

СИНЮК ОЛЕГ

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-9615-0729>e-mail: [oleg.synjuk@khmnu.edu.ua](mailto:oleg.synjuk@khmnu.edu.ua)

ПОЛІЩУК ОЛЕГ

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-9764-8561>e-mail: [polishchuko@khmnu.edu.ua](mailto:polishchuko@khmnu.edu.ua)

КУНЦОВ ОЛЕКСАНДР

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0007-8825-9285>e-mail: [kuntsov.oleksandr@khmnu.edu.ua](mailto:kuntsov.oleksandr@khmnu.edu.ua)

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗАПОВНЕННЯ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ ПОРОЖНИНИ ПРЕС-ФОРМИ ДЛЯ ЛИТТЯ ДЕТАЛЕЙ ВЗУТТЯ

*Змодельований процес руху в'язкої рідини в порожнині прес-форми за допомогою скінчено-елементного методу. Використання програмного комплексу Moldex3D дозволило візуалізувати процес заповнення порожнини прес-форми при виготовленні подошви. Комплекс включає інструменти, що забезпечують автоматичну дискретизацію вихідної області на трикутні елементи, формування матриці скінчених елементів з урахуванням граничних умов та розв'язання системи лінійних рівнянь.*

*Запропонована математична модель течії в'язкої рідини у порожнині прес-форми та спосіб її реалізації за допомогою комплексу програм Moldex3D дозволить визначати оптимальні конструкції прес-форм та технологічні режими процесу їх заповнення полімерним матеріалом.*

*Ключові слова: прес-форма, розплав полімеру, лиття під тиском, модель, метод скінчених елементів, програмний комплекс Moldex3D.*

SYNYUK OLEG, POLISHCHUK OLEH, KUNTSOV OLEKSANDR

Khmelnitskyi National University

## SIMULATION OF THE PROCESS OF FILLING WITH A VISCOUS LIQUID THE CAVITY OF THE PRESS-FORM FOR MOLDING OF SHOE PARTS

*The article considers the determination of the optimal structural and technological parameters of injection molding, which are necessary to simulate the process of filling the mold cavity with a viscous liquid, which involves the construction of a numerical model of the flow of a viscous liquid in the mold cavity. The simulated process of the movement of a viscous liquid in the mold cavity using the finite element method. The implementation of the finite element method in the presented form leads to a symmetrical system of linear algebraic equations relative to the unknown nodal values of the velocity and pressure vector components. The use of the Moldex3D software complex made it possible to visualize the process of filling the cavity of the mold during the manufacture of the sole. The complex includes tools that provide automatic discretization of the initial area into triangular elements, formation of the matrix of finite elements taking into account the boundary conditions and solving the system of linear equations. By varying the location of the inlets and their diameters (that is, the initial values of the melt velocities in each inlet), it is possible to achieve the optimal location of the joining lines (places where the polymer solution flows are welded). Thus, simulating the process of filling the mold cavity with PVC material through the four inlet holes, it is possible to observe the process of formation of joints.*

*The proposed mathematical model of the flow of a viscous liquid in the cavity of the mold and the method of its implementation using the Moldex3D software complex will allow determining the optimal design of the molds and the technological modes of the process of filling them with polymer material.*

*Key words: mold, polymer melt, injection molding, model, finite element method, Moldex3D software complex.*

### Вступ

Якість полімерних виробів легкої промисловості багато у чому залежить від конструкції прес-форм, характеристик полімерного матеріалу та технологічних режимів їх заповнення. З метою проектування прес-форми та визначення технологічних параметрів режиму її заповнення і охолодження потрібно підібрати оптимальні конструкційні та технологічні параметри лиття під тиском, які сприятимуть забезпеченню низької усадки виробу та мінімізації його короблення.

З метою визначення оптимальних конструкційних і технологічних параметрів лиття під тиском необхідно змодельувати процес заповнення порожнини прес-форми в'язкою рідиною, що передбачає побудову числової моделі плин у в'язкої рідини в порожнині прес-форми. Сьогодні існує велика кількість числових методів моделювання плин рідини.

Для моделювання процесу заповнення полімерним матеріалом формотворних порожнин великих розмірів, що характеризується значним переміщенням в'язкої рідини, застосовують метод Ейлера [1], коли розплав рухається крізь сітку комірок, при цьому останні нерухомі. При невеликих переміщеннях полімерного матеріалу використовується метод Лагранжа [2], коли рухається сітка комірок, тобто цей метод краще використовувати для дослідження процесів течій полімеру, де не відбувається великих деформацій.

Існують підходи, що позбавлені недоліків чисто ейлеревих або чисто лагранжевих методів. Це спільні лагранжево-ейлерові методи, найбільш відомими з яких числові методи MAC та MCE.

На сьогодні найбільш поширеним методом, що моделює течію в'язкої рідини в формотворній порожнині прес-форми, є метод маркерів і комірок (МАС) [3]. Однак метод МАС у вигляді, який подається в сучасних наукових працях, дозволяє описувати процес заповнення розплавом полімеру формотворної порожнини простої геометрії. Але у практиці литтєвого формування полімерних матеріалів східчасті канали майже не зустрічаються. Формотворні порожнини прес-форм зазвичай мають складний вигляд, що відповідає формі готового виробу.

З огляду на це для моделювання течії в'язкої рідини найбільш доцільно використовувати метод скінчених елементів (МСЕ) [4], який найшов широке застосування у різних областях науки і техніки.

#### Аналіз літературних даних и постановка проблеми

Перед усім відмітимо роботи, в яких МСЕ безпосередньо використовувався для вирішення задач плинну рідини зі вільною поверхнею. Так, у роботі наведений численний аналіз руху нев'язкої рідини через вертикальний впускний отвір. Варіаційний принцип використовується для випадку, коли границя вільної поверхні формується силами тяжіння. Як незалежні варійовані змінні вибираються функція току і профіль вільної поверхні. Рішення приймається за допомогою ітераційної процедури. Плин рідини без деформування вільної поверхні розглянуто у роботі [5].

Велика кількість робіт присвячена вивченню явища розбухання струменя при виході його з циліндричного впускного отвору (ця задача вирішувалася методом скінчених різниць у роботі [3]). В роботах [6] вирішувалися задачі формування вільної поверхні, що виходить із капілярного отвору під дією поверхневого натягу, сил пружності та перерозподілу швидкостей.

У роботі [4] за допомогою різноманітних модифікацій МСЕ вирішені завдання руху рідини через вертикальний впускний отвір, утворення хвилі на поверхні рідини, що знаходиться у циліндричному посуді.

У роботі [3] запропоновано механізм використання методу МАС для повзучих течій в'язкої рідини.

Вітчизняних робіт, у яких застосовувався б МСЕ до розрахунку течій з вільною поверхнею, вкрай мало. Це роботи [7, 8], в яких при чисельній реалізації як функцій, що варіюються, використані компоненти тензора напружень і вектору швидкості. Як приклади в цих роботах представлені процеси витікання рідини із зазору між плитами, витікання неньютонівської рідини з циліндричного впускного отвору, розташованого під кутом до осі та розтікання циліндричного стовпа в'язкої рідини під дією сили тяжіння.

На сьогоднішній день є недостатня кількість робіт, в яких вивчаються технологічні процеси ливарного формування полімерів із застосування методу скінчених елементів. Зазначимо тут роботи [4], які присвячені розрахунку інжекційного формування, при якому відбувається заповнення плоскої щілини, при цьому в плані вільна поверхня зазнає великих формозмін. З останніх вітчизняних робіт у цьому плані слід зазначити роботи [9, 10], у яких вирішена задача про повне заповнення порожнини прес-форми неньютонівською рідиною, причому з урахуванням кінетики затвердіння полімеру.

У даній роботі наводиться математичне формулювання завдання з позицій ейлерової і лагранжевої концепцій течії з тими ж припущеннями, що і при використанні методу МАС, що впливають зі специфіки повільного ізотермічного течії високов'язкої рідини, яке має місце в деяких процесах ливарного формування [3].

Запропоновані обмеження задачі дозволили спростити проблему та побудувати алгоритм визначення невідомих швидкостей та тиску в області, відомої з попереднього часового кроку або початкових умов. Така крокова процедура за часом та невеликі градієнти швидкостей деформації реального процесу дозволили знехтувати конвективними членами та не розрізняти ейлеровий та лагранжевий погляди при моделюванні процесу.

#### Формулювання задачі плинну ньютонівської рідини в порожнині прес-форми та її скінчено-елементна реалізація

Варіаційний принцип для задачі плинну ньютонівської рідини розглядався у роботі [11], згідно якої функціонал, що відповідає згаданому принципу, має вигляд:

$$J(\vartheta, p) = \int_{\Omega} (-pd_{i,i} + \mu d_{i,j}d_{i,j} - f_i\vartheta_i) d\Omega - \int_{\Pi} \bar{t}_i\vartheta_i d\Pi. \quad (1)$$

Тут параметрами, що варіюються, є вектор швидкості  $\vartheta$  з компонентами  $u_i$  та  $v_i$  та скалярна величина тиску  $p$ ;  $d_{i,j}$  – компоненти тензора швидкостей деформації;  $\mu$  – динамічна в'язкість рідини;  $f_i$  – компоненти вектора масових сил;  $\Omega$  – об'єм, що займається рідиною;  $\Pi$  – частина поверхні, де задані зусилля  $\bar{t}_i$ . Для випадку течії рідини, на вільну поверхню якої не діють навантаження, поверхневий інтеграл (1) зникає, тобто рівняння набудуть такого вигляду:

$$J(\vartheta, p) = \int_{\Omega} (-pd_{i,i} + \mu d_{i,j}d_{i,j} - f_i\vartheta_i) d\Omega. \quad (2)$$

Згідно з варіаційним принципом [11] векторне поле швидкості та скалярне поле тиску задовольняє рівнянням (1), (2) та граничним умовам для швидкостей. Тоді функціонал (2) набуває стаціонарного значення у тому випадку, якщо стан  $(\vartheta, p)$  являє собою розв'язок крайової задачі плинну нестискаємої ньютонівської рідини з вільною поверхнею.

Виведемо матричні рівняння для реалізації методу скінчених елементів. Для цього запишемо функціонал для суцільного середовища, розділеного на елементи, що зв'язані у вузлах сітки.

$$J(\vartheta, p) = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega} (\{p^m\}^T \{d^m\} + \mu_m \{d^m\}^T \{d^m\} - \{\vartheta^m\}^T \{f^m\}) d\Omega_m. \quad (3)$$

Тут  $M$  – кількість елементів;  $\Omega_m$  – об'єм елемента  $m$ ;  $\mu_m$  – в'язкість рідини у елементі  $m$ ; індекс  $T$  означає транспонування вектору.

Всередині кожного елемента скалярне поле тиску та векторне поле швидкості апроксимуються алгебраїчними поліномами щодо просторових координат:

$$\{\vartheta^m\} = [e^m(x)]\{\alpha_1^m\}; \quad \{p^m\} = [c^m(x)]\{\alpha_2^m\} \quad (4)$$

Матриця  $[e^m]$  і рядок  $[c^m]$  містять алгебраїчні поліноми, а стовпці  $\{\alpha_1^m\}$  і  $\{\alpha_2^m\}$  є узагальненими змінними. Підставляючи в (4) значення координат вузлів елемента та вирішуючи отримані системи рівнянь відносно  $\{\alpha_1^m\}$  та  $\{\alpha_2^m\}$ , отримаємо зв'язок між узагальненими та фізичними змінними, тобто

$$\{\alpha_1^m\} = [\beta^m]\{\vartheta\}; \quad \{\alpha_2^m\} = [\gamma^m]\{p\}, \quad (5)$$

де стовпці  $\{\vartheta\}$  і  $\{p\}$  представляють собою значення компонент вектора швидкості  $\vartheta$  та тиску  $p$  у вузлах, а матриці перетворення  $[\beta^m]$  і  $[\gamma^m]$  залежать тільки від координат вузлів.

Якщо тиск  $p$  постійно в межах кожного елемента, то

$$p_m = [0 \dots 1 \dots 0]\{p\}, \quad (6)$$

тобто рядок містить нулі, окрім члена  $m$ . У цьому випадку поле тиску має розриви на границях елементів.

Стовпець тензора швидкостей деформацій визначається співвідношенням:

$$\{d^m\} = [a^m(x)][\beta^m]\{\vartheta\}, \quad (7)$$

де матриця  $[a^m(x)]$  отримана шляхом диференціювання матриці  $[d^m]$  за координатами у відповідності до визначення тензора швидкостей. З фізичних міркувань ясно, що  $p$  і  $\{d^m\}$  повинні бути функціями координат однакового ступеня, тому рядок  $[c^m(x)]$  (4) і матриця  $[a^m(x)]$  повинні містити поліноми однакового ступеня, а ступінь поліномів у матриці  $[d^m(x)]$  повинна бути на одиницю вищим.

Враховуючи рівняння (4), (5) і (7) запишемо функціонал (3) у вигляді:

$$J(\vartheta, p) = [p]^T [A_1]\{\vartheta\} + \{\vartheta\}^T [A_2]\{\vartheta\} - \{\vartheta\}^T \{F\}, \quad (8)$$

де

$$[A_1] = -\sum_{m=1}^M [\gamma^m]^T \int_{\Omega_m} [c^m]\{I\}^T [a^m] d\Omega_m, \quad (9)$$

$$[A_2] = \sum_{m=1}^M [\beta^m]^T \int_{\Omega_m} [a^m]^T \mu_m [a^m] d\Omega_m, \quad (10)$$

$$\{F\} = \sum_{m=1}^M [\beta^m]^T \int_{\Omega_m} [d^m]^T [f^m] d\Omega_m, \quad (11)$$

де  $\{I\} = [111000]^T$  - матричний аналог символу Кронекера, а вектор  $\{F\}$  представляє собою вектор навантаження, що включає масові сили  $[f^m]$ .

Візьмемо першу варіацію функціоналу (8) і прирівняємо її до нуля.

$$\delta J(\vartheta, p) = \{\delta p\}^T [A_1]\{\vartheta\} + \{\delta \vartheta\}^T [A_1]\{p\} + 2[A_2]\{\vartheta\} - \{F\} = 0. \quad (12)$$

Використовуючи незалежність варіацій, з рівняння (12) отримаємо систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} 2[A_2]\{\vartheta\} + [A_1]^T \{p\} = \{F\}, \\ [A_1]\{\vartheta\} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для більшої наочності можна представити систему (13) у такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} 2[A_2] & [A_1]^T \\ [A_1] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\vartheta\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \{\vartheta\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Виконання граничних умов здійснюється перетворенням відповідних рядків матриці  $[A]$  системи (14).

Вирішуючи цю систему рівнянь, можна отримати розподіл швидкості та тиску на даному часовому кроці. Процедура розрахунку течії нелінійно в'язкої рідини абсолютно аналогічна процедурі, описаної у [3]. Так само будується ітераційний процес, в якому на кожному етапі проводиться розрахунок поля швидкості рідини з в'язкістю, визначеної за відомим реологічним законом і значенням швидкостей з попереднього циклу. Ітерації тривають до того часу, поки у всіх елементах не виконається умова рівності величин інтенсивностей швидкостей зсуву із заданою ступенем точності.

Розглянемо докладніше особливості матричних рівнянь для плоского та осесиметричного випадків.

Плоский випадок. Нехай плин рідини відбувається у площині декартової системи координат  $x, y$ .

Вектор швидкості  $\vartheta$  має відповідні компоненти  $u$  і  $v$ . Розіб'ємо область течії на трикутні кінцеві елементи. Розглянемо трикутник з вузлами у вершинах, усередині якого швидкості є лінійними функціями координат:

$$\{\vartheta^m\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [e^m]\{\alpha\}, \quad (15)$$

де вектор  $\{\alpha\}$  виражається через значення вектору швидкості у вузлах у такий спосіб:

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} & 0 & \beta_{1j} & 0 & \beta_{1k} & 0 \\ 0 & \beta_{1i} & 0 & \beta_{1j} & 0 & \beta_{1k} \\ \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} & 0 \\ 0 & \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} \\ \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} & 0 \\ 0 & \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

де компоненти вектору  $\{\beta\}$  визначаються з таких рівнянь:

$$\begin{aligned}\beta_{1i} &= \frac{1}{2\Delta_m}(x_i y_k - x_k y_i), \\ \beta_{2i} &= \frac{1}{2\Delta_m}(y_i - y_k), \\ \beta_{3i} &= \frac{1}{2\Delta_m}(x_k - x_j).\end{aligned}\quad (17)$$

Інші компоненти  $\{\beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}\}$  та  $\{\beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{3k}\}$  визначаються шляхом циклічної перестановки індексів.

Тут модуль  $\Delta_m$  є площею трикутного елемента сітки (вузли  $i, j, k$  розташовані проти годинникової стрілки).

$$\Delta_m = \frac{1}{2}[x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)] \quad (18)$$

Підставивши вираз (16) у вираз (18), отримаємо рівняння, з якого можна визначити поле швидкостей рідини:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^m = [e^m][\beta^m]\{\vartheta\} = [b^m]\{\vartheta\}. \quad (19)$$

Вираз для швидкостей деформації виходить диференціюванням матриці (19) за координатами  $x$  та  $y$  відповідно із визначенням тензора швидкостей:

$$\begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ \sqrt{2}d_{xy} \end{Bmatrix} = [a^m][\beta^m]\{\vartheta\} = [e^m]\{\vartheta\}, \quad (20)$$

$$\text{де } [e^m] = \begin{bmatrix} \beta_{2i} & 0 & \beta_{2j} & 0 & \beta_{2k} & 0 \\ 0 & \beta_{3i} & 0 & \beta_{3j} & 0 & \beta_{3k} \\ \frac{\beta_{3i}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2i}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{3j}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2j}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{3k}}{\sqrt{2}} & \frac{\beta_{2k}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Компоненти матриці  $[e^m]$  не залежать від координат, тому швидкості деформації є постійними в межах елемента. Отже й тиск також постійний в межах елемента:

$$p_m = [0 \dots 1 \dots 0]\{p\} = [r^m]\{p\}, \quad (21)$$

де рядок містить усі нулі, крім елемента  $m$ .

Стовпець  $\{I\}$ , який входить у реологічне рівняння, має вигляд  $\{I\} = [1 \ 1 \ 0]^T$ .

З рівняння (9), враховуючи вирази (19)-(21), отримаємо таке рівняння:

$$[A_1]^m = \int_{\Omega_m} \{r^m\}\{I\}^T [e^m] d\Omega_m = [[A_1^i] \ [A_1^j] \ [A_1^k]] = [\beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{2j} \ \beta_{3j} \ \beta_{2k} \ \beta_{3k}] \Delta_m. \quad (22)$$

Матриця  $[A_1]^m$  має розмірність  $M \times 2N$ , де  $M$  - кількість елементів, а  $N$  - кількість вузлів сітки.

Матрицю  $[A_2]^m$  визначимо із виразу (10):

$$[A_2]^m = \int_{\Omega_m} [e^m]^T \mu_m [e^m] d\Omega_m = \begin{bmatrix} [A_2^{ii}] & [A_2^{ij}] & [A_2^{ik}] \\ [A_2^{ji}] & [A_2^{jj}] & [A_2^{jk}] \\ [A_2^{ki}] & [A_2^{kj}] & [A_2^{kk}] \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Матриця  $[A_2]^m$  - квадратна матриця  $2N \times 2N$ . Ненульові елементи матриці  $[A_2]^m$  розташовані на перетині рядків  $2r-1, 2r$  і стовпців  $2s-1, 2s$ , де  $r, s = i, j, k$ . Матричні блоки  $[A_2^{rs}]$  мають такий вигляд:

$$[A_2^{rs}] = \begin{bmatrix} \beta_{2r}\beta_{2s} + \frac{1}{2}\beta_{3r}\beta_{3s} & \frac{1}{2}\beta_{3r}\beta_{3s} \\ \frac{1}{2}\beta_{2r}\beta_{2s} & \frac{1}{2}\beta_{2r}\beta_{2s} + \beta_{3r}\beta_{3s} \end{bmatrix} \Delta_m \mu_m. \quad (23)$$

Представимо рівняння вектору навантаження (11) у такому вигляді:

$$\{F\}^m = \int_{\Omega_m} [b^m]^T \{f^m\} d\Omega_m = \frac{\Delta_m}{3} [F_x \ F_y \dots F_x \ F_y \dots F_x \ F_y]^T. \quad (24)$$

Розглянемо осесиметричну течію рідини [3, 11]. Вважатимемо вісь  $x$  радіусом. Компоненту швидкості у цьому напрямі також позначимо  $u$ . Вісь симетрії направимо вздовж осі  $y$ , а відповідна компонента швидкості буде  $v$ . Як кінцевий елемент у цьому випадку розглядається кільце, утворене обертанням трикутника навколо осі  $y$ . Для компонент швидкості  $u$  та  $v$  визначення компонентів матриці  $[\beta^m]$  справедливі попередні співвідношення (15), (17) і (19).

Геометричні співвідношення, що зв'язують компоненти тензора швидкостей з компонентами вектора швидкості мають такий вигляд:

$$d_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad d_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad d_{\theta\theta} = \frac{\vartheta}{x}; \quad d_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (25)$$

Тоді стовпець швидкостей деформації елемента  $m$  визначимо таким чином:

$$\begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}d_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ 1/x & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial/\partial y & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial/\partial x \end{bmatrix} [b^m]\{\vartheta\} = [e^m]\{\vartheta\}, \quad (26)$$

де компоненти матриці  $[e^m]$  виражаються через компоненти матриці  $[\beta^m]$ , аналогічно як і у плоскому випадку.

Тиск визначаємо також із рівняння (21), тільки стовпець  $\{I\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ .

Обчислення матриць здійснюється за аналогією як і у плоскому випадку. Матриця  $[A_1]^m$  має вигляд (22), а кожна її підматриця  $[A_1]^s$ , де  $s = i, j, k$ , визначається виразом:

$$[A_1]^s = [\beta_{1s} + 2\beta_{2s}x_0 + \beta_{3s}y_0 + \beta_{3s}x_0]\Delta_m, \tag{27}$$

де  $x_0 = (x_i + x_j + x_k)/3$ ;  $y_0 = (y_i + y_j + y_k)/3$  – є координатами центра мас трикутника  $i, j, k$ .

Матриця  $[A_2]$  має вигляд (23). Введемо такі позначення:

$$J_1 = \int_{\Delta} \frac{1}{x} dx dy; \quad J_2 = 4 \int_{\Delta} \frac{1}{y} dx dy; \quad J_3 = \int_{\Delta} \frac{y}{x} dx dy. \tag{28}$$

З врахуванням введених позначень (28), підматриці  $[A_2^{rs}]$  матриці  $[A_2]$  матимуть такий вигляд:

$$[A_2^{rs}] = \begin{bmatrix} A_2^{11} & A_2^{12} \\ A_2^{21} & A_2^{22} \end{bmatrix} \mu_m, \tag{29}$$

де  $A_2^{11} = (2\beta_{2r}\beta_{2s} + \frac{1}{2}\beta_{3r}\beta_{3s})x_0\Delta_m + \beta_{1r}\beta_{1s}J_1 + \beta_{3r}\beta_{3s}J_3 + (\beta_{2r}\beta_{1s} + \beta_{1r}\beta_{2s})\Delta_m + (\beta_{3r}\beta_{1s} + \beta_{1r}\beta_{3s})J_2 + (\beta_{3r}\beta_{2s} + \beta_{2r}\beta_{3s})y_0\Delta_m$ ,

$$A_2^{12} = \frac{1}{2}\beta_{3r}\beta_{2s}x_0\Delta_m,$$

$$A_2^{21} = \frac{1}{2}\beta_{2r}\beta_{3s}x_0\Delta_m,$$

$$A_2^{22} = (2\beta_{3r}\beta_{3s} + \frac{1}{2}\beta_{2r}\beta_{2s})x_0\Delta_m.$$

Вектор  $\{F\}^m$ , який залежить від об'ємних навантажень, матиме такий вигляд:

$$\{F\}^m = \int_{\Omega_m} [b^m]^T \{f^m\} d\Omega_m = [F_x\varphi_i \quad F_y\varphi_i \quad \dots \quad F_x\varphi_j \quad F_y\varphi_j \quad \dots \quad F_x\varphi_k \quad F_y\varphi_k]^T, \tag{30}$$

де  $\varphi_s = \beta_{1s}x_0\Delta_m + \beta_{2s}J_4 + \beta_{2s}J_5$  ( $s=i, j, k$ ),  $J_4 = \int_{\Delta} x^2 dx dy$ ,  $J_5 = \int_{\Delta} xy dx dy$ .

Матриці  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  та вектор  $\{F\}$ , що входять у рівняння (14), отримуються сумуванням відповідних матриць і векторів навантаження за елементами.

Реалізація методу скінчених елементів у представленому вигляді призводить до симетричної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих вузлових значень компонент вектора швидкості і тиску. У випадку правильно виконаної нумерації вузлів матриця  $[A]$  системи має стрічковий вигляд, тобто всі її ненульові коефіцієнти за межами стрічки дорівнюють нулю. Таким чином,  $a_{ij} = 0$ , якщо  $|i - j| > L/2$  ( $L$  – ширина стрічки), і  $a_{k,k-L/2} \neq 0$  або  $a_{k,k+L/2} \neq 0$  хоча б для одного значення  $k$ .

#### Моделювання процесу заповнення прес-форми для лиття підшов під тиском

Формування симетричної стрічкової матриці  $[A]$  здійснюється в такий спосіб. Розглянута область течії покривається сіткою чотирикутних елементів, у межах кожного з яких тиск приймається незмінним. Для отримання трикутної сітки всі чотирикутники діляться діагоналями на два елементи. Усередині утворених трикутників компоненти вектора швидкості є лінійними функціями координат і виражаються через вузлові значення швидкості.

У кожному вузлі нумеруються дві компоненти вектора швидкості та тиск, який відноситься до верхнього лівого кута чотирикутника. Складання матриці ведеться за елементами трикутної сітки. Рішення результуючої системи лінійних рівнянь здійснюється методом Гаусса, модифікованим для симетричних стрічкових матриць.

На основі описаної методики за допомогою комплексу програм Moldex3D змодельований процес заповнення порожнини прес-форми для отримання підшови (рис.1). У комплекс входять програми, що дозволяють автоматично розбивати вихідну область на трикутні елементи, формувати матрицю кінцевих елементів з урахуванням граничних умов вирішувати систему лінійних рівнянь [12].

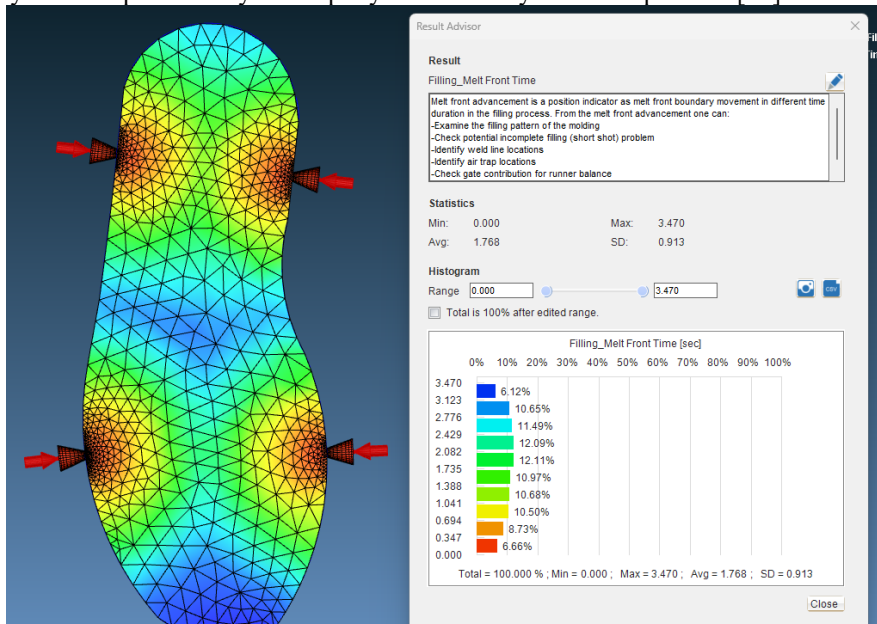


Рис. 1. Моделювання процесу заповнення прес-форми для виготовлення підшови за допомогою програми Moldex3D

Варіюючи розташуванням впускних отворів та їхніми діаметрами (тобто початковими значеннями швидкостей розплаву в кожному впускному отворі) можна домогтися оптимального розташування ліній спаю (місце зварювання потоків розчину полімеру). Таким чином, моделюючи процес заповнення матеріалом ПВХ порожнини прес-форми через чотири впускних отвори (рис. 2) можна спостерігати за процесом утворення спаїв.

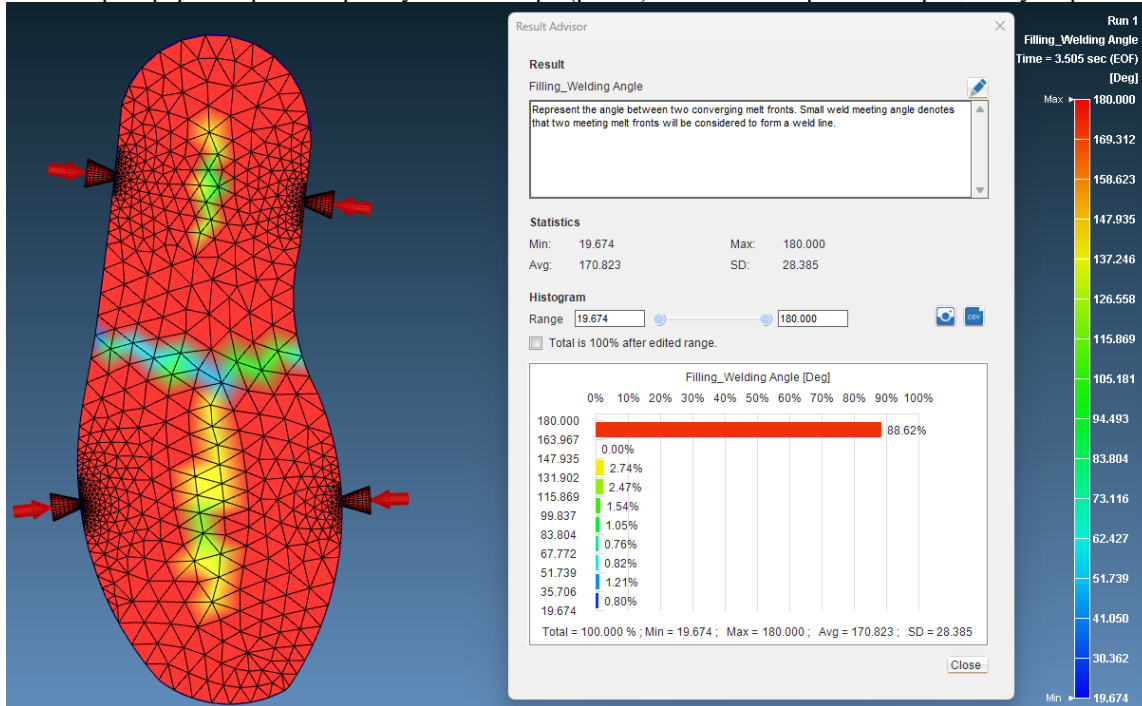


Рис.2. Моделювання процесу утворення спаїв під час заповнення прес-форми за допомогою програми Moldex3D

Як видно з рис. 1 при заповненні прес-форми через чотири отвори утворюється три лінії спаїв, які суттєво знижують фізико-механічні характеристики виробу. Розробці конструкцій прес-форм із врахуванням розташування ліній спаїв присвячені роботи [3]. Чим ближчим є кут між напрямком дії навантаження і лінією спаю до 90°, тим гірші експлуатаційні властивості підошви. Під час експлуатації взуття на підошву у різних напрямках діють різні навантаження, як за величиною, так й за природою, тому для підвищення експлуатаційних характеристик крім визначення оптимального розташування впускних отворів потрібно армувати підошви шляхом введення під час заповнення полімерним матеріалом порожнини прес-форми армуючих волокон. Але перед тим як розробляти конструкцію прес-форми потрібно змоделювати процес заповнення порожнини прес-форми розплавом полімеру із армуючими волокнами.

Реалізація задачі плинну ньютонівської рідини в порожнині прес-форми методом скінчених елементів дозволяє визначати величину усадки, яка має місце при охолодженні підошви (рис. 3).

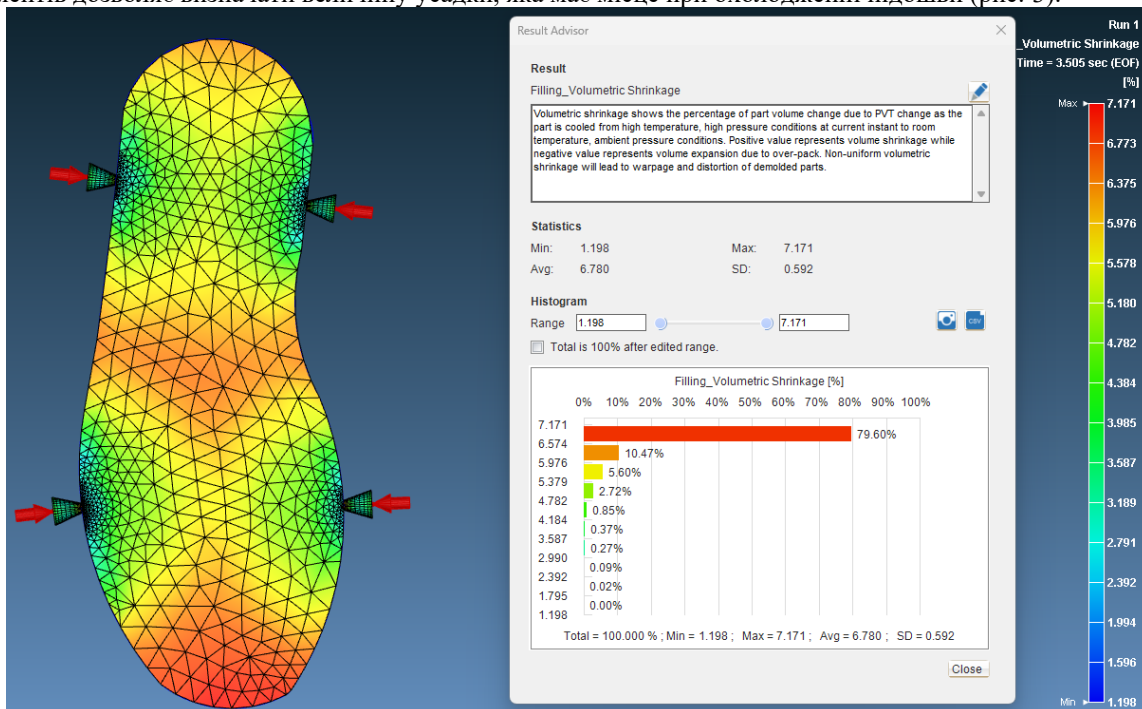


Рис. 3. Об'ємна усадка, що виникає при охолодженні підошви (програма Moldex3D)



Як видно з рис. 3 найбільша усадка (79,6 %) виникає в носковій частині підошви, суттєво менша, але більше 10 % – в області поперечної лінії спаю і найменша (біля 1 %) – в зоні впускних отворів. Таким чином, змінюючи конструкцію прес-форми, а також технологічні режими її заповнення та охолодження можна контролювати стандартну усадку підошви.

### Висновки

Запропоновано спосіб моделювання процесу течії в'язкої полімерної рідини в порожнині прес-форми, який базується на скінчено-елементній реалізації математичної моделі течії в'язкої рідини. На основі запропонованого способу за допомогою комплексу програм Moldex3D змодельований процес заповнення порожнини прес-форми для отримання підошви. У комплекс входять програми, що дозволяють автоматично розбивати вихідну область на трикутні елементи, формувати матрицю кінцевих елементів з урахуванням граничних умов вирішувати систему лінійних рівнянь.

Запропонована математична модель течії в'язкої рідини у порожнині прес-форми та спосіб її реалізації за допомогою комплексу програм Moldex3D дозволить визначати оптимальні конструкції прес-форм та технологічні режими процесу їх заповнення полімерним матеріалом.

### Література

1. Approximating viscosity solutions of the Euler system / Eduard Feireisl, Maria Lukacova-Medvidova, Simon Schneide // Numerical Analysis (math.NA), 2022, 42 p. [<https://arxiv.org/pdf/2102.07876>].
2. James F. Price. Lagrangian and Eulerian representations of fluid flow / Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, Massachusetts, 2024. [[https://ocw.mit.edu/courses/res-12-001-topics-in-fluid-dynamics-fall-2023/mitres\\_12\\_001\\_f23\\_essay1\\_pt1.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/res-12-001-topics-in-fluid-dynamics-fall-2023/mitres_12_001_f23_essay1_pt1.pdf)].
3. Розробка математичної моделі заповнення порожнини пресформи розплавом полімерного матеріалу з наповнювачем / О.М. Синюк, О.А. Кравчук, О.М. Яшина, А.Ю. Кравчук // Вісник Хмельницького національного університету, №2, 2020 (283). – С. 195-200. [<https://elar.khmnu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/61012acd-71b1-4273-9415-2dddfe92f91f/content>].
4. Finite Element Analysis and Computational Fluid Dynamics for the Flow Control of a Non-Return Multi-Door Reflux Valve / Xolani Prince Hadebe, Bernard Xavier Tchomeni Kouejou, Alfayo Anyika Alugongo and Desejo Filipeson Sozinando // *Fluids*, 2024, 9(10), [<https://doi.org/10.3390/fluids9100238>].
5. Free-surface behaviour of shallow turbulent flows / Fabio Muraro, Giulio Dolcetti, Andrew Nichols, Simon J. Tait, Kirill V. Horoshenkov // Journal of Hydraulic Research Volume 59, 2021 – Issue 1, P. 20. [<https://doi.org/10.1080/00221686.2020.1870007>].
6. Dolcetti, G., Horoshenkov, K. V., Krynkin, A., & Tait, S. J. (2016). Frequency-wavenumber spectrum of the free surface of shallow turbulent flows over a rough boundary. *Physics of Fluids*, 28(10). [<https://doi.org/10.1063/1.4964926>].
7. Synyuk O. Numerical simulation of viscoplastic liquid flow with integral rheological law in flat or cylindrical channels // computer systems and information technologies, 2020, № 1. – P. 12-20.
8. Douglas Cline. Variational principles in classical mechanics / LibreTexts, 2024, 717 p. [[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical\\_Mechanics/Variational\\_Principles\\_in\\_Classical\\_Mechanics\\_\(Cline\)/00%3A\\_Front\\_Matter/03%3A\\_Table\\_of\\_Contents](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/00%3A_Front_Matter/03%3A_Table_of_Contents)].
9. Simulation of Mold Filling for Non-Newtonian Fluids (Part 2) / Venkatesh M.Kulkarni, Chu Wee Liang, C.W.Tan, P.A. Aswatha Narayana and K.N.Seetharamu // International Microelectronics And Packaging Society – JMPEP, Vol. 3, No.2, 2006. – P. 52-60. [<https://imapsjmep.org/article/40164.pdf>].
10. Two-dimensional non newtonian fluid injection moulding filling improved with a cvfem/vof method / Salinas C.H., Vasco D.A, Moraga N.O. // Blucher Mechanical Engineering Proceedings May 2014, vol. 1, num. 1. [<https://pdf.blucher.com.br/mechanicalengineeringproceedings/10wccm/19736.pdf>].
11. Taha Sochi. Variational Approach for Resolving the Flow of Generalized Newtonian Fluids in Circular Pipes and Plane Slits / Mathematical Problems in Engineering, 2015, 10 p. [<https://doi.org/10.1155/2015/714136>].
12. Maw-Ling Wang, Rong-Yeu Chang, and Chia-Hsiang (David) Hsu. Molding Simulation: Theory and Practice, Hanser Publications, 2022, 532 pages.

### References

1. Approximating viscosity solutions of the Euler system / Eduard Feireisl, Maria Lukacova-Medvidova, Simon Schneide // Numerical Analysis (math.NA), 2022, 42 p. [<https://arxiv.org/pdf/2102.07876>].
2. James F. Price. Lagrangian and Eulerian representations of fluid flow / Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, Massachusetts, 2024. [[https://ocw.mit.edu/courses/res-12-001-topics-in-fluid-dynamics-fall-2023/mitres\\_12\\_001\\_f23\\_essay1\\_pt1.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/res-12-001-topics-in-fluid-dynamics-fall-2023/mitres_12_001_f23_essay1_pt1.pdf)].
3. Rozrobka matematychnoi modeli zapovnennia porozhnyny presformy rozplavom polimernoho materialu z napovniuvachem / O.M. Syniuk, O.A. Kravchuk, O.M. Yashyna, A.Iu. Kravchuk // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu, №2, 2020 (283). – С. 195-200. [<https://elar.khmnu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/61012acd-71b1-4273-9415-2dddfe92f91f/content>].
4. Finite Element Analysis and Computational Fluid Dynamics for the Flow Control of a Non-Return Multi-Door Reflux Valve / Xolani Prince Hadebe, Bernard Xavier Tchomeni Kouejou, Alfayo Anyika Alugongo and Desejo Filipeson Sozinando // *Fluids*, 2024, 9(10), [<https://doi.org/10.3390/fluids9100238>].
5. Free-surface behaviour of shallow turbulent flows / Fabio Muraro, Giulio Dolcetti, Andrew Nichols, Simon J. Tait, Kirill V.

Horoshenkov // Journal of Hydraulic Research Volume 59, 2021 – Issue 1, P. 20. [<https://doi.org/10.1080/00221686.2020.1870007>].

6. Dolcetti, G., Horoshenkov, K. V., Krynkina, A., & Tait, S. J. (2016). Frequency-wavenumber spectrum of the free surface of shallow turbulent flows over a rough boundary. *Physics of Fluids*, 28(10). [<https://doi.org/10.1063/1.4964926>].

7. Synyuk O. Numerical simulation of viscoplastic liquid flow with integral rheological law in flat or cylindrical channels // computer systems and information technologies, 2020, № 1. – P. 12-20.

8. Douglas Cline. Variational principles in classical mechanics / LibreTexts, 2024, 717 p. [[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical\\_Mechanics/Variational\\_Principles\\_in\\_Classical\\_Mechanics\\_\(Cline\)/00%3A\\_Front\\_Matter/03%3A\\_Table\\_of\\_Contents](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/00%3A_Front_Matter/03%3A_Table_of_Contents)].

9. Simulation of Mold Filling for Non-Newtonian Fluids (Part 2) / Venkatesh M.Kulkarni, Chu Wee Liang, C.W.Tan, P.A. Aswatha Narayana and K.N.Seetharamu // International Microelectronics And Packaging Society – JMPEP, Vol. 3, No.2, 2006. – P. 52-60. [<https://imapsjmep.org/article/40164.pdf>].

10. Two-dimensional non newtonian fluid injection moulding filling improved with a cvfem/vof method / Salinas C.H., Vasco D.A, Moraga N.O. // Blucher Mechanical Engineering Proceedings May 2014, vol. 1, num. 1. [<https://pdf.blucher.com.br/mechanicalengineeringproceedings/10wccm/19736.pdf>].

11. Taha Sochi. Variational Approach for Resolving the Flow of Generalized Newtonian Fluids in Circular Pipes and Plane Slits / *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 10 p. [<https://doi.org/10.1155/2015/714136>].

12. Maw-Ling Wang, Rong-Yeu Chang, and Chia-Hsiang (David) Hsu. *Molding Simulation: Theory and Practice*, Hanser Publications, 2022, 532 pages.