

БАГРІЙ ОЛЕНА

Хмельницький національний університет

ORCID ID: [0000-0003-2267-7162](https://orcid.org/0000-0003-2267-7162)e-mail: bahriio@khmnu.edu.ua

ВИКОРИСТАННЯ СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ БОКОВОГО ТИСНЕННЯ МАСИВУ СІПКОГО СЕРЕДОВИЩА НА ПІДПІРНУ СТІНКУ ПРИ ЇЇ ЗМІЩЕННІ

Задача визначення тиснення сипкого середовища на підпирну стінку залежно від її переміщень є важливою задачею будівельної механіки. Існуючі бездеформаційні методи дозволяють знаходити тільки значення тиснень в момент переходу матеріалу в граничний стан. Підпирні ж стінки, як й інші інженерні конструкції, працюють у дограничній стадії. Вказана інженерна задача розглянута для перевірки достовірності розробленої нелінійної моделі. В статті сформульоване математичне представлення крайової задачі, що моделювалась на експериментальному стенді. Розглядається плоска розрахункова область прямокутної форми, що заповнена матеріалом з нелінійними законами деформування. Задача полягає у визначенні напруженого стану області від дії власної ваги матеріалу і горизонтального зміщення стінки. При виборі розрахункової схеми для комп'ютерного розв'язання задачі максимально можливо враховувались умови роботи масиву піску в стендовому експерименті. Проведено порівняння результатів комп'ютерного моделювання задачі та паралельного великомасштабного стендового моделювання взаємодії жорсткої вертикальної стінки з дискретним матеріалом засипки.

Ключові слова: підпирна стінка, сипке середовище, внутрішнє тертя, граничний стан, плоска деформація.

BAHRII OLENA

Khmelnitskyi National University

USING A FINITE ELEMENT MODEL TO DETERMINE LATERAL PRESSURE OF A GRANULAR MEDIUM ON A RETAINING WALL UNDER DISPLACEMENT

The problem of determining the pressure of a granular medium on a retaining wall depending on its displacement is an important problem in structural mechanics. Existing non-deformation methods only allow finding the pressure values at the moment of material transition to a limit state. Retaining walls, like other engineering structures, operate in a limit state. The mentioned engineering problem is considered to verify the accuracy of the developed nonlinear model. The article formulates a mathematical representation of the boundary problem that was modelled on an experimental stand. The environment that contacts the wall operates under conditions close to plane deformation, since there is no displacement in the direction perpendicular to the glass side walls. If neglect the frictional forces on the side walls, the estimation of the stress-strain state of the medium can be reduced to a two-dimensional problem based on deformation. The analysis is focused on a flat rectangular computational domain filled with a material with nonlinear deformation laws. The problem involves determining the stress state of the area under the influence of the material's own weight and the horizontal displacement of the wall.

To obtain a unique solution to the problem, it is necessary to ensure the fulfilment of static equilibrium conditions, geometric conditions of continuity (inseparability) of deformations adopted in the model of physical relationships, as well as to satisfy boundary conditions that correspond to the specific problem-solving scheme. The problem is solved using the finite element method. When choosing the calculation scheme for computer solution of the problem, the conditions of the sand mass operation in the experimental stand are considered as much as possible. The boundary conditions corresponding to the calculation scheme and the structure of the canonical equations of the displacement method of structural mechanics are considered in solving the problem. A comparison of the results of computer modelling of the problem and parallel large-scale modelling of the interaction of a rigid vertical wall with discrete filling material was made.

Keywords: retaining wall, granular medium, internal friction, boundary state, plane deformation

Постановка проблеми

Для деяких задач механіки деформівного твердого тіла достовірність і адекватність чисельних методів вдається довести шляхом порівняння результатів чисельного і аналітичного розв'язків однієї і тієї ж сталонної задачі. Для нелінійних задач механіки дискретних матеріалів аналітичні рішення не одержані. Тому єдиним можливим доказом достовірності і адекватності запропонованої розрахункової моделі імовірно є паралельне комп'ютерне і стендове (фізичне) моделювання однієї і тієї ж задачі.

Метою роботи є порівняння результатів розв'язання задачі з використанням комп'ютерного моделювання та паралельного великомасштабного стендового моделювання взаємодії вертикальної стінки з піском для перевірки достовірності розроблених алгоритмів та математичної моделі.

Виклад основного матеріалу

Стендове моделювання задачі

В сімдесятих роках під керівництвом доцента Лубенова Р.М. в лабораторії портових гідротехнічних споруд Одеського національного морського університету були проведені унікальні експериментальні дослідження, в яких на великомасштабних стендах моделювалась робота жорстких підпирних стін при їх зміщенні в сторону "від засипки". Результати досліджень детально описані в роботах М.М. Варгіна [1, 2]. В цих дослідженнях використовувався кварцовий дрібнозернистий пісок середньої щільності Люберецького родовища, фізико-механічні характеристики якого наведені в [3]. Саме з цим піском проведені лабораторні дослідження [4] на приладі плоскої деформації [5], що дало змогу в порівняльних розрахунках використовувати реальні деформаційні параметри нелінійних залежностей.

Експериментальний великомасштабний стенд (рис. 1, 2) являв собою камеру зі скляними боковими

стінками. Висота камери 1.9 м, ширина 1.51 м, довжина 3.6 м. Підпірну стінку моделював жорсткий вертикальний щит 2.48×1.48 м.

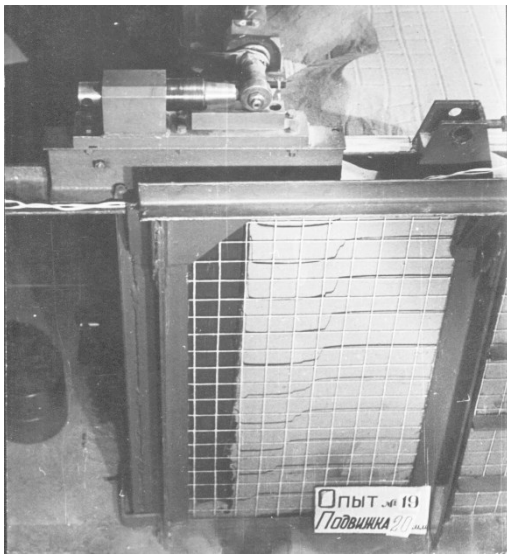


Рис. 1. Загальний вигляд випробувального стенда

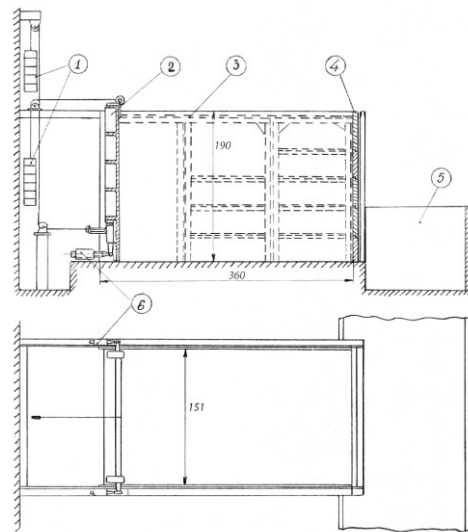


Рис. 2. Схема випробувального стенда

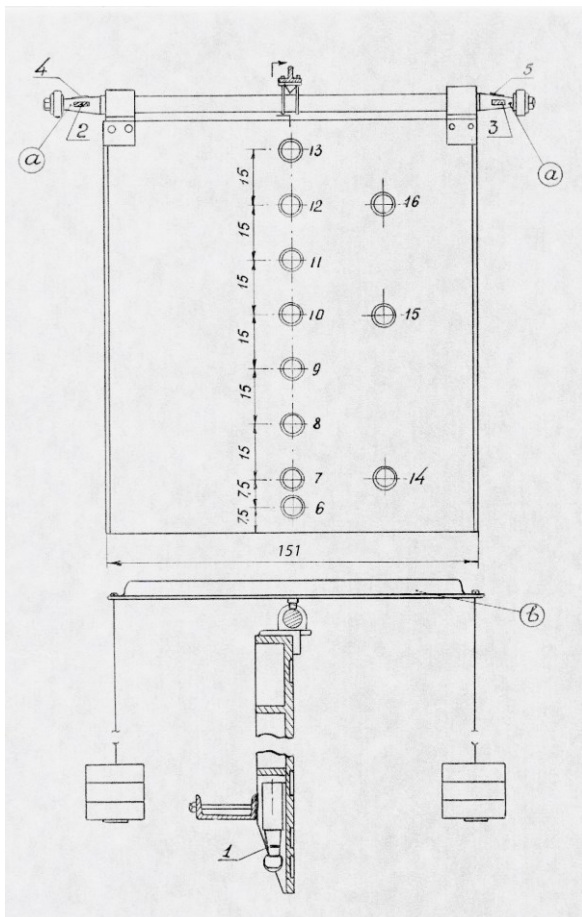


Рис. 3. Розташування тензометричних датчиків

Щит опирався на три гвинтові опори, що сприймали горизонтальні сили тиснення піску, і був підвішений на двох рухомих шарнірних опорах, які сприймали вертикальні складові сил тиснення. За допомогою гвинтових опор стінці можна було надавати фіксовані додаткові горизонтальні переміщення. Тиснення ґрунту на контактну грань стінки замірялось з допомогою встановлених по її висоті через 0.15 м тензометричних дискових датчиків (рис. 3). Сумарні сили тиску піску на стінку фіксувались за допомогою тензорезисторів, наклеєних на його опори. Переміщення контактної грані замірялись індикаторами з точністю 10^{-5} м.

Після завантаження камери піском на повну висоту фіксувалось початкове переміщення стінки, яке відбувалось за рахунок деформації опор. Ці переміщення склали $1.68 \cdot 10^{-4}$ м і не враховувались в комп'ютерному моделюванні. Далі за допомогою гвинтових опор модель підпірної стінки додатково переміщували ступенями в сторону "від засипки". На кожному ступені замірялись переміщення контактної грані стінки, інтенсивність бокового тиснення піску і загальні сили тиску. Конкретні значення цих показників наведені у [1]. Описану процедуру стендового моделювання ретельно відтворено в комп'ютерному моделюванні за допомогою описаного в [6] програмного комплексу.

Математичне формулювання задачі

Описана в інженерна задача щодо визначення тиснення сипкого середовища на підпірну стінку за

умови її зміщення в сторону "від засипки" на фіксовану величину Δ^* в спрощеній формі розглядалась у працях Б. Хансена [7], докторських дисертаціях Ф.М. Шихієва [8] і М.П. Дубровського [9], в багатьох кандидатських дисертаціях. Однак розв'язок коректно сформульованої крайової задачі дотепер не одержано.

Розглянемо постановку задачі, що моделювалась на експериментальному стенді на базі описаної у попередніх розділах моделі.

Середовище, що контактує зі стінкою, працює в умовах близьких до плоскої деформації, оскільки переміщення у перпендикулярному до скляних бокових стінок напрямку відсутні. Якщо знехтувати силами тертя по бокових стінках, то оцінка напружено-деформованого стану середовища може бути зведена до плоскої за деформаціями задачі.

Розглядається плоска розрахункова область прямокутної форми (рис. 4), що заповнена матеріалом з нелінійними законами деформування [10]. Задача полягає у визначенні напруженого стану області від дії власної ваги матеріалу і горизонтального зміщення Δ^* стінки.

Розрахункова область обмежена горизонтальними поверхнями $y=0$ та $y=1.9$ і вертикальними поверхнями $x=0$ та $x=3.6$.

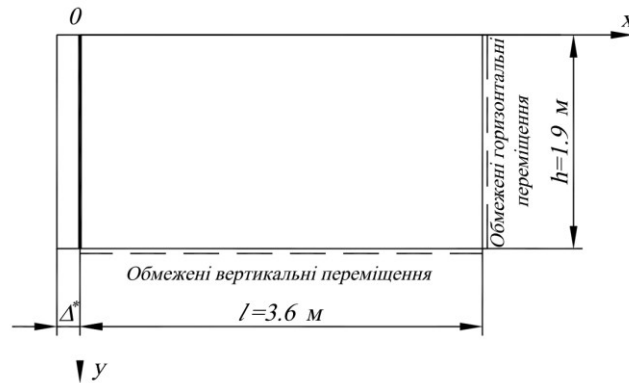


Рис. 4. Схема розрахункової області

Для одержання єдиного рішення задачі необхідно забезпечити виконання статичних умов рівноваги, геометричних умов суцільності (нерозривності) деформацій, прийнятих в моделі фізичних співвідношень, а також задовольнити крайові умови, що відповідають розрахунковій схемі конкретної задачі.

Статичні умови

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + q = 0,$$

де q – масова сила – питома вага матеріалу засипки;

геометричні лінійні диференціальні співвідношення Коші, що зводяться до умови нерозривності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

нелінійні фізичні співвідношення моделі

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{zm} + 2G_{zm}}{2} \varepsilon_x + \frac{K_{zm} - 2G_{zm}}{2} \varepsilon_y; \\ \sigma_y &= \frac{K_{zm} - 2G_{zm}}{2} \varepsilon_x + \frac{K_{zm} + 2G_{zm}}{2} \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= G_{zm} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\},$$

$$\text{де } G_{zm} = \frac{n}{m + \Gamma} P, \quad K_{zm} = 2G_{zm} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}.$$

Крайові умови відображають особливості роботи розрахункової області і формуються залежно від структури розв'язуючих рівнянь вибраного методу.

Крайові умови задачі, що розглядається, повинні відображати такі особливості деформування розрахункової області (рис. 4):

- горизонтальні переміщення точок контактної грані дорівнюють фіксованій в експерименті величині Δ^* , для точок $(x=0; y[0 \div 1.9])$ $u_x = \Delta^*$;
- горизонтальні переміщення точок тилової нерухомої грані дорівнюють нулю, для точок $(x=3.6; y[0 \div 1.9])$ $u_x = 0$;
- вертикальні переміщення точок на дні стенда дорівнюють нулю, для точок $(x[0 \div 3.6]; y=1.9)$ $u_y = 0$;
- переміщення точок вільної поверхні $(x[0 \div 3.6]; y=0)$ не обмежуються.

Розв'язання задачі ведеться методом скінчених елементів [10], можливість використання якого для випадку середовища, що не сприймає розтягуючих напружень, обґрунтована у монографії О. Зенкевича [11, с. 415], а задання крайових умов у дискретній формі [11, с. 414].

Комп'ютерне моделювання задачі

При виборі розрахункової схеми для комп'ютерного розв'язання задачі максимально можливо враховувались умови роботи масиву піску в стендовому експерименті.

Вважалось, що масив працює в умовах плоскої деформації, оскільки по бокових гранях він обмежений скляними стінками, які забезпечують неможливість деформування в поперечному напрямі, силами тертя по усіх обмежуючих поверхнях нехтується.

Скінчено-елементна (дискретна) модель розрахункової області показана на рис. 5. Дискретну модель складають 360 елементів у формі трикутних призм і 209 вузлів.

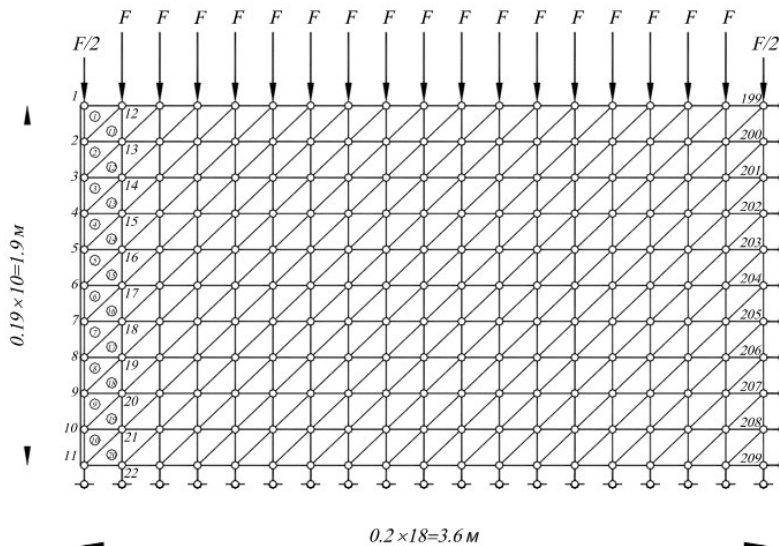


Рис. 5. Скінчено-елементна модель розрахункової області

Вузли $1 \div 11$ ($x = 0; y[0 \div 1.9]$) лежать на контактній грані стінки, якій в експерименті надають фіксовані горизонтальні переміщення Δ^* . Вузли $199 \div 209$ ($x = 3.6; y[0 \div 1.9]$) співпадають з нерухомою тиловою гранню масиву, вузли ($x[0 \div 3.6]; y = 1.9$) співпадають з нижньою гранню масиву (з дном лотка).

Неможливість горизонтальних переміщень вузлів $199 \div 209$ на тилівій грані і вертикальних переміщень вузлів на нижній грані врахована показаними на розрахунковій схемі зовнішніми в'язями.

При розв'язанні задачі враховані крайові умови, що відповідають розрахунковій схемі і структурі канонічних рівнянь методу переміщень будівельної механіки [10].

Кінематичні крайові умови задаються як рівність нулю вузлових переміщень по напрямку введених на межі області зовнішніх в'язів:

- для вузлів з координатами ($x = 3.6; y[0 \div 1.9]$) горизонтальне переміщення $\delta_x = 0$;
- для вузлів з координатами ($x[0 \div 3.6]; y = 1.9$) вертикальне переміщення $\delta_y = 0$.

Кінематичне навантаження області розглядається як відомі з експерименту переміщення δ_x^* контактних вузлів.

Для вузлів з координатами ($x = 0; y[0 \div 1.9]$) переміщення $\delta_x = \Delta^*$.

Вектор вузлових переміщень $\{\delta\}$, що включає відомі з крайових умов компоненти, трансформується за допомогою підпрограми DIS [12] у вектор вузлових сил, який входить в систему канонічних рівнянь методу переміщень.

Силі крайові умови зводяться до задання відомих величин вузлових сил як компонентів вектора $\{R\}$ зовнішнього навантаження. В задачі, що розглядається, зовнішнім навантаженням є тільки власна вага. Розподілена по об'єму елемента власна вага приводиться до вузлових сил (на розрахунковій схемі не показані), які за допомогою підпрограми SILA [12] автоматично враховуються як компоненти заданого вектора $\{R\}$.

В розрахунках приймалися фізико-механічні характеристики кварцового піску середньої щільності, який використовувався у стендовому експерименті: коефіцієнт пористості $e = 0.72$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.39$, об'ємна маса $\rho = 1565 \text{ кг/м}^3$, деформаційні параметри нелінійних залежностей моделі

$n = 0.4115$, $m = 0.02817$, величина відносного початкового модуля зсуву $G_0 = \frac{n}{m} = 14.6$. Кут внутрішнього тертя $\varphi = 40^\circ 10'$.

Розрахунки проведені для трьох випадків, що відповідають різним переміщенням контактної грані: $\Delta_1 = 0.168$ мм, $\Delta_2 = 0.328$ мм, $\Delta_3 = 1.028$ мм.

Кінцевим результатом розрахунків є значення напружень у кожному скінченному елементі.

Порівняння результатів стендового та комп'ютерного моделювання

Для порівняння напружень в контактних елементах з показниками датчиків, розрахункові напруження приводились до місць установки контактних датчиків.

На рис. 6 показані експериментальні і розрахункові епюри для трьох переміщень стінки $\Delta = 0.168$ мм, $\Delta = 0.328$ мм, $\Delta = 1.028$ мм, а також епюри тиснень на нерухому стінку ($\Delta = 0$) і епюри, що відповідають граничному тисненню за Кулоном.

Експериментальні епюри контактних тиснень [1] завжди мали зубчастий пилкоподібний вигляд, а розрахункові епюри, описувались монотонними кривими.

Як видно з рисунку, і експериментальна, і розрахункова епюри лежать між граничною епюрою і епюрою тиснення на нерухому стінку. Характер експериментальних і розрахункових епюр (випуклість "в сторону засипки") однаковий. Ординати розрахункових епюр завжди перевищують ординати експериментальних. В окремих перерізах різниця досягає 28%. Це пояснюється тим, що в комп'ютерному розрахунку нехтувалось силами тертя, які діють по поверхнях обмеження масиву, а також використанням у стендовому моделюванні датчиків мембранного типу, для яких властивий прояв аркового ефекту (зменшення сили тиску на датчик за рахунок утворення арки з частинок матеріалу при прогині мембрани).

Загальну силу тиску піску на стінку можна визначити як добуток площі епюр контактних тисків на ширину камери. Розходження між розрахунковим значенням сили і зафіксованим датчиками на опорах штампа не перевищувало 12%.

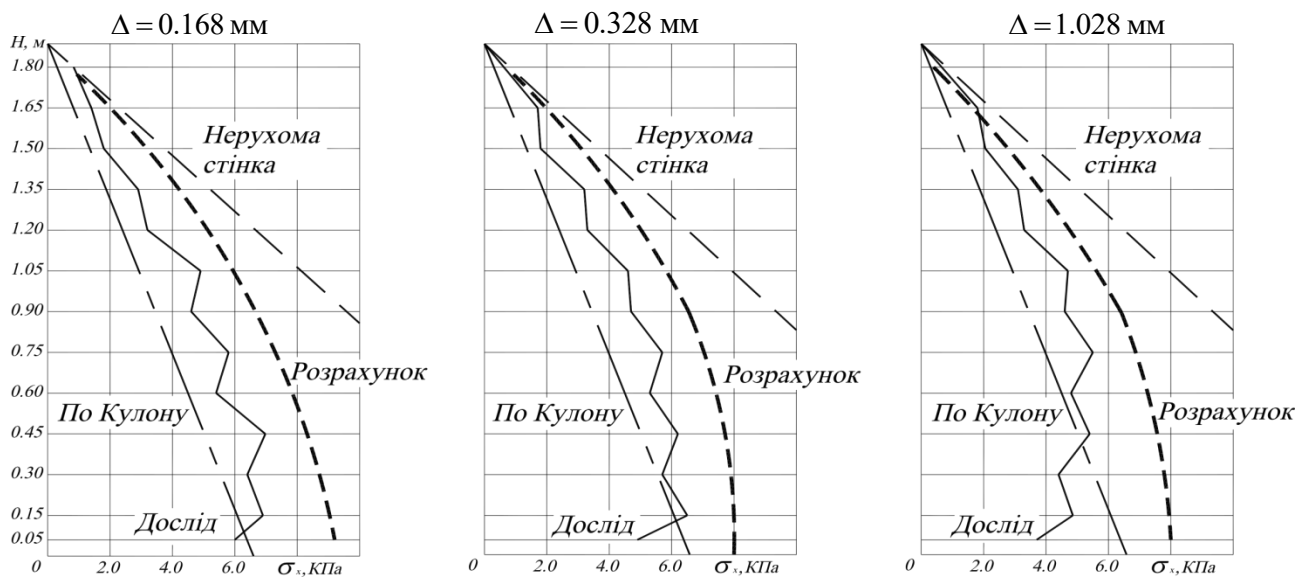


Рис. 6. Експериментальні і розрахункові епюри

Якщо врахувати складність задачі і можливі похибки експерименту, такі розходження можна вважати задовільними.

Висновки

Розглянуто приклад розв'язання інженерної задачі: визначення бокового тиснення масиву піску на підпірну стінку з урахуванням переміщення її контактної грані. Проведено порівняння результатів комп'ютерного моделювання задачі та паралельного великомасштабного стендового моделювання взаємодії жорсткої вертикальної стінки з дискретним матеріалом засипки. Порівняння результатів показало їх достатню збіжність: розходження ординат епюр бокових тиснень складає 28%, розходження між розрахунковими і експериментальними силами тиску близько 12%.

Література

1. Варгин М. Н. Исследование зависимости давления грунта от смещений подпорной стенки / М. Н. Варгин // Гидротехническое строительство. – 1968. – № 12. – С. 11–14.
2. Варгин М. Н. Исследование взаимодействия грунтовой засыпки и причальных сооружений типа жестких стен в условиях водной среды : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.473 "Морские и речные порты" / М. Н. Варгин. – Одесса, 1971. – 19 с.

3. Багрій О. В. Вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів з малою зв'язністю / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2013. – № 4. – С. 114–120.
4. Багрій О. В. Аналіз впливу внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2014. – № 4. – С. 37–43.
5. Багрій О. В. Обладнання та методика лабораторних випробувань зразків дискретних матеріалів в умовах плоскої деформації / О. В. Багрій, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 2. – С. 31–39.
6. Багрій О. В. Програмна реалізація ітераційних алгоритмів для розв'язання плоскої фізично нелінійної задачі / О. В. Багрій // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2022. – № 5. – С. 108–112.
7. Hansen B. Line ruptures regarded as a narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations. Proc. Conf. Earth Pres. Probl. 1958. № 1, P. 124–126.
8. Шихиев Ф. М. Кинематическая теория давления грунтов на причальные сооружения и другие типы жестких и гибких ограждений : дис. ... доктора техн. наук : 05.22.18 / Шихиев Фуад Мувсумович. – Одесса : ОИИМФ, 1964. – 471 с.
9. Дубровский М. П. Кинематика взаимодействия портовых гидротехнических сооружений с грунтовой средой : дис. ... доктора техн. наук : 05.22.18 / Дубровский Михаил Павлович. – Одесса : ОГУ, 1994. – 310 с.
10. Bagrii O. V. Plane problem of discrete environment mechanics. Problems of Tribology. 2022. № 2. P. 104–111.
11. Zenkevich O. Метод конечных элементов в технике / Zenkevich O. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
12. Ковтун В. В. Программный комплекс для решения задач нелинейной механики грунтов с помощью ЭВМ / В. В. Ковтун // Современные проблемы нелинейной механики грунтов. – Челябинск, 1985. – С. 136–137.

References

1. Vargin M. N. Issledovanie zavisimosti davlenija grunta ot smeshhenij podpornoj stenki / M. N. Vargin // Gidrotehnicheskoe stroitel'stvo. – 1968. – № 12. – S. 11–14.
2. Vargin M. N. Issledovanie vzaimodejstvija gruntovoj zasypki i prichal'nyh sooruzhenij tipa zhestkih sten v uslovijah vodnoj sredy : avtoref. dis. na zdobuttja nauk. stupenja kand. tehn. nauk : spec. 05.473 "Morskie i rechnye porty" / M. N. Vargin. – Odessa, 1971. – 19 s.
3. Bahrii O. V. Vplyv vnutrishnoho kulonovoho tertia na deformuvannia kompozytnykh materialiv z maloju zviaznistiu / O. V. Bahrii // Problemy trybolohii (Problems of Tribology). – 2013. – № 4. – S. 114–120.
4. Bahrii O. V. Analiz vplyvu vnutrishnoho kulonovoho tertia na deformuvannia kompozytnykh materialiv / O. V. Bahrii // Problemy trybolohii (Problems of Tribology). – 2014. – № 4. – S. 37–43.
5. Bahrii O. V. Obladnannia ta metodyka laboratornykh vyprobuvan zrazkiv dyskretnykh materialiv v umovakh ploskoi deformatsii / O. V. Bahrii, V. V. Kovtun // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2013. – № 2. – S. 31–39.
6. Bahrii O. V. Prohramna realizatsiia iteratsiinykh alhorytmiv dlia rozv'iazannia ploskoi fizychno neliniinoi zadachi / O. V. Bahrii // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2022. – № 5. – S. 108–112.
7. Hansen B. Line ruptures regarded as a narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations. Proc. Conf. Earth Pres. Probl. 1958. № 1, P. 124–126.
8. Shihiev F. M. Kinematischekaja teorija davlenija gruntov na prichal'nye sooruzhenija i drugie typy zhestkih i gibkih ograzhdenij : dis. ... doktora tehn. nauk : 05.22.18 / Shihiev Fuad Muvsumovich. – Odessa : OIIMF, 1964. – 471 s.
9. Dubrovskij M. P. Kinematika vzaimodejstvija portovyh gidrotehnicheskikh sooruzhenij s gruntovoj sredoj : dis. ... doktora tehn. nauk : 05.22.18 / Dubrovskij Mihail Pavlovich. – Odessa : OGU, 1994. – 310 s.
10. Bagrii O. V. Plane problem of discrete environment mechanics. Problems of Tribology. 2022. № 2. R. 104–111.
11. Zenkevich O. Метод конечных элементов в технике / Zenkevich O. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
12. Kovtun V. V. Programmnyj kompleks dlja reshenija zadach nelinejnoi mehaniki gruntov s pomoshh'ju JeVM / V. V. Kovtun // Sovremennye problemy nelinejnoi mehaniki gruntov. – Cheljabinsk, 1985. – S. 136–137.