DOI 10.31891/2307-5732-2024-343-6-35
УДК 534.1

ПУКАЧ ПЕТРО
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-0359-50205
e-mail: petro.y.pukach@lpnu.ua
СЛЮСАРЧУК ОЛЬГА
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0003-3464-0252
e-mail: olha.z.sliusarchuk@lpnu.ua
ПУКАЧ ПАВЛО
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-0488-6828
e-mail: pavlo.p.pukach@lpnu.ua

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД У МОДЕЛЮВАННІ НЕЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОГО РУХОМОГО ОДНОВИМІРНОГО ТІЛА

Математичне моделювання коливань рухомих вздовж своєї геометричної осі систем є актуальним питанням як теоретичного плану, так й з точки зору практичних застосувань. Тому вивчення амплітудно-частотних характеристик нелінійних поперечних коливань таких систем є складним, але в той же час дуже важливим завданням. У роботі презентовано та проаналізовано певну математичну модель нелінійних поперечних коливань балки, що рухається вздовж її осі. Розглянуто моделі як для нерезонансного, так і для резонансного режимів коливань. При дослідженні використано відомі підходи та методи нелінійної механіки – асимптотичний метод інтегрування диференціальних рівнянь, метод розвинення за малим параметром, метод Фур'є. Результатом застосування вказаних підходів стало отримання системи співвідношень, які дозволяють визначити амплітудно-частотні характеристики динамічного процесу. Вказані співвідношення сформульовано у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, які можуть бути зінтегровані. Отримані у загальному вигляді математичні моделі сформульовано так, щоб вивчити як резонансні, так й нерезонансні режими коливань. Як наслідок отриманих амплітудно-частотних співвідношень стало можливим оцінити вплив різноманітних параметрів (фізико-механічних, кінематичних тощо) на коливальний процес. В свою чергу це дало можливість розв'язати задачу підбору та оптимізації параметрів для конкретних технологічних систем для уникнення різноманітних негативних руйнівних явищ під час експлуатації та небажаних режимів коливань (резонанс, биття коливань, зрив коливань). Крім того, отримані в роботі співвідношення уможливлюють дослідження впливів параметрів рухомого середовища на характер зміни частоти та амплітуди коливань, розглядати рух у точках опори середовища, вивчати спосіб кріплення опор тіла.

Практичним застосуванням отриманих у роботі результатів є отриманням відносно простих математичних моделей для визначення амплітудно-частотної характеристики відповідних конструкцій типу одновимірного тіла, які можуть бути досліджені інженерами-конструкторами. Такі математичні моделі є, з одного боку, ключовими для дослідження динаміки рухомих носіїв, а з іншого – можуть бути адекватно розраховані з точки зору інженерної практики. Як результат, отримані у цій статті залежності дозволяють проектувальникам з достатньою адекватністю та високою точністю враховувати вплив наведених у роботі характеристик та прогнозувати динамічні явища в коливальних системах типу одновимірного тіла. Крім того, при інженерних розрахунках різних механічних систем такого вигляду отримані залежності можуть бути використані для оптимізації параметрів, щоб уникнути негативних руйнівних явищ під час експлуатації.

Ключові слова – коливальний процес, асимптотичний метод, амплітудно-частотна характеристика, резонанс.

PUKACH PETRO, SLIUSARCHUK OLHA, PUKACH PAVLO
Lviv Polytechnic National University

ASYMPTOTIC METHOD IN SIMULATION OF NONLINEAR TRANSVERSE OSCILLATIONS OF AN ELASTIC MOVABLE 1D BODY

Mathematical modeling of oscillations of systems moving along their geometric axis is an urgent issue both theoretically and from the point of view of practical applications. Therefore, studying the amplitude-frequency characteristics of nonlinear transverse oscillations of such systems is a difficult, but at the same time very important task. The paper presents and analyzes a certain mathematical model of nonlinear transverse vibrations of a 1D body moving along its axis. Models for both non-resonant and resonant oscillation modes are considered. Well-known approaches and methods of nonlinear mechanics were used in the research - the asymptotic method of integration of differential equations, the method of development by a small parameter, the Fourier method. The result of applying these approaches was obtaining a system of ratios that allow determining the amplitude-frequency characteristics of the dynamic process. These relations are formulated in the form of ordinary differential equations that can be integrated. The generally obtained mathematical models are formulated in such a way as to study both resonant and non-resonant modes of oscillations. As a result of the obtained amplitude-frequency ratios, it became possible to assess the influence of various parameters (physical-mechanical, kinematic, etc.) on the oscillatory process. In turn, this made it possible to solve the problem of selecting and optimizing parameters for specific technological systems in order to avoid various negative destructive phenomena during operation and undesirable modes of oscillations (resonance, beating oscillations, disruption of oscillations). In addition, the ratios obtained in the work make it possible to study the influence of the parameters of the moving medium on the nature of the change in the frequency and amplitude of oscillations, to consider the movement at the support points of the medium, to study the method of fastening the beam supports.

The practical application of the results obtained in the work is to obtain relatively simple mathematical models for determining the amplitude-frequency characteristics of the corresponding 1D body-type structures, which can be studied by design engineers. Such mathematical models are, on the one hand, key to the study of the dynamics of moving media, and on the other hand, they can be adequately calculated from the point of view of engineering practice. As a result, the dependencies obtained in this article allow designers with sufficient adequacy and high accuracy to take into account the influence of the characteristics given in the work and to predict dynamic phenomena in oscillating 1D body-type *systems. In addition, during engineering calculations of various mechanical systems of this type, the resulting dependencies can be used to optimize parameters to avoid negative destructive phenomena during operation.*

Key words - oscillatory process, asymptotic method, amplitude-frequency characteristic, resonance.

Вступ. Формулювання задачі.
Диференціальні рівняння поперечних коливань одновимірного тіла

Математичні моделі енергетичних станів технічних об'єктів можуть бути описані лінійними та нелінійними функціональними залежностями, які необхідно враховувати при побудові таких моделей. Досвід математичного моделювання коливальних систем показує, що, моделюючи реальні фізичні об'єкти, можна розглядати нелінійні залежності як лінійні на короткому інтервалі, тобто здійснювати лінеаризацію [1-2]. При формуванні рівнянь стану об'єкта і при дослідженні математичних моделей систем, зокрема, використовуються фундаментальні методи і факти теорії ОДЗ і ПДУ [3-6]. Дослідження коливальних явищ (зокрема резонансних явищ) у динамічних системах під дією силових збурень є важливою проблемою математичного моделювання таких систем [7-10]. Такі дослідження проводяться з урахуванням ряду фізико-механічних факторів [11-14]. Існуючі методи лінійної теорії коливань не забезпечують точного аналітичного розв'язку крайових задач у відповідних математичних моделях коливань. Тому актуальною проблемою є розвиток існуючих і створення нових методів математичного моделювання, які дозволяють отримувати точні розв’язки задач математичної фізики [15, 16].

Основним недоліком усіх існуючих до теперішнього часу методів дослідження динамічних режимів коливань є громіздкість математичного апарату для інженерних розрахунків. Таким чином, актуальним є створення таких методів аналізу динаміки коливальних систем, які забезпечують можливість знаходження точних розв’язків у математичних моделях і зручні в інженерній практиці. Розв'язанню однієї з таких задач присвячена дана робота. Як приклад використано пружно-дисипативну коливальну систему, яка імітує коливання поздовжнього стержня під дією зовнішнього рухомого середовища.

Будемо розглядати одновимірну систему, яка рухається вздовж своєї осі. Для такого випадку диференціальне рівняння руху можна представити у загальному випадку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f\left(\varepsilon,x,\theta,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{1}$$

де ε – малий додатковий параметр; t – час; ω – коефіцієнт, який визначає частоту системи; $\varepsilon f\left(\varepsilon,x,\theta,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ – періодична функція щодо θ з періодом 2π, яка необмежено диференційовна по всіх кінцевих значеннях своїх аргументів; $\frac{d\theta}{dt}=\nu(t)$ – додатня функція.

Коли збурення у системі (рівнянні (1)) відсутнє, тобто $\varepsilon=0$, то отримаємо чисто гармонійне коливання $u(x,t)=aX(x)\cos(\omega t+\upsilon)$, де $\frac{d\upsilon}{dt}=\omega$, тоді $\frac{du}{dt}=-a\omega X(x)\sin(\omega t+\upsilon)$. Причому a і υ – деякі сталі (у даному випадку, коли немає збурення), тоді амплітуда буде постійною $\frac{da}{dt}=0$, з рівномірним фазовим кутом ω.

Для побудова асимптотичного розв’язку збуреної системи, у якій відбуваються одночастотні коливання необхідно виконання таких умов [7]:

1) у незбуреній системі можливі незатухаючі гармонічні коливання з частотою $\omega_1(\tau)$, яка залежить тільки від двох вільних сталих;
2) єдиним розв’язком рівняння незбуреної системи є тривіальний, тобто $\varepsilon f\left(\varepsilon,x,\theta,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0$;
3) у незбуреній системі відсутні внутрішні резонанси, тобто $\omega_1(\tau)\neq\omega_k(\tau)$, $(k=2,3,\dots,N)$;
4) початкові умови забезпечують існування одночастотного режиму коливань, тобто $u|_{t=0}=pX_i(x)$, $u|_{x=0}=qX_i(x)$.

При таких припущеннях розв’язок рівняння збуреної системи шукаємо у вигляді

$$u(x,\ t)=a(t)X(x)\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\theta,\psi,x)+\varepsilon^2u_2(a,\theta,\psi,x) \tag{2}$$

де $a(t)$ – амплітуда одночастотних коливань; $u_1(a,\theta,\psi,x)$, $u_2(a,\theta,\psi,x)$ – періодичні функції по змінних ψ та θ з періодом 2π; $X(x)$ – функція, яка визначає форму коливань. Величини a та ψу співвідношенні (2), як функції часу, визначають із системи диференціальних рівнянь для резонансного випадку [11]:

$$\begin{cases}\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a,\varphi)+\varepsilon^2A_2(a,\varphi)+\dots\\ \frac{d\psi}{dt}=\omega-\nu+\varepsilon B_1(a,\varphi)+\varepsilon^2B_2(a,\varphi)+\dots\end{cases}. \tag{3}$$

Як відомо з [16], практичне застосування цього методу визначають не властивостями збіжності рядів у правих частинах (3). Для того щоб розв’язати таку задачу (для першого наближення) необхідно знайти функції $u_1(a,\theta,\psi,x)$, $A_1(a,\varphi)$, $B_1(a,\varphi)$. Побудова асимптотичних рядів (3) не містить принципових труднощів, проте тільки для перших членів ряду. У нелінійних системах не можна застосовувати принцип суперпозиції, тому не можна побудувати загальний розв’язок, виходячи з різних частинних розв’язків. У деяких випадках, сімейство частинних розв’язків має властивості сильної стійкості і тоді дослідження має сенс. Продиференціюємо рівняння (2) і отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon A_1(a,\varphi)\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi-a\sin\frac{k\pi}{l}x(\sin\psi\,(\omega+B_1(a,\varphi)))+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}(\omega+B_1(a,\varphi))+\nu\frac{\partial u_1}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\omega^2\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi-2\varepsilon aA_1(a,\varphi)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\psi-2a\omega B_1(a,\varphi)\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+$$

$$+\varepsilon\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+\nu^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+2\omega\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial\nu},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x}+\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\ldots.$$

Підставимо вирази $u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ у ліві та праві частини рівняння (1) та розкладемо праві частини у ряд Тейлора за зростаючими степенями ε. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо рівняння для визначення $u_1(a,\psi,\mu t)$, $A_1(a,\varphi)$, $B_1(a,\varphi)$:

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+2\omega\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi\partial\theta}+\nu^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+\omega^2 u_1=f_0(\tau,a,\theta,\psi)-\left(\omega-\nu\frac{\partial A_1(a,\varphi)}{\partial\varphi}-2a\omega B_1(a,\varphi)\right)\cos\psi-$$

$$-\left(a(\omega-\nu)\frac{\partial B_1(a,\varphi)}{\partial\varphi}+2\omega A_1(a,\varphi)\right)\sin\psi\equiv G(\tau,a,\theta,\psi)\ (4)$$

з крайовими умовами

$$u(x,\ t)|_{x=0}=u(x,\ t)|_{x=1}=0.$$

Як видно, функції $f_0(\tau,a,\theta,\psi)$ та $G(\tau,a,\theta,\psi)$ є 2π-періодичними по двох аргументах ψ,θ. Для знаходження невідомих функцій достатньо знайти частинні розв'язки рівняння (4), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Праву частину рівняння (4) розкладемо у подвійний ряд Фур'є:

$$G(\tau,a,\theta,\psi)=\sum_m g_{nm}^{(0)}(a)e^{i(n\mu t+m\psi)},\qquad(5)$$

де $g_{nm}^{(0)}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\tau,a,\theta,\psi)e^{-i(n\mu t+m\psi)}d\theta d\psi.$

Представимо $u_1(a,x,\psi,\theta)$ у вигляді ряду Фур'є

$$u_1(a,x,\psi,\theta)=\sum_m u_{nm}^{(0)}(a,x)e^{i(n\theta+m\psi)}.\qquad(6)$$

Підставляючи у рівняння (4) значення (5) та (6) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових гармоніках, отримаємо алгебраїчне рівняння щодо невідомих коефіцієнтів Фур'є $u_{nm}^{(0)}(a)$. Останнє легко визначити через відомі коефіцієнти Фур'є (13) функції $G(\tau,a,\theta,\psi)$, скориставшись умовами ортогональності нормальних функцій. Після ряду перетворень отримаємо

$$u_{nm}^{(0)}(a)=\sum_m\frac{\sum_{j=1}^{N}g_{nm}^{(j0)}}{(\omega^2-(m\omega+n\nu)^2)}(a).$$

$$A_1(a,\varphi)=-\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\psi\,dxd\psi$$

$$B_1(a,\varphi)=-\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2 a}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\cos\psi\,dxd\psi$$

Метод дослідження у випадку малої швидкості руху і однорідних крайових умов

У даному розділі для поперечних коливань рухомого канату досліджується вплив: нелінійно-пружних характеристик матеріалу канату, зовнішніх періодичних збурень, швидкості їх руху на АФХ динамічного процесу. В основу досліджень покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами, асимптотичний метод побудови розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо поперечні коливання канату, який рухається вздовж недеформованої осі з постійною швидкістю. Будемо вважати: а) матеріал канату задовольняє близькому до лінійного закону пружності; б) на канат діють зовнішні періодичні збурення; в) канат рухається вздовж своєї геометричної осі із сталою швидкістю.

Для опису поперечних коливань за координатну вісь ми приймемо прямолінійну вісь x і від неї будемо відраховувати відхилення елементів балки при поперечних коливаннях. Нехай відхилення окремих точок осі канату проходять перпендикулярно до прямолінійного, недеформованого її напрямку, ігноруючи при цьому зміщення цих точок паралельними осі; відхилення точок осі канату для поперечних коливаннях відбуваються в одній площинні ("площина коливань"). За таких припущень відхилення точок осі канату при поперечних коливаннях однозначно визначаються однією функцією двох змінних – координати x і часу t, тобто $u=u(x,t)$. Позначимо через $m(x)$ масу одиниці довжини канату, через EJ – жорсткість на згин (E – модуль пружності, J – момент інерції поперечного перерізу канату щодо нейтральної осі перерізу, яка перпендикулярна до площини коливань). Тоді диференціальне рівняння поперечних коливань канату у загальному випадку має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f\left(x,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\qquad(7)$$

і крайовими умовами

$$u(x,\ t)|_{x=0}=u(x,\ t)|_{x=1}=0,\qquad(8)$$

де α – деяка стала, $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Для правої частини рівняння (7) і крайових умов (8) припускаємо, що вони є цілими раціональними функціями відносно u і її часткових похідних, а по ε – аналітичними функціями при достатньо малих значеннях параметру. Рівняння цього виду матиме такий вигляд, якщо кінці канату будуть нерухомо закріплені. Крім того, припустимо, що початкові умови матимуть вигляд:

$$u(x,0)=T(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=P(x).$$

Згідно методу Фур'є розв'язок шукаємо у вигляді добутку

$$u(x,t)=X_n(x)T_n(\psi,\theta)+\varepsilon u_1(a,\psi,\theta,x)+\ldots.$$

Отримаємо звичайні диференціальні рівняння, з яких можна знайти $T_n(\psi,\theta)=a_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)$, яка визначає форму власних коливань і містить у собі сталі a_n, φ_n. Спочатку розглянемо незбурену крайову задачу, яку отримаємо із (7) при $\varepsilon=0$, тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Використовуючи метод теорії збурення, формальний розв'язок розглянутої задачі шукаємо у вигляді ряду

$$x=u_0(x,t)+\varepsilon u_1(x,t)+\varepsilon^2 u_2(x,t)+\ldots,$$

де функції $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ періодичні з періодом 2π.

Резонансний та нерезонансний випадки

На відміну від лінійного випадку параметри a і ψ будуть змінними і у (23) будуть враховувати вплив нелінійних сил, а також рух середовища на АФХ динамічного процесу. Закони зміни останніх будемо задавати диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+\ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+\ldots,$$

причому $A(a)$ і $B(a)$ знаходять таким чином, щоб рівняння (3) з необхідним степенем точності.

Отже, задача побудови наближеного розв'язку рівняння полягає у знаходженні функцій $A(a)$, $B(a)$ та $u_1(a,\psi,x)$, $u_2(a,\psi,x)$. Для цього продиференціюємо останні залежності, отримаємо для першого наближення :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon A_1(a)\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi-a\sin\frac{k\pi}{l}x(\sin\psi\,(\omega+B_1(a)))+\frac{\partial u_1}{\partial\psi}(\omega+B_1(a)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\omega^2\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi-2\varepsilon aA_1(a)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\psi-2a\omega B_1(a)\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+\varepsilon\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} \tag{9}$$

Враховуючи рівняння (9), запишемо загальне представлення для першого наближення

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2}+\alpha^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=2a\omega A_1(a)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\psi+2a\omega B_1(a)\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+$$
$$+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2V^2a\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi+2\frac{k\pi}{l}Va\omega\cos\frac{k\pi}{l}x\sin\psi+F(a,\psi,x,\theta).$$

Тоді $F(a,\psi,x,\theta)$ для нерезонансного випадку приймає вигляд:

$$F(a,\psi,x,\theta)=f\left(a\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi,\ a\frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\psi,\ \theta\right).$$

Для однозначного визначення невідомих функцій $A_1(a)$ і $B_1(a)$ накладемо, як і в [16], на $u_1(a,\psi,\theta,x)$ додаткову умову – умову відсутності у її розкладі доданків пропорційних $\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\psi$ [16]. Отримаємо

$$A_1(a)=-\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\psi\,dxd\psi,$$

$$B_1(a)=-\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2 a}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\cos\psi\,dxd\psi.$$

У першому наближенні АЧХ динамічного процесу у рехонансному випадку визначається залежностями

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\sin\psi\,dxd\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2V^2+\varepsilon\frac{1}{p}\frac{1}{4\omega\pi^2 a}\int_0^l\int_0^{2\pi}F(a,x,\psi,\theta)\sin\frac{\pi}{l}x\cos\psi\,dxd\psi.$$

Висновки

Коливальний процес пружного поздовжнього одновимірного тіла типу бруса з відомими значеннями положення під дією рухомого середовища моделюється змішаною задачею для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку. Розроблена та досліджена математична модель. Запропоновано асимптотичний метод нелінійної механіки для побудови розв'язку у вказаній математичній моделі та визначення параметрів для різних режимів коливань.

Основним практичним застосуванням отриманих результатів у роботі є розширення спектру математичних моделей коливальних систем, динамічні процеси в яких можна описати точними аналітичними розв'язками відповідних крайових задач. Асимптотичні підходи дозволяють проводити детальний аналіз динамічних явищ у відповідних технологічних системах на етапі проектування та синтезу їх параметрів.

Література

1. E. B. Magrab, Vibrations of Elastic Systems with Applications to MEMS and NEMS, New York, Springer, 2012.

2. Y. Yu, and Z. Mi "Dynamic Modeling and Control of Electromechanical Coupling for Mechanical Elastic Energy Storage System", J. Appl. Math., vol. 2013, pp. 1-11.

3. W. W. Symes, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Rice University, 2012.

4. S. P. Lavrenyuk and P. Ya. Pukach, "Mixed problem for a nonlinear hyperbolic equation in a domain unbounded with respect to space variables", Ukr. Math. Journal, vol. 59, No. 11, pp. 1708–1718, 2007.

5. Y. Wang, and Y. Wang, "On the initial-boundary problem for fourth order wave equations with damping, strain and source terms", J. Math. Analysis and Appl., vol. 405, No. 1, pp. 116-127.

6. T. Matsuyama, and R. Ikehata, "On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms", J. Math. Anal. Appl, vol. 204, pp. 729-753, 1996.

7. D. I. G. Jones, Handbook of viscoelastic vibration damping, John Willey & Sons Ltd, 2001.

8. L. Beghin, E. Orsingher, and L. Sakhno, "Equations of Mathematical Physics and Compositions of Brownian and Cauchy processes", Stochastic Analysis and Appl. vol. 29, No. 4, pp. 551-569, 2011.

9. L-Q. Chen, N-H. Zhang, and J. W. Zu, "Bifurcation and chaos of an axially moving viscoelastic string", Mech. Res. Commun., vol. 29, pp. 81-90, 2002.

10. Z. Sobotka, Theory of plasticity and limit design of plates, Elsevier, 1989.

11. T. I. Fossen, and H. Nijmeijer, Parametric Resonance in Dynamical Systems, New York, Springer, 2012.

12. A. Zahedi, and V. Babitsky, "Modeling of autoresonant control of a parametrically excited screen machine", J. Sound and Vibration, vol. 380, pp. 78-89.

13. N. Berglund, Perturbation theory of dynamical systems, DEA ETH Zurich, 2007.

14. H. Verdejo, W. Kliemann, and L. Vargas, "Performance of Power Systems under Sustained Random Perturbations", Math. Problems in Engineering, vol. 2014, pp. 1-8, 2014.

15. C. Lawrence, Partial differential equations, 2rd ed., Graduate Studies in Mathematics, American Math. Society, 2010.

16. P. Ya. Pukach, I. V. Kuzio, Z. M. Nytrebych, and V. S. Ilkiv, "Analytical methods for determining the effect of the dynamic process on the nonlinear flexural vibrations and the strength of compressed shaft", Nauk. Visn. Nats. Hirn. Univ., No. 5, pp. 69-76, 2017.