DOI 10.31891/2307-5732-2023-319-1-108-112
УДК 519.6:001.5

ЗАВГОРОДНІЙ ОЛЕКСІЙ
Державний біотехнологічний університет
https://orcid.org/0000-0003-2510-9160
e-mail: alexey.z.2014@gmail.com
ЛЕВКІН ДМИТРО
Державний біотехнологічний університет
https://orcid.org/0000-0002-1980-4426
e-mail: dimalevkin23@gmail.com
МАКАРОВ ОЛЕКСАНДР
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
https://orcid.org/0000-0002-9050-4987
e-mail: makarovifamily07@gmail.com
КОТКО ЯНА
Державний біотехнологічний університет
https://orcid.org/0000-0001-6611-8130
e-mail: kotkoyana@ukr.net

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

В теорії аналізу і синтезу технічних систем важливе місце посідають математичне моделювання і оптимізація багатошарових систем, які містять джерела дії фізичних полів. Це пов'язано з тим, що їх стан описується за допомогою крайових задач з багатовимірними диференціальними рівняннями. Для розв'язання крайових задач і реалізації процесу оптимізації технічних параметрів модельованих систем необхідно провести міждисциплінарні дослідження розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей. Виконання умов існування єдиного розв'язку крайових задач за умовчанням можливо лише, коли об'єкт дослідження – це одношаровий матеріал під дією джерел навантаження. Якщо ж потрібно здійснити розрахунок і оптимізацію технічних параметрів багатошарового матеріалу, на який діють джерела навантаження, тоді неможливо одразу гарантувати коректність розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей, адже потрібно отримати умови існування і єдиності розв'язку крайових задач з системами диференціальних рівнянь. Максимізація ж технічних параметрів джерел навантаження та усереднення характеристик шарів матеріалу призведе до отримання приблизних значень функції мети і технічних параметрів модельованої системи, що спонукає до нераціонального витрачення енергетичних, теплових ресурсів і неконтрольованих, марних втрат піддослідного матеріалу при забезпеченні технологічного процесу.

В статті отримані умови коректності багатоточкових крайових задач з багатовимірними диференціальними рівняннями, які описують стан багатошарового матеріалу під термічною дією. Наведені дослідження доцільно використати для обґрунтування коректності інших технічних і біотехнологічних систем, що дозволить збільшити точність реалізації прикладних оптимізаційних задач економіко-математичного моделювання.

Ключові слова: технічні системи, математичні моделі, крайові задачі, коректність.

ZAVGORODNIY OLEXIY, LEVKIN DMYTRO, KOTKO YANA
State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine
MAKAROV OLEXANDER
V.N. Karazin Kharkiv National University[3], Kharkiv, Ukraine

RESEARCH OF COMPUTATIONAL MATHEMATICAL MODELS FOR TECHNICAL SYSTEMS

In the theory of analysis and synthesis of technical systems, mathematical modelling and optimization of multilayer systems containing sources of physical fields occupy an important place. This is due to the fact that their state is described by means of boundary value problems with multidimensional differential equations. To solve the boundary value problems and implement the process of optimizing the technical parameters of the modelled systems, it is necessary to conduct interdisciplinary studies of computational and applied optimization mathematical models. Fulfilment of the conditions for the existence of a single solution to boundary value problems by default is possible only when the object of study is a single-layer material under the action of load sources. If it is necessary to calculate and optimize the technical parameters of a multilayer material subjected to load sources, then it is impossible to immediately guarantee the correctness of the calculated and applied optimization mathematical models, since it is necessary to obtain the conditions for the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems with systems of differential equations. Maximizing the technical parameters of load sources and averaging the characteristics of material layers will lead to approximate values of the objective function and technical parameters of the modelled system, which leads to irrational consumption of energy and heat resources and uncontrolled losses, and useless losses of the test material in the technological process.

The article presents the conditions for the correctness of multipoint boundary value problems with multidimensional differential equations describing the state of a multilayer material under thermal action. It is advisable to use these studies to substantiate the correctness of other technical and biotechnological systems, which will increase the accuracy of the implementation of applied optimization problems of economic and mathematical modelling.

Keywords: technical systems, mathematical models, boundary value problems, correctness.

Постановка проблеми

В умовах економії енергетичних і виробничих ресурсів для забезпечення технологічного процесу теплопереносу в багатошаровому матеріалі актуальною є задача розробки нових і підвищення точності та швидкості реалізації існуючих математичних моделей, чисельних методів і обчислювальних пристроїв для розрахунку і оптимізації параметрів модельованих систем. Це можливо здійснити за рахунок збільшення рівня деталізації систем, що потребує обґрунтування коректності крайових задач, які описують їх стан. Відзначимо, що в основі розрахункової математичної моделі, яка описує теплофізичну систему «багатошаровий матеріал – джерело термічного навантаження» лежить багатоточкова крайова задача для системи диференціальних рівнянь теплопровідності. Для крайової задачі, де враховані особливості шарів матеріалу і теплові режими нагріву, неможливо гарантувати існування і єдиність розв’язку. Це означає, що необхідно визначити чи будуть вихідні дані визначати розв’язок в певних функціональних просторах і чи будуть незначним змінам вихідних даних в диференціальних рівняннях і в крайових умовах відповідати незначні (у відповідній метриці) зміни розв’язків, тобто обґрунтувати умови коректності крайової задачі.

Для знаходження умов коректності багатоточкової крайової задачі в багатошаровому середовищі доцільно використати теорію диференціальних і псевдодиференціальних операторів в функціональних просторах. В статті досліджена коректність багатоточкової крайової задачі технологічного процесу теплопереносу в багатошаровому матеріалі при термічній дії. Автори отримали результат, що умова рівномірної обмеженості фундаментальної функції розв'язків – це необхідна і достатня умова коректності неоднорідної крайової задачі в багатошаровому середовищі. Результати цієї статті доцільно застосувати для підвищення точності розрахунку і оптимізації параметрів інших технічних і біотехнологічних систем.

Аналіз останніх досліджень

Здійснивши всебічний, детальний аналіз структури і особливостей функціонування окремих елементів енергетичних систем в Україні та за кордоном, в публікаціях [1–4] відзначені методи підвищення їхньої ефективності керування в умовах ринкових відносин. Авторами публікацій [1, 2] розроблена методика для енергозбереження та збільшення точності прогнозування споживання вугілля і природнього газу в Україні в зимовий період. Вона включає до себе математичні моделі і методи, які застосовані для раціоналізації використання енергетичних ресурсів на виробництвах. Авторами публікації [3] сформована задача оптимального керування технологічним процесом випалювання вуглецевих виробів, розглянуті програмне керування та керування в реальному часі зазначеним технологічним процесом, проаналізовані недоліки програмного керування та запропоновані методи їх подолання в режимі керування технологічним процесом випалюванння вуглецевих виробів в реальному часі. Запропоновані математичні моделі для виявлення кіберзагроз та методи їх подолання в енергетичному секторі України [4].

В публікаціях [5, 6] розроблені коректні математичні моделі для певних технічних систем з розподіленими параметрами. Наведені математичні моделі і методи для розрахунку функції мети технічних систем з імпульсним впливом в фіксовані моменти часу в публікації [6]. Значну увагу авторів публікації [6] приділено умовам коректності лінійних неоднорідних систем з диференціальними рівняннями для окремих імпульсно-збурених систем. Запропоновані математичні моделі і методи для забезпечення керування систем з обмеженим невідомим збуренням [7]. Використавши економіко-статистичні методи та методи економіко-математичного моделювання, авторами публікації [8] здійснена оцінка динаміки обсягів видатків агропромислових підприємств за напрямами інноваційної діяльності в Україні, побудовані прогнози фінансування їх інноваційної діяльності в Україні.

Метою роботи є запропонувати і всебічно обґрунтувати умови існування єдиного розв’язку крайових задач процесу теплопереносу в багатошарових об’єктах.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо однорідну крайову задачу системи рівнянь теплопровідності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) \quad \textit{якщо} \quad t\in[0;t_1]; \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_2\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) \quad \textit{якщо} \quad t\in[t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_n\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) \quad \textit{якщо} \quad t\in[t_{N-1};T]. \end{cases} \tag{1}$$

Крайові умови в загальному виді:

$$B_0\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0) + B_1\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t_1) + \dots + B_n\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x)\ . \tag{2}$$

де $A_k\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)$ и $B_k\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)$ – псевдодиференціальні оператори.

Розглянемо неоднорідну крайову задачу системи рівнянь теплопровідності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t) \quad якщо \quad t \in [0;t_1]; \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_2\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t) \quad якщо \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_n\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t) \quad якщо \quad t \in [t_{N-1};T]. \end{cases} \tag{3}$$

Крайові умови в загальному виді:

$$B_0\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0) + B_1\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t_1) + \dots + B_n\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T) = 0\ . \tag{4}$$

Подіємо перетворенням Фур'є на крайову задачу (1)–(2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_1(s)u(s,t) \quad якщо \quad t \in [0;t_1]; \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_2(s)u(s,t) \quad якщо \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_n(s)u(s,t) \quad якщо \quad t \in [t_{N-1};T]. \end{cases} \tag{5}$$

$$B_0(s)u(s,0) + B_1(s)u(s,t_1) + \dots + B_n(s)u(s,T) = \varphi(s)\ . \tag{6}$$

Подіємо перетворенням Фур'є на крайову задачу (3)–(4):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_1(s)u(s,t) + f(s,t) \quad якщо \quad t \in [0;t_1]; \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_2(s)u(s,t) + f(s,t) \quad якщо \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t} = A_n(s)u(s,t) + f(s,t) \quad якщо \quad t \in [t_{N-1};T]. \end{cases} \tag{7}$$

$$B_0(s)u(s,0) + B_1(s)u(s,t_1) + \dots + B_n(s)u(s,T) = 0\ , \tag{8}$$

де $u(s,t) = F_x u(x,t)$, $f(s,t) = F_x f(x,t)$, $\varphi(s) = F_x \varphi(x,t)$ – перетворення Фур'є відповідних функцій; $A_k(s)$, $B_k(s)$ – символи псевдодиференціальних операторів.

Розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь в загальному виді:

$$u(s,t) = \begin{cases} \exp\left(t \cdot A_1(s)\varphi_1(s)\right) \quad якщо \quad t \in [0;t_1]; \\ \exp\left(t \cdot A_2(s)\varphi_2(s)\right) \quad якщо \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \exp\left(t \cdot A_n(s)\varphi_n(s)\right) \quad якщо \quad t \in [t_{N-1};T]. \end{cases} \tag{9}$$

Врахувавши безперервність розв'язку, отримали рівність:

$$\varphi_k(s) = \exp\left(t_1 \cdot A_1(s) + (t_2 - t_1) \cdot A_2(s) + \ldots + (t_{k-1} - t_{k-2}) \cdot A_{k-1}(s)\right)\varphi_1(s)\ . \tag{10}$$

Розв'язок крайової задачі (5)–(6):

$$u(s,t) = Q(s,t) \cdot \varphi(s)\ . \tag{11}$$

Фундаментальна функція розв'язку однорідної крайової задачі:

$$Q(s,t) = \begin{cases} \exp\left(t \cdot A_1(s) / \Delta(s)\right) \quad якщо \quad t \in [0;t_1]; \\ \exp\left(t \cdot A_2(s) / \Delta(s)\right) \quad якщо \quad t \in [t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \exp\left((t - t_{n-1}) \cdot A_n(s) + \ldots + t_1 \cdot A_1(s)\right) / \Delta(s) \quad якщо \quad t \in [t_{n-1};T], \end{cases} \tag{12}$$

де $\Delta(s) = B_0(s) + B_1(s)\exp t_1 \cdot A_1(s) + \ldots + B_n(s)\exp\left(t_1 \cdot A_1(s) + (t_2 - t_1) \cdot A_2(s) + \ldots + (T - t_{n-1}) \cdot A_n(s)\right) \neq 0$.

Відзначимо, що фундаментальна функція $Q(s,t)$ обмежена зверху, тобто $|\,Q(s,t)\,| \le C\exp\left(-bp(t)|s|^h\right)$ за умови, що $b > 0$, $,h > 0$, а $\rho(t) = \min\limits_{0 \le k \le n}|\,t - t_k\,|$. Обмеженість фундаментальної функції $Q(s,t)$ для системи однорідних диференціальних рівнянь (5)–(6) означає коректність однорідної крайової задачі (1)–(2), що зумовило коректність неоднорідної крайової задачі (3)–(4) в просторі $C\left([0;T],H^{s}\right)$. Відзначимо, що в публікаціях [9, 10] розглянуті близькі прикладні задачі до досліджуваної тематики авторами цієї статті.

Висновки

У статті побудовані розрахункові математичні моделі теплопереносу в багатошаровому матеріалі при реалізації технологічного процесу термічної дії. Запропоновані методи для знаходження розв'язків вищевказаної крайової задачі та детально досліджені її особливості. Відзначимо, що особливу увагу авторів приділено знаходженню умов коректності багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь, які застосовані для математичного моделювання технічної системи під дією джерел термічного навантаження. Це дозволило отримати висновок, що рівномірна обмеженість фундаментальної функції розв'язків – це необхідна та достатня умова коректності неоднорідної крайової задачі системи диференціальних рівнянь теплопровідності в багатошаровому середовищі. Наведені в статті розрахунки доцільно застосувати для обґрунтування коректності окремих розрахункових, прикладних оптимізаційних математичних моделей технічних і біотехнологічних систем, що дозволить підвищити точність і швидкість їх економіко-математичного моделювання.

Література

1. Маляренко О.Є. Уточнення методики прогнозування попиту на паливо з оцінкою структурного потенціалу енергозбереження в енергетичному секторі / О.Є. Маляренко, В.В. Станиціна // Проблеми загальної енергетики. – 2019. – № 1. – С. 19–23.
2. Кулик М.М. Аналіз стану розвитку систем теплопостачання в Україні / М.М. Кулик, Г.О. Куц, В.Д. Білодід // Проблеми загальної енергетики. – 2006. – № 14. – С. 13–24.
3. Жученко Л.К. Постановка задачі оптимального керування процесом випалювання вуглецевих виробів / Л.К. Жученко // Вчені записки Таврійського Національного Університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки. – Київ, 2022. – Т. 33(72), № 5.– С. 81–85. https://doi.org/10.32782/2663-5941/2022.5/11
4. Куцан Ю.Г. Кіберзагрози в електроенергетичних системах України / Ю.Г. Куцан, В.О. Гурєєв, Є.М. Лисенко, О.В. Аветісян // Електронне моделювання. – 2019. – Т. 41. № 2. – С. 63–80.
5. Pavlichkov S. A small gain theorem for finite-time input-to-state stability of infinite networks and its applications / S. Pavlichkov // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2021. – Vol. 94. – P. 40–59. https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-94-03
6. Asrorov F., Sobchuk V., Kurylko O. Finding of bounded solutions to linear impulsive systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 6. No. 4 (102): Mathematics and Cybernetics - applied aspects. P. 14–20. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.178635
7. Korobov V.I., Revina T.V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system. IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2021. Vol. 38. Issue 1. P. 396–416 https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035
8. Davydenko N., Ivanko A., Nehoda Y., Titenko Z. Prognostication of Financial Providing of Innovative Activities of Enterprises. Distributed Sensing and Intelligent Systems. Studies in Distributed Intelligence. 2022. P. 241-250. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64258-7_22
9. Levkin A., Abuselidze G., Berezhna N., Levkin D., Volkova T., Kotko Y. The Quality Function in Determining the Effectiveness of Example Bioeconomics Tasks. Rural Sustainability Research. 2022. Vol. 48. Issue 343. P. 91–102. DOI 10.2478/plua-2022-0019
10. Левкін Д.А. Архітектоніка розрахункових математичних моделей в умовах невизначеності / Д.А. Левкін // Вісник Хмельницького національного університету. Серія «Технічні науки». – Хмельницький, 2022. – Issue 3. Vol. 309. – С. 135–137. DOI 10.31891/2307-5732-2022-309-3-135-137

References

1. Maliarenko O.Ie. Utochnennia metodyky prohnozuvannia popytu na palyvo z otsinkoiu strukturnoho potentsialu enerhozberezhennia v enerhetychnomu sektori / O.Ie. Maliarenko, V.V. Stanytsina // Problemy zahalnoi enerhetyky. – 2019. – № 1. – S. 19–23.
2. Kulyk M.M. Analiz stanu rozvytku system teplopostachannia v Ukraini / M.M. Kulyk, H.O. Kuts, V.D. Bilodid // Problemy zahalnoi enerhetyky. – 2006. – № 14. – S. 13–24.
3. Zhuchenko L.K. Postanovka zadachi optymalnoho keruvannia protsesom vypaliuvannia vuhletsevykh vyrobiv / L.K. Zhuchenko // Vcheni zapysky Tavriiskoho Natsionalnoho Universytetu imeni V.I. Vernadskoho. Seriia: Tekhnichni nauky. – Kyiv, 2022. – T. 33(72), № 5.– S. 81–85. https://doi.org/10.32782/2663-5941/2022.5/11
4. Kutsan Yu.H. Kiberzahrozy v elektroenerhetychnykh systemakh Ukrainy / Yu.H. Kutsan, V.O. Hurieiev, Ye.M. Lysenko, O.V. Avetisian // Elektronne modeliuvannia. – 2019. – T. 41. № 2. – S. 63–80.
5. Pavlichkov S. A small gain theorem for finite-time input-to-state stability of infinite networks and its applications / S. Pavlichkov // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2021. – Vol. 94. – P. 40–59. https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-94-03
6. Asrorov F., Sobchuk V., Kurylko O. Finding of bounded solutions to linear impulsive systems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 6. No. 4 (102): Mathematics and Cybernetics - applied aspects. P. 14–20. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.178635
7. Korobov V.I., Revina T.V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system. IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2021. Vol. 38. Issue 1. P. 396–416 https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035

8. Davydenko N., Ivanko A., Nehoda Y., Titenko Z. Prognostication of Financial Providing of Innovative Activities of Enterprises. Distributed Sensing and Intelligent Systems. Studies in Distributed Intelligance. 2022. P. 241-250. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64258-7_22

9. Levkin A., Abuselidze G., Berezhna N., Levkin D., Volkova T., Kotko Y. The Quality Function in Determining the Effectiveness of Example Bioeconomics Tasks. Rural Sustainability Research. 2022. Vol. 48. Issue 343. P. 91–102. DOI 10.2478/plua-2022-0019

10. Levkin D.A. Arkhitektonika rozrakhunkovykh matematychnykh modelei v umovakh nevyznachenosti / D.A. Levkin // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Seriia «Tekhnichni nauky». – Khmelnytskyi, 2022. – Issue 3. Vol. 309. – S. 135–137. DOI 10.31891/2307-5732-2022-309-3-135-137