

ДАЦЮК ДМИТРО

Вінницький національний аграрний університет

<https://orcid.org/0000-0002-4614-2245>e-mail: datsiuk.vnay@gmail.com

КУПЧУК ІГОР

Вінницький національний аграрний університет

<https://orcid.org/0000-0002-2973-6914>e-mail: kupchuk.igor@i.ua

ОГЛЯД СУЧАСНИХ ПІДХОДІВ ДО ОЦІНКИ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

У статті проведений аналіз різних критеріїв міцності для ізотропних, ортотропних і анізотропних матеріалів. Описані підходи при розрахунку міцності волокнистих і шаруватих композиційних матеріалів. Розглядаються критерії: Мізеса, Писаренка–Лебедева, Вільяма–Варнке, Друкера–Прагера, Бажанта, Норріса, Кунце, Гольденблата–Копнова, Цая–Хілла, Цая–Ву, Хашина, LaRC, Гоффмана, Пака.

Ключові слова: конструкція, матеріал, критерій міцності, напруження, деформація.

DATSIUK DMYTRO, KUPCHUK IHOR

Vinnytsia National Agrarian University

REVIEW OF MODERN APPROACHES TO MATERIAL STRENGTH ASSESSMENT

Material strength criteria are fundamental to understanding the durability and failure limits of materials under various stresses and loading conditions. Different models help predict material behavior under complex conditions, including uniaxial, biaxial, and multiaxial stresses. Among the widely used criteria, the von Mises criterion is essential in predicting yielding in ductile materials, suggesting that yielding occurs when the second deviatoric stress invariant reaches a critical value. The Pisarenko–Lebedev criterion expands on this, accounting for hydrostatic stresses, which is especially useful in brittle materials. The Willam–Warnke criterion is widely applied to concrete and similar materials to predict behavior under triaxial states of stress. The Drucker–Prager criterion generalizes the Mohr–Coulomb model by incorporating a continuous yield surface, making it particularly applicable for soils and other pressure-sensitive materials. Bazant's theory contributes to understanding concrete's behavior, especially regarding cracking and creep in quasi-brittle materials, a valuable extension to other yield criteria. In composites, criteria such as Tsai–Hill, Tsai–Wu, Hashin, and LaRC (LaRC being NASA's laminate analysis criterion) allow for precise predictions of material failure under combined stress states, taking anisotropy and unique composite material responses into account. Hoffman's criterion further modifies Hill's theory, addressing the need for additional precision in anisotropic materials. Additionally, the Kunze and Goldenblat–Kopnov criteria contribute to the realm of composite materials by providing criteria for different types of failure modes under multi-axial loads, vital for high-performance applications. The Norris criterion also emphasizes composite failure but is particularly useful for cases with complex stress states. Lastly, Puck's criterion is specialized for fiber-reinforced composites, where failure due to inter-fiber stresses is critical. Overall, these criteria facilitate the assessment of material strength in engineering applications by offering diverse models for various material classes, stress conditions, and practical engineering scenarios.

Keywords: structure, material, strength criterion, stress, strain.

Постановка проблеми

Аналіз міцності конструкцій є складною і багатоаспектною задачею, особливо при використанні різноманітних матеріалів, які мають різні механічні властивості та особливості руйнування. В умовах навантаження матеріали конструкцій зазнають напружень і деформацій, що можуть перевести їх у граничний стан, який може бути пружним, пластичним або призвести до руйнування. Точна оцінка міцності вимагає застосування відповідних критеріїв, що враховують специфіку матеріалу – пластичні чи крихкі матеріали, композити тощо. Для пластичних матеріалів критичними є залишкові деформації, тоді як для крихких матеріалів – виникнення мікротріщин. Існує також потреба у спеціальних критеріях для композиційних матеріалів, які мають різну міцність у залежності від напрямку навантаження, що зумовлено структурними властивостями та орієнтацією волокон і шарів.

Додаткові складнощі виникають під час моделювання конструкцій з композиційних матеріалів, які потребують структурного, феноменологічного або комбінованого підходу для коректного відображення їхньої поведінки. Врахування неоднорідності та анізотропії композиційних матеріалів вимагає отримання усереднених фізико-механічних характеристик, які потім використовуються для оцінки розподілу напружень і деформацій у багатошарових оболонках та в кожному окремому шарі.

Таким чином, існує необхідність системного аналізу критеріїв міцності для ізотропних, ортотропних та анізотропних матеріалів для підвищення точності оцінки їх стійкості в конструкціях, що і є метою даної роботи.

Аналіз основних джерел

Під час дії навантажень на конструкцію її міцність оцінюється за граничним станом матеріалів, з яких складаються елементи конструкції. Коли матеріал досягає граничного стану, відбувається його перехід у новий механічний стан – це може бути пружний, пластичний або руйнівний стан.

Для проведення аналізу міцності конструкції необхідно:

– визначити граничні напруження (або деформації) для матеріалу, який використовується в конструкції (це визначається експериментальним шляхом);

– застосовувати критерії міцності для оцінки стійкості матеріалів під навантаженням. Якщо граничний стан матеріалу відповідає допустимим залишковим деформаціям, то умовою критерію виступає текучість матеріалу.

Для виробів з пластичних матеріалів неприпустимим є виникнення значних залишкових деформацій, а для крихких матеріалів – утворення мікротріщин. У зв'язку з цим критерії міцності для крихких матеріалів відрізняються від критеріїв міцності для пластичних матеріалів. Однак існують і універсальні критерії для обох типів матеріалів, наприклад, критерій Писаренка–Лебедева.

При дослідженні композиційних матеріалів важливо враховувати різний опір шаруватих і волокнистих матеріалів до стиснення і розтягування, який залежить від властивостей матриці та армуючої фази. Тому волокнисті та шаруваті матеріали значно міцніші при розтягуванні вздовж напрямків армування, ніж при стисненні. Зазвичай міцність при розтягуванні в таких матеріалах є вищою в поздовжньому напрямку, а при стисненні – в поперечному. Отже, для оцінки міцності конструкцій з композиційних матеріалів необхідно використовувати критерії міцності, які враховують різні граничні напруження не лише за різними напрямками координатних осей, але й при розтягуванні та стисненні.

Для моделювання конструкцій з композиційних матеріалів застосовують кілька основних підходів: структурний, феноменологічний та комбінований. Структурний підхід аналізує структуру матеріалу та мікромеханічну взаємодію між окремими елементами компонентів при навантаженні всієї конструкції. Такий підхід є складним для реалізації, особливо при дослідженні мікромеханічних властивостей великих конструкцій. Феноменологічний підхід розглядає неоднорідний композиційний матеріал як усереднений однорідний анізотропний матеріал. Проміжний метод — це комбінація двох попередніх. У структурно-феноменологічному підході ідеалізовано описується поведінка окремого шару, а багатошаровий композиційний матеріал розглядається як система, що включає кілька шарів з різною орієнтацією (властивості гетерогенних систем визначаються фізико-механічними характеристиками окремих фаз, що складають цю систему).

Згідно з цим підходом, під час аналізу міцності багатошарових оболонок спочатку отримують усереднені фізико-механічні характеристики, після чого виконується розрахунок конструкції, яка складається з таких оболонок. За допомогою математичної моделі визначається розподіл напружень і деформацій у конструкції. Потім переходять від усереднених напружень і деформацій в композитних оболонках до напружень і деформацій у кожному окремому шарі композиційного матеріалу – на основі його властивостей, орієнтації волокон, товщини та положення у складі. На фінальному етапі, на основі отриманих даних, робиться висновок щодо міцності кожного шару за обраним критерієм руйнування.

Метою роботи є: аналіз різних критеріїв міцності для ізотропних, ортотропних та анізотропних матеріалів.

Виклад основного матеріалу

До основних математичних моделей можна віднести п'ять феноменологічних моделей міцності: максимальних нормальних напружень, максимальних деформацій, максимальних зсувних напружень (модель Треска), моделі максимальної питомої потенціальної енергії зміни форми (модель фон Мізеса) та модель Мора.

Згідно з *першою теорією* міцності, небезпечний стан матеріалу настає, коли найбільші нормальні напруження досягають критичних значень (ця модель використовується лише для крихких матеріалів).

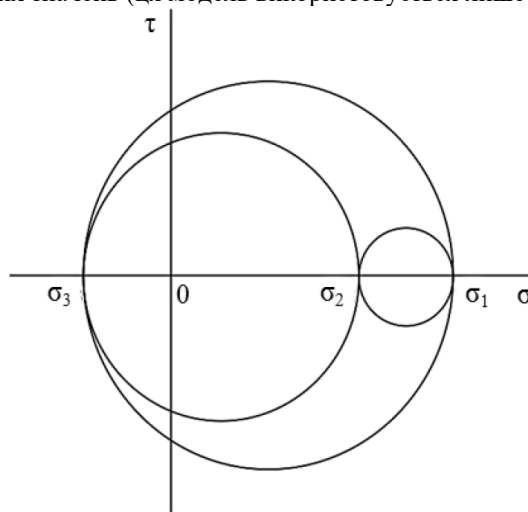


Рис. 1. Кола Мора для об'ємного напруженого стану

Друга теорія міцності стверджує, що небезпечний стан матеріалу виникає через максимальні відносні подовження (характеризує крихке руйнування при розтягуванні). Напруження визначаються за формулою.

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

де, μ – коефіцієнт Пуасона, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження при умові $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Загалом, теоретичні прогнози, отримані на основі перших двох розглянутих моделей, рідко застосовуються як самостійні теорії в інженерних розрахунках. Відповідно до третьої теорії міцності, при рівності максимальних дотичних напружень складний та лінійний напружений стани є еквівалентними за міцністю. Напруження, визначається за формулою:

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{2}$$

У моделі міцності Трески текучість і руйнування матеріалу настають через зсувні напруження. У моделі міцності фон Мізеса, яка описує настання текучості матеріалу, кількість енергії деформації однакова як при простому розтягуванні, так і при складному напруженому стані. Напруження визначаються за формулою:

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{3}$$

Модель міцності Мора представлена у вигляді кіл напружень (рис. 1). Відмінність моделі Мора від попередніх полягає в тому, що вона повністю базується на експериментальних даних і може уточнитися з урахуванням нових результатів.

Зазначені вище моделі є дійсними для однорідних та ізотропних матеріалів. Для розрахунків композиційних матеріалів ці теорії не застосовуються.

Критерії міцності композиційних матеріалів

Існують сотні різних критеріїв міцності для матеріалів з неоднорідною структурою. Значного поширення набули феноменологічні підходи, що базуються на апроксимації експериментальних даних за результатами стандартних випробувань на одноосьове стиснення, розтяг, зсув тощо. Важлива частина цих підходів ґрунтується на концепції граничної поверхні, запропонованій Х.М. Вестергардом [1-2], яка побудована на основі експериментальних даних способом, запропонованим М.М. Філоненко-Бородичем, із застосуванням моделі міцності, модифікованої в роботі. Для точного опису функцій міцності потрібно п'ять матеріальних параметрів, визначених експериментально: міцність при тривісному рівномірному стисненні; міцність при двовісному рівномірному стисненні та розтягу (σ_{2c} і σ_{2p}); а також міцність при одноосьовому стисненні та розтягу (σ_c і σ_p).

Кількість параметрів матеріалу можна зменшити за допомогою формул, отриманих експериментально, що пов'язують їх між собою [6]. Умова міцності описує поверхню, симетричну відносно діагоналі простору головних напружень $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Зазвичай цю поверхню будують у локальній циліндричній системі координат ($\sigma_0 - \tau_0 - \theta$), пов'язаній з початковою системою $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ певними співвідношеннями [6]. Поверхня міцності описується рівнянням, параметри якого визначаються експериментально (рис. 2).

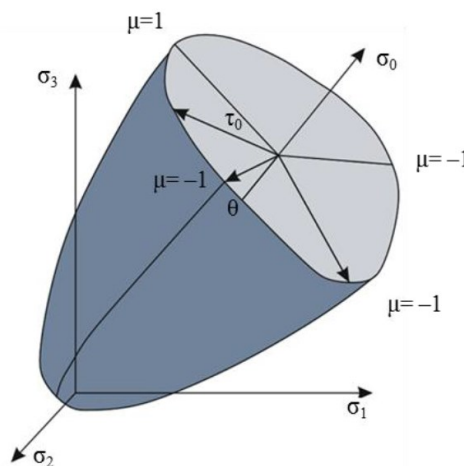


Рис. 2. Поверхня міцності в циліндричній системі координат $\sigma_0 - \tau_0 - \theta$

Представлена модель включає меридіональний та девіаторний перетини. Складність її використання полягає в тому, що для її опису необхідно п'ять матеріальних параметрів, які визначаються експериментально.

Модель критерію міцності Вільяма–Варнке описується трьома незалежними матеріальними параметрами (межі міцності при одноосьовому розтягу та одноосьовому і двоосьовому стисненні) і є розвитком трьохінваріантного критерію міцності Генесєва. Спочатку модель міцності призначалася для бетонів і застосовується при розрахунках структурно-неоднорідних матеріалів із великою різницею між межами міцності при стисненні та розтягу.

Модель міцності Друкера–Прагера [8] описує руйнування матеріалів внаслідок пластичних деформацій і визначається двома параметрами: межами міцності при одноосьовому стисненні та розтягу. Пластична поведінка характерна для стисливих матеріалів. Поверхня текучості залишається незмінною з підвищенням деформацій текучості, і відсутній закон зміцнення (рис. 3).

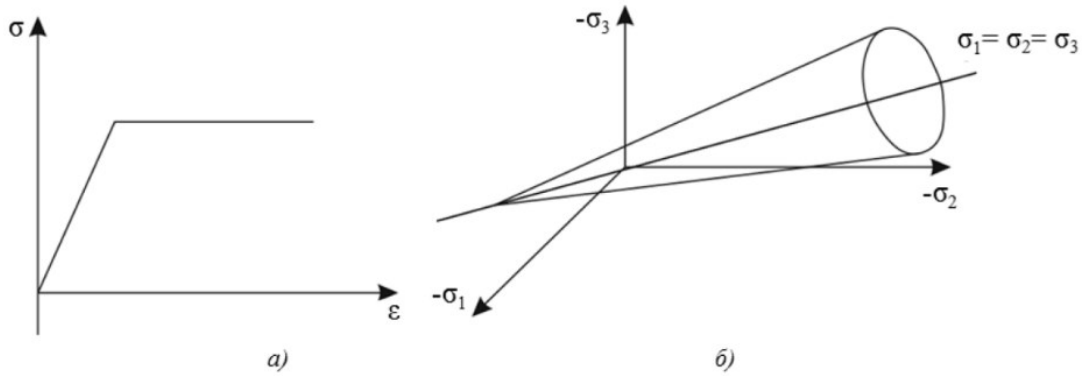


Рис. 3. Модель Друкера–Прагера (а) та поверхня текучості матеріалу (б)

Модель критерію міцності Базанта [9] базується на тензорі деформацій і є двоінваріантним критерієм руйнування для бетону, гірських порід, пластиків та інших подібних матеріалів.

Математична модель критерію міцності Норріса є ортотропною і може застосовуватися для односпрямованих композиційних матеріалів з різною стійкістю до розтягування та стиснення.

Математичні моделі на основі діаграм деформування матеріалів отримали широке застосування та використовуються для спрощеного розрахунку. Діаграма деформування композиційного матеріалу залежить від напрямку армування, відсоткового вмісту армуючої фази, режиму, схеми та тривалості навантаження, а також температури випробувань. Аналіз кривих деформування композиційних матеріалів, методи їх апроксимації та використання в розрахунках детально висвітлено в роботах багатьох дослідників, які вивчають ці питання.

Розглянемо критерій руйнування трансверсально-ізотропних односпрямованих композиційних матеріалів. Критерій міцності Кунце передбачає визначення еквівалентних напружень для всіх типів крихкого руйнування волокнистого матеріалу аналогічно критерію Губера–Мізеса–Генки, який визначає еквівалентні напруження, що призводять до руйнування пластичних матеріалів. Еквівалентні напруження ($\sigma_{\text{екв}}$) у критерії міцності Кунце охоплюють напруження, що відповідають усім п'яти формам руйнування.

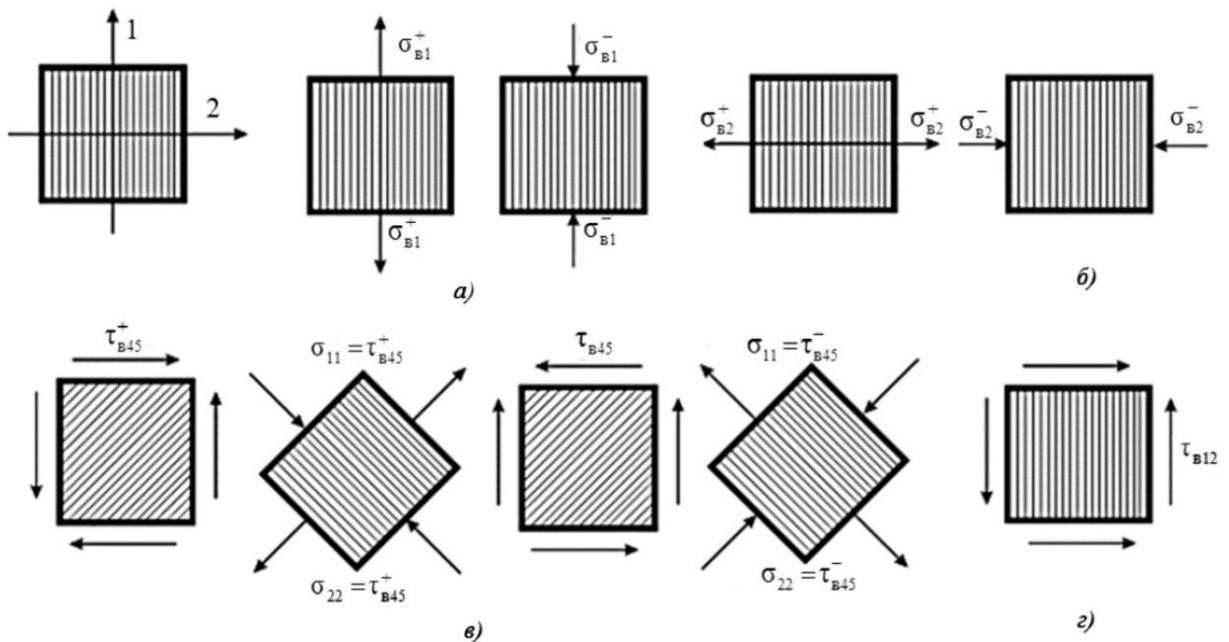


Рис. 4. Схема експериментів для визначення компонент тензора поверхні Гольденבלата–Копнова

Для ортотропного матеріалу при оцінці міцності визначають характеристики в напрямку осей ортотропії та під кутом 45 градусів до них — загалом шість компонент, які для критерію міцності Гольденבלата–Копнова схематично зображені на рис. 4. Ця модель враховує межі міцності при зсуві матеріалу, повернутого на 45 градусів, за позитивного та негативного значення дотичних напружень, які експериментально практично неможливо визначити. Крім того, ці характеристики відсутні у нормативній документації на матеріали (стандартах або технічних умовах).

Модель міцності осердя призначена для розрахунку міцності осердя під час міжшарового зсуву і дії нормальних до площини ламінату напружень (σ_3), які враховуються в критерії тільки тоді, коли їх значення визначаються під час розрахунку напруженого стану.

Модель утворення складок представлена в роботі [10] для листів під одноосним навантаженням. Складкоутворення на зовнішніх шарах — це локальна втрата стійкості, моделювати яку можна шляхом заміщення зовнішніх шарів пластинами на пружній основі, що формується осердям.

У моделі гофрування максимальне зусилля стиснення є функцією властивостей зовнішнього шару і осердя в напрямку прикладання навантаження. Експериментально визначаються вагові коефіцієнти, причому якщо зовнішні шари значно тонші за осердя, їхній ваговий коефіцієнт може бути прийнятий за 0, а для осердя — за 1.

Гофрування — це локальне пошкодження, яке можна розглядати як випадок поздовжнього вигину, коли довжина хвилі зразка при згинанні невелика через низький модуль зсуву серцевини. Гофрування виникає раптово та часто призводить до руйнування серцевини або порушення зв'язків між зовнішніми шарами та серцевиною.

Для оцінки міцності шаруватих полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) використовують два підходи, що застосовуються на різних етапах проектування конструкцій.

Розглянемо критерії, що ґрунтуються на граничних напруженнях моношара. Критерій міцності Цая–Гілла (Гілла–Мізеса) є квадратичним критерієм, заснованим на четвертій (енергетичній) теорії міцності, що дозволяє визначити момент руйнування за допомогою напружень, але не дає змоги розрізнити види руйнувань. Цей критерій підходить для більшості композитних оболонок і є ефективним для шаруватих матеріалів, коли напруження на розтяг і стискання є однаковими. Основний недолік критерію полягає у відсутності можливості встановити причину руйнування моношара — чи це руйнування матриці, чи волокна. Це може стати перешкодою для подальшої оцінки міцності композитного пакета, адже руйнування матриці окремого шару може не означати втрату міцності всього пакета. У програмах, що застосовують цей критерій і розрізняють первинне та вторинне руйнування композиційного матеріалу, зазвичай припускають, що сталося руйнування матриці, й відповідно коригують жорсткість моношара. Критерій також не розрізняє комбінації напружень σ_1 – σ_2 , оскільки двовісне розтягнення чи стискання вважаються еквівалентними.

Критерій міцності Гоффмана є розширеним варіантом критерію Цая–Гілла і враховує властивості матеріалу при розтягуванні та стисканні в одному критерії. Він базується на сумі лінійних і квадратичних інваріантів напружень.

Критерій міцності Цая–Ву є модифікацією критерію Гоффмана і феноменологічною теорією руйнування матеріалів, яка широко використовується для анізотропних композитних матеріалів з різними міцностями при розтягуванні та стисканні. Однак цей критерій, як і критерій Цая–Гілла, не прогнозує різні форми руйнування, включаючи руйнування волокон і матриці. Його краще застосовувати, коли напруження на розтяг і стискання не рівні.

Критерії максимальних напружень Цая–Гілла, Гоффмана та Цая–Ву не містять інформації про те, що сталося в моношарі — чи зруйнувалася матриця, чи волокно. Руйнування матриці окремого шару не завжди означає втрату його несучої здатності, і пакет матеріалу може продовжувати витримувати зростаюче навантаження. Тому дедалі більшого поширення набувають критерії, у яких окремо аналізуються запаси міцності матриці та волокна, наприклад, критерій Хашина або Пака.

Критерій міцності Хашина визначає чотири різні типи руйнування композитного матеріалу: волокна — при розтягуванні чи стисканні, матриці — при розтягуванні чи стисканні. У рівняннях за критерієм Хашина враховуються міжшарові дотичні напруження, що вимагає визначення додаткових компонентів тензора дотичних напружень, ускладнюючи розрахунок і потребуючи додаткових випробувань зразків.

Критерій міцності Пака визначає руйнування волокна та міжволоконне руйнування в односпрямованому композитному матеріалі, заснованому на теорії міцності Мора. Цей критерій описує дві форми руйнування волокна: перша — це руйнування при розтягуванні, друга — при стисканні з перекручуванням. Рівняння критерію Пака враховують утворення тріщин у матриці. Він подібний до критерію максимальних напружень, але з тією відмінністю, що пружні характеристики матриці можуть бути нелінійними, і деформаційні критерії дають змогу певною мірою врахувати цей фактор.

Критерій міцності LaRC застосовується для композитних матеріалів, армованих волокнами, і ґрунтується на фізичних моделях кожної форми руйнування. Під час розгляду стискання волокон можливий варіант руйнування через хвилеподібний вигин волокон при локальній втраті стійкості в одному напрямку.

Існує також багато деформаційних критеріїв міцності, заснованих на граничних деформаціях руйнування моношару. Одним із найбільш поширених є критерій максимальних деформацій, що визначає руйнування композитного матеріалу трьома можливими формами: поздовжньою, поперечною та зсувною. Під час розрахунків цей критерій не враховує взаємозв'язку між різними складовими деформацій і застосовується для попереднього проектування виробів із ПКМ. Він схожий на критерій максимальних напружень, проте враховує можливу нелінійність пружних характеристик матриці завдяки деформаційним підходам.

Висновки

Розглянуті моделі можна розділити на критерії:

— за граничними значеннями — найпростіші, що не потребують складних обчислень або проведення додаткових експериментальних досліджень;

— за об'єднаними значеннями — такі, що об'єднують компоненти тензора напружень в загальне, легко аналізоване поліноміальне рівняння;

– за видами руйнування – найскладніші, кусочно-задані функції, що окремо розглядають різні види руйнування.

У розрахунковій практиці найбільш поширеними є критерії максимальних напружень Цая–Гілла, Цая–Ву та Гоффмана. Ці критерії використовуються в більшості програмних комплексів на основі методу скінченних елементів як стандартні засоби оцінки міцності композиційних матеріалів і конструкцій. У практичному застосуванні варто відзначити одну важливу деталь. Зазвичай вони надають оцінку міцності матриці. Однак, наприклад, у літакобудуванні при навантаженнях, що перевищують експлуатаційні, можливі локальні руйнування елементів конструкції, які не призводять до втрати її несучої здатності до розрахункових навантажень. Тому врахування деградації властивостей композиту через часткове руйнування матриці є актуальним завданням.

Саме це пояснює підвищений інтерес до критеріїв із роздільною оцінкою міцності матриці та волокна, таких як критерій Пака, а також методик, що враховують деградацію характеристик композиту при навантаженні.

На основі огляду вітчизняної та зарубіжної науково-технічної літератури можна зробити висновок про існування великої кількості різних математичних моделей та підходів для визначення міцності композиційних матеріалів, розрахунку конструкцій і виробів із них. Проте класичні моделі розрахунку міцності не застосовні для дослідження композиційних матеріалів неоднорідної структури.

Для визначення найбільш ефективних критеріїв необхідно аналізувати їхню придатність для конкретного матеріалу і знаходити значення граничного навантаження при дослідженні міцності конструкції.

Література

1. Ottozen N.S. A Failure Criterion for Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1977. Vol. 103. NEM4. P. 527–535.
2. Лебедев А.А., Ковальчук Б.І., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевський В.П. Механічні властивості конструкційних матеріалів при складному напруженому стані. Київ: Ін Юре, 2003. 540 с.
3. Westergaard H.M. Plastic state of stress around a deep well // *Journal of the Boston Society of Civil Engineers Section*, 1940. Vol. 27. No. 1. P. 1–5.
4. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформування і міцність матеріалів при складному напруженому стані. Київ: Наукова думка, 1976. 416 с.
5. Balan T.A., Spacone E., Kwon M. 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures // *Engineering Structures*. Elsevier, 2001. No. 23. P. 333–342.
6. Клованич С.Ф., Безушко Д.І. Метод кінцевих елементів у розрахунках просторових залізобетонних конструкцій. Одеса: Вид-во ОНМУ, 2009. 89 с.
7. Warnke K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // *Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses*. Dergamo, 1974. Vol. 19. P. 3–11.
8. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1952. No. 2. P. 157–165.
9. Bazant Z.P., Cedolin L. Fracture mechanics of reinforced concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1980. Vol. 106. P. 1287–1306.
10. *Structural Materials Handbook*. ESA Publications Division, 1994. Vol. 1. 564 p.

References

1. Ottozen N.S. A Failure Criterion for Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1977. Vol. 103. NEM4. P. 527–535.
2. Lebedev A.A., Kovalchuk B.I., Higinia F.F., Lamashovsky V.P. Mechanical Properties of Structural Materials under Complex Stress States. Kyiv: In Yure, 2003. 540 p.
3. Westergaard H.M. Plastic state of stress around a deep well // *Journal of the Boston Society of Civil Engineers Section*, 1940. Vol. 27. No. 1. P. 1–5.
4. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. Deformation and Strength of Materials under Complex Stress States. Kyiv: Naukova Dumka, 1976. 416 p.
5. Balan T.A., Spacone E., Kwon M. 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures // *Engineering Structures*. Elsevier, 2001. No. 23. P. 333–342.
6. Klovanich S.F., Bezushko D.I. Finite Element Method in the Analysis of Spatial Reinforced Concrete Structures. Odesa: ONMU Publishing, 2009. 89 p.
7. Warnke K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // *Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses*. Dergamo, 1974. Vol. 19. P. 3–11.
8. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1952. No. 2. P. 157–165.
9. Bazant Z.P., Cedolin L. Fracture mechanics of reinforced concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1980. Vol. 106. P. 1287–1306.
10. *Structural Materials Handbook*. ESA Publications Division, 1994. Vol. 1. 564 p.