $f_{01} = 15,34 \text{ Гц} - 1 \text{ Mode (рис. 14, 15);}$

2)  $f_{02} = 163,2 \text{ Гц} - 2 \text{ Mode (рис. 14, 15);}$

3)  $f_{03} = 265,2 \text{ Гц} - 3 \text{ Mode (рис. 14, 15);}$

4)  $f_{04} = 650,9 \text{ Гц} - 4 \text{ Mode (рис. 14, 15).}$

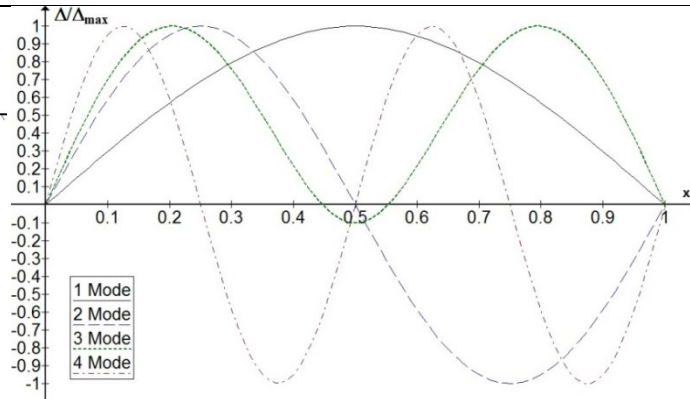


Рис. 14 – Відносні вертикальні переміщення

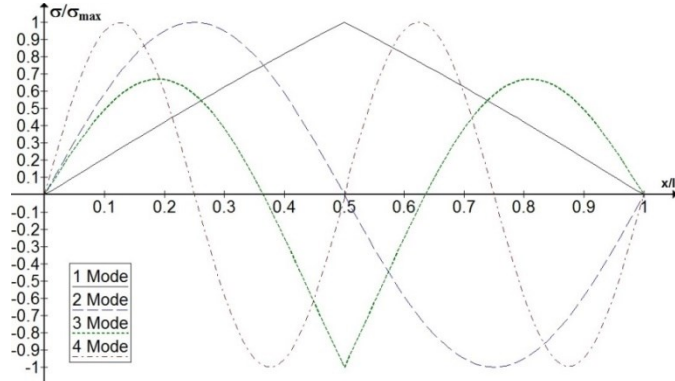


Рис. 15 – Відносні максимальні нормальні напруження

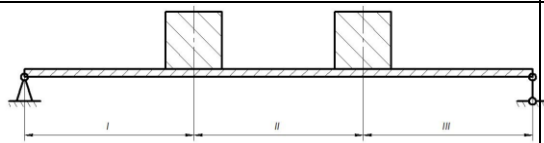


Рис. 16 – Варіант 6

$m_{\text{ЕКЗ}} = 0,075 \text{ кг.}$

$J_{\text{ЕКЗ}} = 16,65 \times 10^{-9} \text{ м}^4.$

Ділянка I:

$l^I = 0,06 \text{ м; } b^I = 0,05 \text{ м; } h^I = 0,0015 \text{ м.}$

$m_{\text{оп}}^I = 0,017 \text{ кг.}$

Ділянка II:

$l^{II} = 0,06 \text{ м; } b^{II} = 0,05 \text{ м; } h^{II} = 0,0015 \text{ м.}$

$m_{\text{оп}}^{II} = 0,017 \text{ кг.}$

Ділянка III:

$l^{III} = 0,06 \text{ м; } b^{III} = 0,05 \text{ м; } h^{III} = 0,0015 \text{ м.}$

$m_{\text{оп}}^{III} = 0,017 \text{ кг.}$

Резонансні частоти коливань:

1)  $f_{01} = 17,39 \text{ Гц} - 1 \text{ Mode (рис. 17, 18);}$

2)  $f_{02} = 68,03 \text{ Гц} - 2 \text{ Mode (рис. 17, 18);}$

3)  $f_{03} = 366,7 \text{ Гц} - 3 \text{ Mode (рис. 17, 18);}$

4)  $f_{04} = 489,5 \text{ Гц} - 4 \text{ Mode (рис. 17, 18).}$

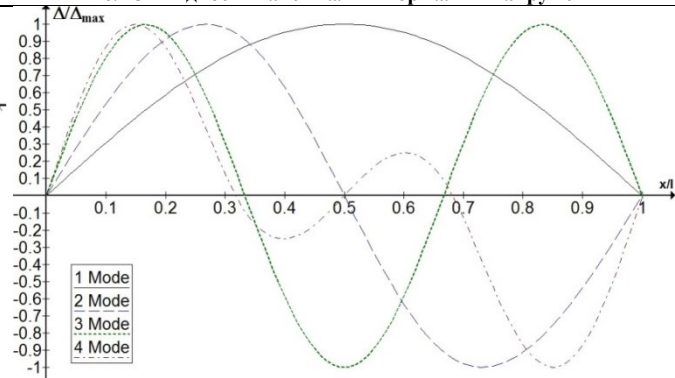


Рис. 17 – Відносні вертикальні переміщення

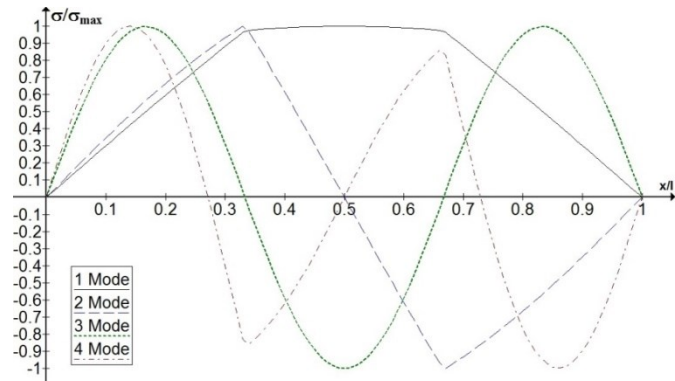


Рис. 18 – Відносні максимальні нормальні напруження

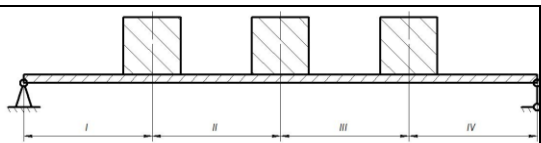


Рис. 19 – Варіант 7

$m_{ЕКЗ} = 0,05$  кг.  
 $J_{ЕКЗ} = 11,1 \times 10^{-9}$  м<sup>4</sup>.  
 Ділянка I:  
 $l^I = 0,045$  м;  $b^I = 0,05$  м;  $h^I = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^I = 0,0125$  кг;  
 Ділянка II:  
 $l^{II} = 0,045$  м;  $b^{II} = 0,05$  м;  $h^{II} = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^{II} = 0,0125$  кг.  
 Ділянка III:  
 $l^{III} = 0,045$  м;  $b^{III} = 0,05$  м;  $h^{III} = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^{III} = 0,0125$  кг.  
 Ділянка IV:  
 $l^{IV} = 0,045$  м;  $b^{IV} = 0,05$  м;  $h^{IV} = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^{IV} = 0,0125$  кг.  
 Резонансні частоти коливань:  
 1)  $f_{01} = 18,25$  Гц – 1 Mode (рис. 20, 21);  
 2)  $f_{02} = 72,67$  Гц – 2 Mode (рис. 20, 21);  
 3)  $f_{03} = 157,1$  Гц – 3 Mode (рис. 20, 21);  
 4)  $f_{04} = 650,9$  Гц – 4 Mode (рис. 20, 21).

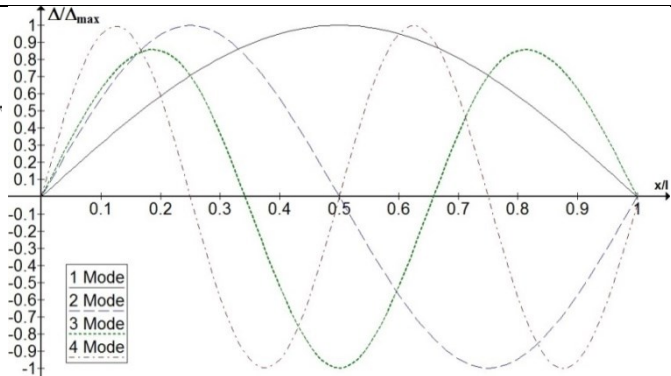


Рис. 20 – Відносні вертикальні переміщення

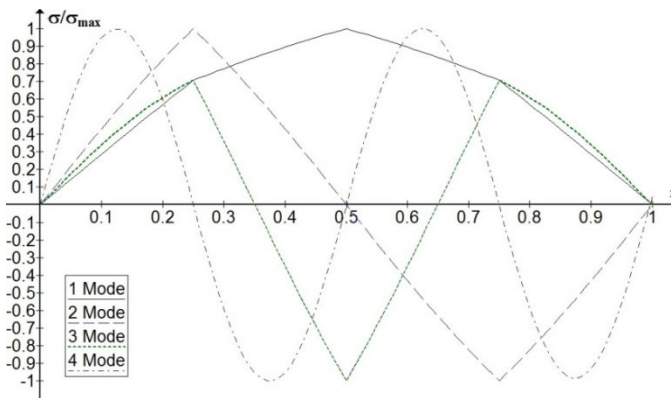


Рис. 21 – Відносні максимальні нормальні напруження

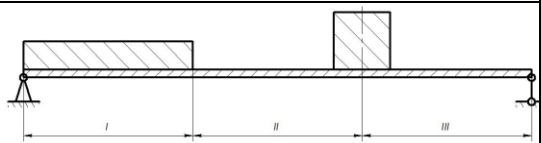


Рис. 22 – Варіант 8

$m_{ЕКЗ} = 0,075$  кг.  
 $J_{ЕКЗ} = 16,65 \times 10^{-9}$  м<sup>4</sup>.  
 Ділянка I:  
 $l^I = 0,06$  м;  $b^I = 0,05$  м;  $h^I = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^I = 0,017$  кг;  
 $m_{ЕКР}^I = 0,075$  кг.  
 Ділянка II:  
 $l^{II} = 0,06$  м;  $b^{II} = 0,05$  м;  $h^{II} = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^{II} = 0,017$  кг.  
 Ділянка III:  
 $l^{III} = 0,06$  м;  $b^{III} = 0,05$  м;  $h^{III} = 0,0015$  м.  
 $m_{ОП}^{III} = 0,017$  кг.  
 Резонансні частоти коливань:  
 1)  $f_{01} = 20,01$  Гц – 1 Mode (рис. 23, 24);  
 2)  $f_{02} = 73,26$  Гц – 2 Mode (рис. 23, 24);  
 3)  $f_{03} = 263,9$  Гц – 3 Mode (рис. 23, 24);  
 4)  $f_{04} = 437,6$  Гц – 4 Mode (рис. 23, 24).

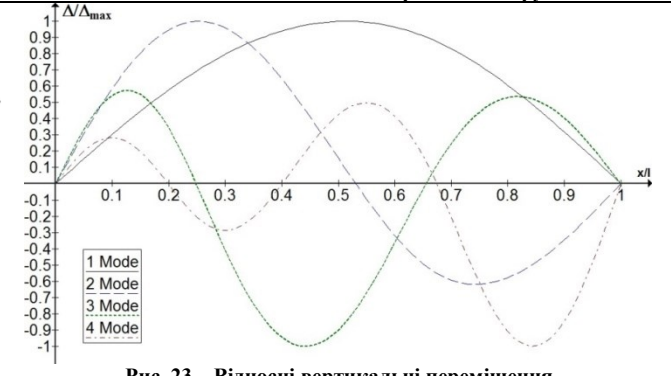


Рис. 23 – Відносні вертикальні переміщення

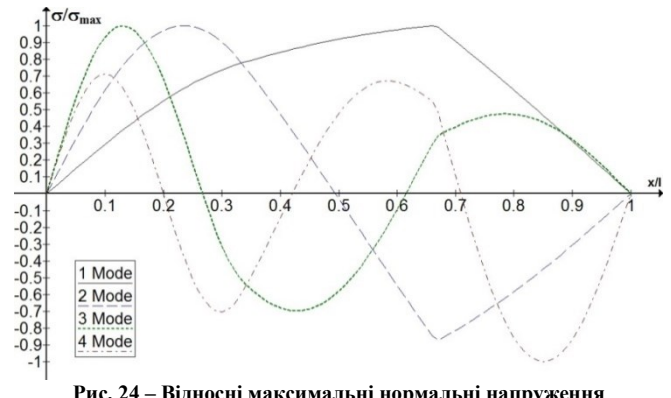
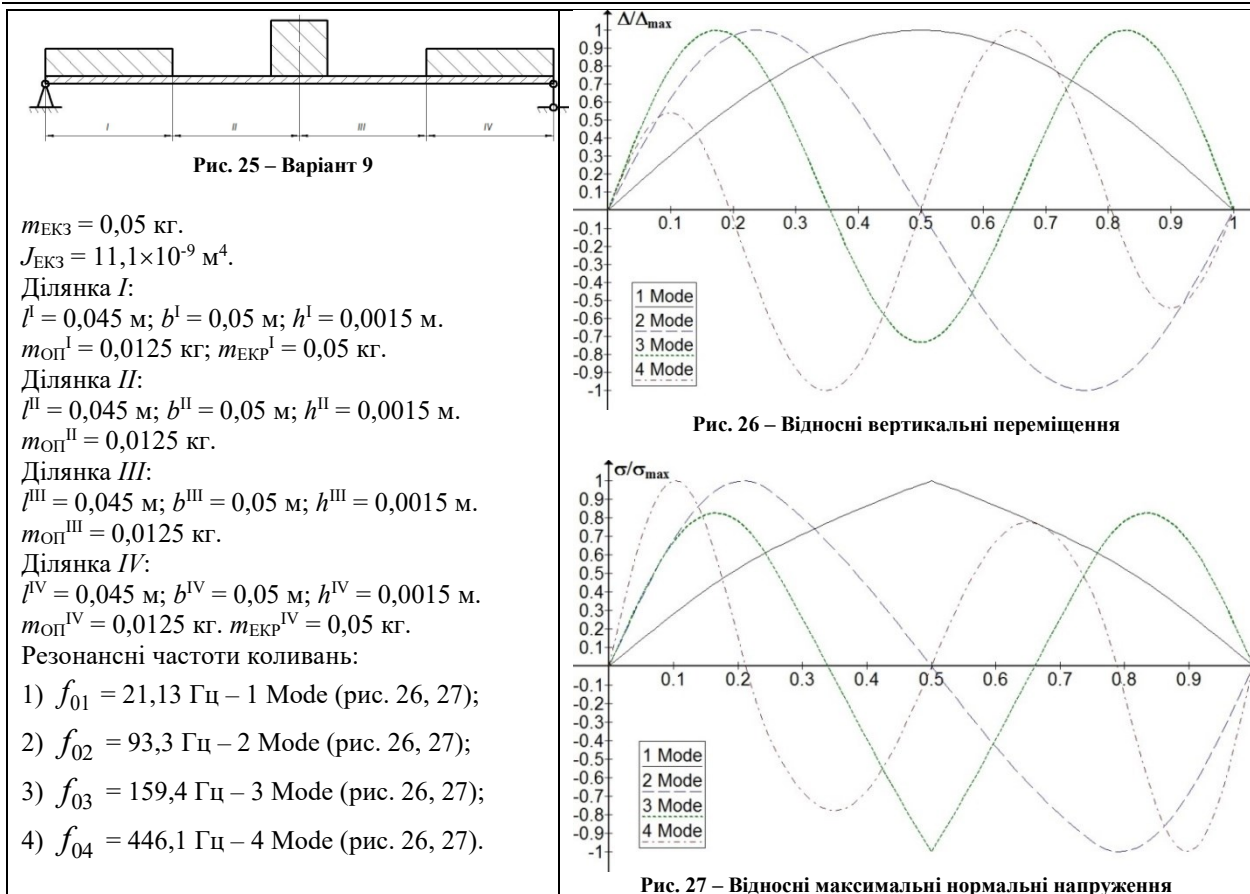


Рис. 24 – Відносні максимальні нормальні напруження



**Висновки**

Запропоновано низку дискретних і континуально-дискретних математичних моделей вільних і кінематично-збуджуваних коливань друкованої плати, із застосуванням яких проілюстровано істотний вплив вібрацій на умови експлуатації електронної апаратури.

Теоретично обґрунтовано можливість виникнення резонансних коливань друкованої плати під час експлуатації не лише на нижчій, а й на більш високих власних частотах. Усунення цих небезпечних явищ може бути здійснено лише на основі детального аналізу динамічних процесів у механічній системі плати.

**Література**

1. Steinberg Dave S. Vibration Analysis for Electronic Equipment / Dave S. Steinberg / 3rd Edition. – London: Wiley-Interscience; 2000. – p. 414.
2. Aytekin B. Vibration Analysis of a Simply Supported PCB with a Component; An Analytical Approach / B. Aytekin, H. Ozguven // 2008 10th Electronics Packaging Technology Conference (Dec. 9–12, 2008). –P. 5–16. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPTC.2008.4763589>
3. Study on vibration analysis for printed circuit board of an electronic apparatus / Weibin Tang, Jianfeng Ren, Gangying Feng, Limei Xu // 2007 International Conference on Mechatronics and Automation (Harbin, China, Aug. 5–8, 2007). – P. 855–860
4. Gharaibeh Mohammad A. An efficient equivalent static methodology for simulating electronic packages subjected to resonant vibrations / Mohammad A. Gharaibeh, James M. Pitarresi // Microelectronics Reliability. – Amsterdam ^Elsevier BV, 2023. – p. 115000
5. Understanding board level vibrations in automotive electronic modules / V. Thukral, R. Roucou, C. Chou, J. J. M. Zaal, M. van Soestbergen, R. T. H. Rongen, W. D. van Driel, G. Q. Zhang // Microelectronics Reliability. – Amsterdam Elsevier BV, 2024. – p. 115430
6. Reliability Analysis and Structural Optimization of Circuit Board Based on Vibration Mode Analysis and Random Vibration. / Jing Tian 1, Enyu Shi 1, Jiayi Zhong 1, Yushen Chen, Xiaolei Deng 1, Guohua Li // Processes, 2024/ – MDPI AG, 2024. – Vol. 8, – p. 1726
7. Bachool R. Experimental and numerical vibration analysis of printed circuit boards / R. Bachool, S. Balliram, J. Bridge // The International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology ICONETech-2020 (June 1-5, 2020). – Jamaica : The UWI, St. Augustine, 2020. – P. 719-729
8. Gharaibeh Mohammad A. Analytical solutions for electronic assemblies subjected to shock and vibration loadings / Mohammad A. Gharaibeh // Handbook of Materials Failure Analysis. – Amsterdam Elsevier Ltd. All, 2020. – P. 179-203

9. Vibration oscillations modeling for printed boards of machine control units during their operation / D. Rebot, V. Topilnytskyi, T. Stefanovych, S. Shcherbovskykh // 17th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM) (February 22-25, 2023). – Jaroslaw, Poland : IEEE, 2023. – P. 1-4.
10. Gharaibeh Mohammad A. Analytical evaluation of solder stress in electronic packages subjected to random vibrations / Mohammad A. Gharaibeh, Belal M. Y. Gharaibeh // *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. – Canada : IIETA, 2023. – Vol. 10, Iss. 4 –P. 1265-1270.

### References

1. Steinberg Dave S. *Vibration Analysis for Electronic Equipment* / Dave S. Steinberg / 3rd Edition. – London: Wiley-Interscience; 2000. – p. 414.
2. Aytakin B. Vibration Analysis of a Simply Supported PCB with a Component; An Analytical Approach / B. Aytakin, H. Ozguven // 2008 10th Electronics Packaging Technology Conference (Dec. 9–12, 2008). –P. 5–16. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPTC.2008.4763589>
3. Study on vibration analysis for printed circuit board of an electronic apparatus / Weibin Tang, Jianfeng Ren, Gangying Feng, Limei Xu // 2007 International Conference on Mechatronics and Automation (Harbin, China, Aug. 5–8, 2007). – P. 855–860
4. Gharaibeh Mohammad A. An efficient equivalent static methodology for simulating electronic packages subjected to resonant vibrations / Mohammad A. Gharaibeh, James M. Pitarresi // *Microelectronics Reliability*. – Amsterdam Elsevier BV, 2023. – p. 115000
5. Understanding board level vibrations in automotive electronic modules / V. Thukral, R. Roucou, C. Chou, J. J. M. Zaal, M. van Soestbergen, R. T. H. Rongen, W. D. van Driel, G. Q. Zhang // *Microelectronics Reliability*. – Amsterdam Elsevier BV, 2024. – p. 115430
6. Reliability Analysis and Structural Optimization of Circuit Board Based on Vibration Mode Analysis and Random Vibration. / Jing Tian 1, Enyu Shi 1, Jiayi Zhong 1, Yushen Chen, Xiaolei Deng 1, Guohua Li // *Processes*, 2024/ – MDPI AG, 2024. – Vol. 8, – p. 1726
7. Bachoo1 R. Experimental and numerical vibration analysis of printed circuit boards / R. Bachoo1, S. Balliram, J. Bridge // *The International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology IConETech-2020* (June 1-5, 2020). – Jamaica : The UWI, St. Augustine, 2020. – P. 719-729
8. Gharaibeh Mohammad A. Analytical solutions for electronic assemblies subjected to shock and vibration loadings / Mohammad A. Gharaibeh // *Handbook of Materials Failure Analysis*. – Amsterdam Elsevier Ltd. All, 2020. – P. 179-203
9. Vibration oscillations modeling for printed boards of machine control units during their operation / D. Rebot, V. Topilnytskyi, T. Stefanovych, S. Shcherbovskykh // 17th International Conference on the Experience of Designing and Application of CAD Systems (CADSM) (February 22-25, 2023). – Jaroslaw, Poland : IEEE, 2023. – P. 1-4.
10. Gharaibeh Mohammad A. Analytical evaluation of solder stress in electronic packages subjected to random vibrations / Mohammad A. Gharaibeh, Belal M. Y. Gharaibeh // *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. – Canada : IIETA, 2023. – Vol. 10, Iss. 4 –P. 1265-1270.