DOI 10.31891/2307-5732-2024-331-59
УДК 637.5.02

ПУКАЧ ПЕТРО
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0002-0359-5025
e-mail: ppukach@lpnu.ua
ПАБИРІВСЬКИЙ ВІКТОР
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0002-6071-3817
e-mail: viktor.v.pabyrivskyi@lpnu.ua
ПАБИРІВСЬКА НЕЛЯ
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0003-4631-0189
e-mail: nelia.v.pabyrivska@lpnu.ua

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ШНЕКА

Отримано математичну модель згинальних механічних коливань шнека із урахуванням кутової швидкості його обертання навколо нерухомої осі та відносного руху вздовж нього однорідного середовища. Розроблено методику дослідження вказаної моделі, зокрема, у випадку короткого електромеханічного шнека. Отримано рівняння у стандартному вигляді, які визначають основні параметри динаміки нелінійних коливань. Проаналізовано вплив кінетичних та фізико-механічних параметрів на характеристики динамічних процесів у одновимірній математичній моделі нелінійних коливань рухомого електромеханічного шнекового обладнання. Виведено зручні з точки зору інженерної практики розрахункові формули, що описують закономірності зміни амплітудно-частотних характеристик шнека як для нерезонансного, так і для резонансного випадку. Важливе питання дослідження впливу швидкості руху елементів механізмів на коливання одновимірних нелінійно-пружних систем досі детально не розглядалося в науковій літературі. Основною причиною цього в аналітичному дослідженні динамічних процесів були недоліки математичного апарату для розв'язування відповідних нелінійних диференціальних рівнянь, що описують закони руху цих систем. У роботі використано методи нелінійної механіки для часткового вирішення вказаної проблеми. Чисельні симуляції проведено для параметрів, близьких до тих, які використовуються в різноманітних промислових технологічних системах. Отримано умови резонансних та нерезонансних режимів роботи вказаної технологічної системи. Встановлено, що при поздовжніх коливаннях зі збільшенням поздовжньої швидкості середовища амплітуда коливань також збільшується. Встановлено також, що зі зростанням амплітуди частота поздовжніх коливань різко зменшується, а якщо система рухається з більшою швидкістю, то суттєво зменшується частота коливань.

Дослідження з використанням методів нелінійної механіки дозволяють прогнозувати резонансні явища та отримувати інженерні рішення для підвищення ефективності технологічного обладнання.

Ключові слова: нелінійні коливання, математична модель, резонанс, амплітуда, частота, шнек.

PUKACH PETRO, PABYRIVSKYI VIKTOR, PABYRIVSKA NELYA
Lviv Polytechnic National University

USE OF NONLINEAR MECHANICS METHODS IN THE RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF BENDING OSCILLATIONS OF THE ELECTROMECHANICAL SCREW

A mathematical model of bending mechanical vibrations of the screw was obtained, taking into account the angular velocity of its rotation around a fixed axis and the relative movement along it of a homogeneous medium. The research methodology of the specified model has been developed, in particular, in the case of a short electromechanical auger. Equations in the standard form were obtained, which determine the main parameters of the dynamics of nonlinear oscillations. The influence of kinetic and physical-mechanical parameters on the characteristics of dynamic processes in a one-dimensional mathematical model of nonlinear oscillations of moving electromechanical screw equipment is analyzed. Convenient, from the point of view of engineering practice, calculation formulas are derived that describe the patterns of changes in the amplitude-frequency characteristics of the screw both for the non-resonant and for the resonant case. The important issue of studying the influence of the movement speed of mechanism elements on the oscillations of one-dimensional nonlinear elastic systems has not been considered in detail in the scientific literature. The main reason for this in the analytical study of dynamic processes was the shortcomings of the mathematical apparatus for solving the relevant nonlinear differential equations describing the laws of motion of these systems. The work uses methods of nonlinear mechanics to partially solve the specified problem. Numerical simulations are carried out for parameters close to those used in various industrial technological systems. The conditions of resonant and non-resonant modes of operation of the specified technological system were obtained. It was established that during longitudinal oscillations, the amplitude of oscillations also increases with an increase in the longitudinal velocity of the medium. It was also established that with increasing amplitude, the frequency of longitudinal oscillations sharply decreases, and if the system moves at a higher speed, then the frequency of oscillations decreases significantly.

Research using the methods of nonlinear mechanics allows the prediction of resonant phenomena and obtaining engineering solutions to improve the efficiency of technological equipment.

Keywords: nonlinear oscillations, mathematical model, resonance, amplitude, frequency, screw.

Постановка проблеми

Дослідження динамічних процесів у різноманітних середовищах та системах на базі хвильової теорії руху набули в останні десятиліття широкого розмаху [1-4]. Основні ідеї хвильової теорії широко використовуються у тих прикладних задачах, де незавжди вдається застосувати класичні методи Фур'є чи Д'Аламбера [5] інтегрування рівнянь з частинними похідними. Це стосується в першу чергу задач, які описують динамічні процеси поздовжньо-рухомих середовищ. Мова йде про поздовжні та згинальні коливання ремінних, канатних чи ланцюгових передач, трубопроводи, по котрих переміщається рідина, шнекові машини, вздовж котрих рухається в'язке або сипке середовище, в певній мірі процес вібросепарації та ін. Адже, як показано в [6-8], поздовжня складова швидкості руху середовища впливає не тільки на кількісні характеристики наведених вище систем, але може суттєво вплинути та кожна якісну сторону процесу – привести до зриву коливань чи їх стійкості тощо.

Метою роботи є розроблення методики дослідження деяких класів технологічних систем, фізичними моделями яких є пружні тіла, які по-перше, обертаються навколо нерухомої осі зі сталою кутовою швидкістю (колони для бурінні свердловин, шнекові машини тощо). та, по-друге, вздовж них рухається середовище. Методика базується на основній ідеї асимптотичного інтегрування рівнянь із частинними похідними [9], яка поєднує у собі основні положення хвильової теорії руху, принцип одночастотності коливань у нелінійних системах [9,10].

Постановка задачі. Математична модель

Математичною моделлю згинальних коливань пружного тіла, яке обертається вздовж нерухомої осі із кутовою швидкістю Ω та вздовж котрого рухається зі сталою відносною лінійною швидкістю V середовище (рідина, сипке чи в'язке середовище), є система рівнянь [11 -13]:

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_2 V\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}-2(\rho_1+\rho_2)\Omega\frac{\partial w}{\partial t}-(S-\rho_2V^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-M\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-$$
$$-2(\rho_1+\rho_2)I\Omega\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2}++EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 u=\varepsilon f\left(u,w,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z},\dots,\frac{\partial^3 u}{\partial z^3},\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right)$$
$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho_2 V\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}+2(\rho_1+\rho_2)\Omega\frac{\partial u}{\partial t}-(S-\rho_2V^2)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-M\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}+$$
$$+2(\rho_1+\rho_2)I\Omega\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 w=\varepsilon g\left(u,w,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z},\dots,\frac{\partial^3 u}{\partial z^3},\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right) \quad (1)$$

У системі (1) $u(t,z)$, $Oxyz$ - компоненти вектора переміщення точки пружного одновимірного тіла в довільний момент часу t у проекціях на осі рухомої системи координат $Oxyz$, вісь Oz якої співпадає із недеформованим прямолінійним його станом, ρ_1, ρ_2 - відповідно маса одиниці довжини тіла та рухомого середовища, S - зусилля розтягу, M - момент кручення; Ω - кутова швидкість обертання тіла навколо осі, що співпадає із її недеформованим положенням, EI - його жорсткість на згин, f та g - функції, які описують нелінійні складові відновлюючої сили, сили опору та інші сили, максимальне значення котрих є значно меншим від значення відновлюючої сили, на що вказує малий параметр ε. Не зменшуючи загальності, нижче вважатимемо, що вони є многочленами, а виходячи із їх змісту випливає, що:

$$f\left(u,w,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z},\dots,\frac{\partial^3 u}{\partial z^3},\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right)=g\left(u,w,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial z},\dots,\frac{\partial^3 u}{\partial z^3},\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right)$$

Нижче вважається, що середовище, яке рухається вздовж тіла, не впливає на його згинну жорсткість, а кількість відносного руху тіла та момент кручення є малими величинами.

До рівняння (1) долучаються крайові умови, які узгоджуються із умовами руху пружного тіла у точках $z=0$ (початок) та ($z=l$) (кінець). Приймаючи останні у вигляді нерухомого шарніру, маємо:

$$u(t,z)|_{z=j}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z=j}=0,\qquad w(t,z)|_{z=j}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|_{z=j}=0,\quad (j=0,l) \quad (2)$$

Таким чином, задача полягає у побудові аналітичного розв'язку крайової задачі (1), (2) та отриманні на його базі зручних для інженерних розрахунків залежностей, які дають змогу оцінити вплив всієї множини параметрів системи на динамічний процес. Треба відзначити, до динаміка системи пружне тіло - рухоме середовище на базі чисельного інтегрування відповідних математичних моделей вивчалась зокрема [11,13,14]. Зокрема, у [11] показано, що у випадку руху середовища за швидкості, близької до критичної, має місце перерозподіл енергії у системі, що приводить до значного зростання амплітуди коливань, у [13] досліджено коливання нижнього кінця бурової колони, зумовленого рухом середовища, а у [14] побудовано аналітичний розв'язок для випадку поздовжніх та крутильних коливань бурової колони без урахування руху середовища. Однак чисельне інтегрування диференціальних рівнянь, які описують динамічний процес, не дає змогу визначити низку динамічних характеристик системи, таких як зв'язок між критичною швидкістю руху рідини та кутовою швидкістю обертання тіла, його жорсткістю та ін. З огляду на сказане вище аналітичне розв'язання поставленої задачі становить не тільки теоретичний, а у значній мірі також й практичний інтерес.

Методика дослідження математичної моделі коливань шнека. Асимптотичний метод

Враховуючи застереження (обмеження), висловлені у зауваженні, для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) перш за все розглянемо її незбурений аналог, тобто систему рівнянь:

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-2(\rho_1+\rho_2)\Omega\frac{\partial w_0}{\partial t}-(S-\rho_2V^2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}-2(\rho_1+\rho_2)I\Omega\frac{\partial^3 w_0}{\partial t\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 u_0}{\partial z^4}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 u_0=0,$$
$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+2(\rho_1+\rho_2)\Omega\frac{\partial u_0}{\partial t}-(S-\rho_2V^2)\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}+2(\rho_1+\rho_2)I\Omega\frac{\partial^3 u_0}{\partial t\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 w_0=0 \quad (3)$$

за крайових умов :

$$u_0(t,z)\big|_{z=j} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\bigg|_{z=j} = 0, \qquad w_0(t,z)|_{z=j} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}\bigg|_{z=j} = 0, \quad (j=0,l). \tag{4}$$

Покажемо, що розв'язки наведених рівнянь можна трактувати як накладання хвиль - прямої та відбитої, тобто

$$u_0(t,z) = a\,cos(kz+\omega t+\psi) + b\,cos(kz-\omega t-\phi),$$
$$w_0(t,z) = c\,sin(kz+\omega t+\psi) + d\,sin(kz-\omega t-\phi), \tag{5}$$

де a,b,c,d - амплітуди прямих та відбитих хвиль; k та ω відповідно їх хвильове число та частота; φ, ψ - початкові фази.

Зауважимо, що більш просте представлення розв'язку для хвильових рівнянь (у випадку, коли крайові умови не ставляться, тобто для так званих середовищ безмежної довжини) розглядалось, наприклад, в [3,4,9] для квазілінійних та нелінійних моделей рівнянь Клейна-Гордона та Брезертона, а у [13] - для лінійного ($\varepsilon=0$) аналогу системи рівнянь (1).

Приймаючи до уваги (5), із системи диференціальних рівнянь (3) отримуємо дисперсійні співвідношення:

$$(\rho_1+\rho_2)\omega^2 + 2\frac{c}{a}(\rho_1+\rho_2)\Omega\omega - (S-\rho_2 V^2)\ k^2 - 2\frac{c}{a}(\rho_1+\rho_2)I\Omega k^2\omega - EIk^4 + (\rho_1+\rho_2)\Omega^2 = 0,$$
$$(\rho_1+\rho_2)\omega^2 - 2\frac{d}{b}(\rho_1+\rho_2)\Omega\omega - (S-\rho_2 V^2)\ k^2 + 2\frac{d}{b}(\rho_1+\rho_2)I\Omega k^2\omega - EIk^4 + (\rho_1+\rho_2)\Omega^2 = 0, \tag{6}$$

Незбурена система диференціальних рівнянь (3) є лінійною системою зі сталими коефіцієнтами, тому хвильове число та частота динамічного процесу не залежать від амплітуди хвиль [1]. Це дозволяє зробити висновок, що складові амплітуд прямих та відбитих хвиль є одинаковими, тобто $|a| = |c|$ та $|d| = |b|$. До того ж залежності (5) повинні задовольняти крайовим умовам (4). Крайові умови повинні виконуватись для довільного моменту часу. Наведене буде мати місце, якщо $\phi = \psi$, $k_k = \frac{k\pi}{l}$. Таким чином, одночастотні розв'язки незбурених рівнянь трансформуються до вигляду :

$$u_{0k}(t,z) = a_k(cos(k_k z+\omega_k t+\phi_k) - cos(k_k z-\omega_k t-\phi_k)),$$
$$w_{0k}(t,z) = a_k(sin(k_k z+\omega_k t+\phi_k) + sin(k_k z-\omega_k t-\phi_k)). \tag{7}$$

Цим одночастотним розв'язкам відповідає дисперсійне співвідношення:

$$(\rho_1+\rho_2)\omega_k^2 + 2(\rho_1+\rho_2)\Omega\omega_k - (S-\rho_2 V^2)\ k_k^2 - 2(\rho_1+\rho_2)I\Omega k_k^2\omega - EIk_k^4 + (\rho_1+\rho_2)\Omega^2 = 0\ . \tag{8}$$

Дисперсійне співвідношення визначає власну частоту згинальних коливань тіла, як функцію кутової та лінійної швидкості руху середовища вздовж пружного тіла у вигляді:

$$\omega_k = \Omega(Ik_k - 1) \pm k_k\sqrt{\Omega^2 I(Ik_k^2 - 2) + \frac{(S-\rho_2V^2)+EIk_k^2}{\rho_1+\rho_2}}. \tag{9}$$

Отримані результати дозволяють описати і багато-частотний процес у нелінійній моделі системи пружне тіло - рухоме середовище :

$$u_0(t,z) = \sum_k a_k(cos(k_k z+\omega_k t+\phi_k) - cos(k_k z-\omega_k t-\phi_k)),$$
$$w_0(t,z) = \sum_k a_k(sin(k_k z+\omega_k t+\phi_k) + sin(k_k z-\omega_k t-\phi_k))\ , \tag{10}$$

де параметри a_k та ϕ_k знаходяться із початкових умов.

Наведені вище результати одночасно служать базою для розв'язання більш складної задачі – визначення впливу нелінійних сил на динамічний процес. Серед аналітичних методів дослідження квазілінійних коливальних систем із зосередженими масами найбільш зручними стосовно практичного їх використання є, на наш погляд, методи Ван-дер-Поля [14] та КБМ [9]. Для розв'язання поставленої задачі буде поширено основну ідею методу Ван-дер-Поля [15], [16] на систему рівнянь із частинними похідними (1) за крайових умов (2).

Чисельне моделювання режимів роботи шнека

Результати, які випливають із дослідження математичної моделі шнекової коливальної електромеханічної системи, дозволяють отримати співвідношення, котрі визначають закони зміни амплітуди та частоти хвильового процесу. Нижче на рис. 1а) -1г) показано за значень параметрів $\rho_1 = 35\frac{kg}{m}$, $\rho_2 = 35\frac{kg}{m}$, $S = 1000N$, $EI = 2{,}85\cdot 10^6 Nm^2$, $I = 1{,}4\cdot 10^{-5} m^4$, залежність частоти згинних лінійних коливань пружного тіла від його довжини за різних значень кутової швидкості обертання та швидкості руху. Ще раз зауважимо, що розглянуті параметри притаманні для коротких промислових шнеків.

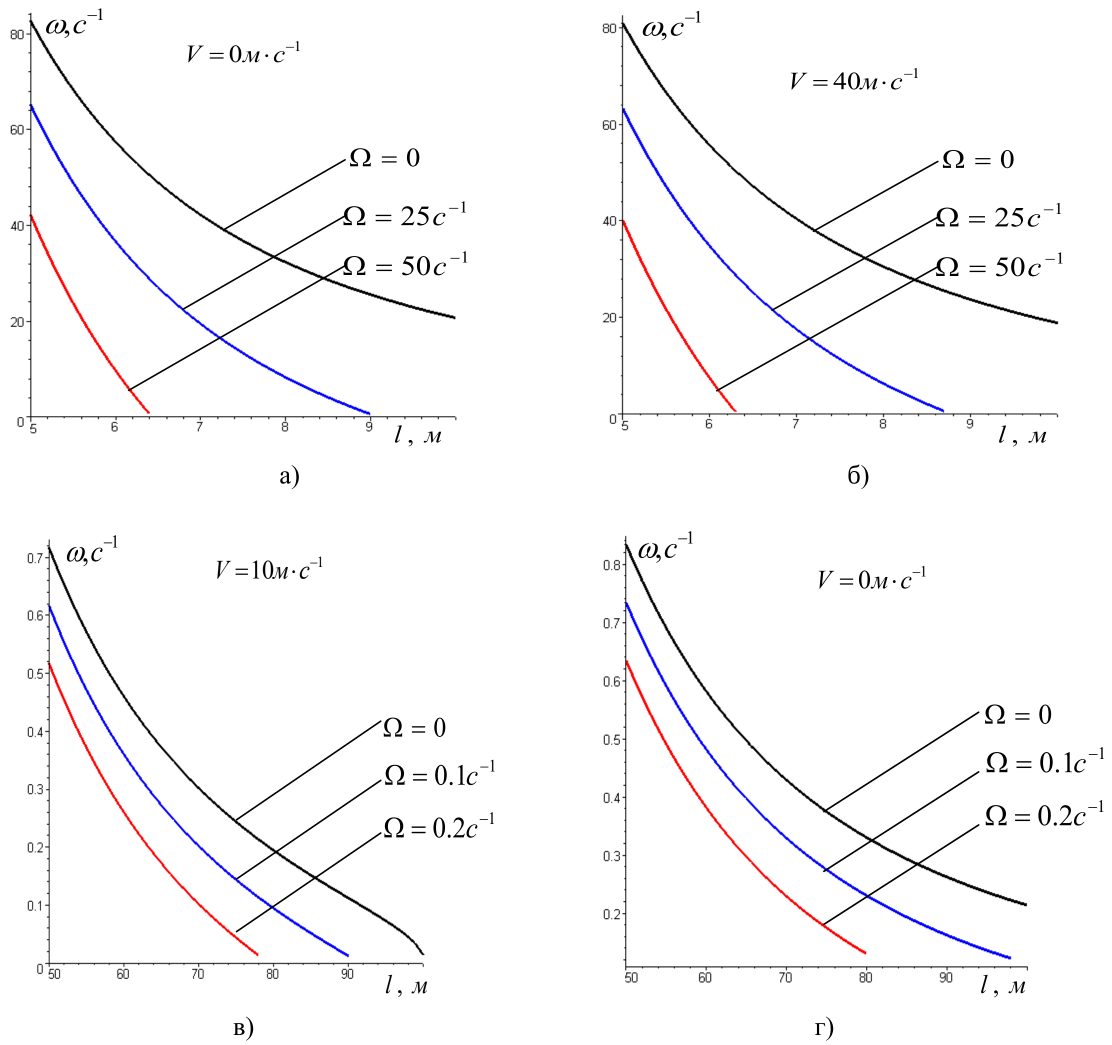

Рис. 1. Залежність частоти власних коливань пружного тіла від його довжини при різних значеннях швидкості руху середовища

Висновки

Розроблена у роботі методика дозволяє визначити вплив широкого спектру зовнішніх та внутрішніх чинників на згинні коливання пружних одновимірних моделей тіл, які обертаються навколо нерухомої осі. Прикладом таких систем є електромеханічний шнек. Отримані у статті результати та залежності показують наступне.

1. Для більших значень кутової швидкості обертання власна частота коливань пружного тіла є меншою.
2. Швидкість спадання частоти власних коливань із зростанням віддалі між опорами є більшою для більших значень швидкості рідини.
3. Вплив швидкості руху середовища на власні коливання більшою мірою проявляється для більшого значення міжопорної віддалі.
4. За значень кутової швидкості

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{(S-\rho_2 V^2)+EIk^2}{(\rho_1+\rho_2)(2I-k^2 I^2)}} \tag{11}$$

та швидкості руху рідини

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{\Omega^2(k^2 I^2-2I)(\rho_1+\rho_2)+EIk^2+S}{\rho_2}} \tag{12}$$

проходить зрив динамічного процесу.

5. Одночасно, як окремий випадок, із (12) при $\Omega = 0$, $S = 0$ отримуємо значення швидкості руху рідини у шарнірно закріпленому трубопроводі, за якої проходить втрата стійкості руху [7].

Література

1. Tanaka M. Physics of Nonlinear Waves / Mitsuhiro Tanaka – Springer Cham, 2020.
2. Manukure S. A short overview of solitons and applications/ Solomon Manukure, Timesha Booker //Partial

Differential Equations in Applied Mathematics – 2021. – Vol.4., 100140.

3. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна - Гордона/ Ю.А. Митропольский //Укр. мат. журн. – 1995– Том 47, №9. – С. 1209 – 1216.

4. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона / Ю.А. Митропольский //Укр. мат. журн. – 1998– Том 59, №1. – С. 58 – 71.

5. Kalenyuk P.I. On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables/ P.I. Kalenyuk and Z.M. Nytrebych// Journal of Mathematical Sciences – 1999. – vol. 97, No 1. – P. 3879-3887.

6. Гащук П.М. Вплив змушувальної сили на параметричні коливання гнучкого робочого елемента механічного приводу/ П.М. Гащук // Динаміка і міцність машин – 2008. – №614. – С. 55–65.

7. Гащук П.М. Параметричне збурення гнучкого робочого елемента механічного приводу/ П.М. Гащук , І.І. Назар // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні – 2008. – №42. – С. 65–69.

8. Шевченко Ф.Л. Влияние скорости протекающей жидкости на устойчивость бурильной колонны/ Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик // Науковий вісник НГУ– 2010– №1. – С. 69–72.

9. Kaper H.G. Asymptotic Analysis and the Numerical Solution of Partial Differential Equations/ Hans G. Kaper, Marc Garbey – CRC Press. Taylor & Francis Group, 1991.

10. Bhattacharjee J.K. An introduction to nonlinear oscillators: a pedagogical review/ J.K. Bhattacharjee, A.K.Mallik, S.Chakraborty// Indian J.Phys. – 2007. – vol. 81, No 11. – P. 1115-1175.

11. Лимарченко О.С. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью/ О.С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В.В. Ясинский – Київ: ГНОЗІС, 2002.

12. Kovacic I. Nonlinear Oscillations. Exact Solutions and their Approximations/ Ivanna Kovacic – Springer Cham, 2020.

13. Борщ О.І. Спіральні хвилі в закручених пружних трубчастих стержнях, що обертаються з внутрішнім потоком рідини/ О.І. Борщ, В.І. Гуляєв // Акустичний вісник – 2007– Том 10, №3. – С. 12 – 18.

14. Улитин Г.М. Ударные процессы в буровых установках/ Г.М. Улитин, Ю.В. Петтик // Вибрации в технике и технологиях – 2000– №1(13). – С. 70 – 74.

15. Wan der Pol B. Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations/ B. Wan der Pol //Radio Review – 1920. – No 1. – P. 701– 710.

16. Stolz C. Introduction to Non-linear Mechanic. A Unified Energetical Approach/ Claude Stolz – Springer Cham, 2024.

References

1. Tanaka M. Physics of Nonlinear Waves / Mitsuhiro Tanaka – Springer Cham, 2020.

2. Manukure S. A short overview of solitons and applications/ Solomon Manukure, Timesha Booker //Partial Differential Equations in Applied Mathematics – 2021. – Vol.4., 100140.

3. Mitropolskii Yu. Construction asymptotic solutions perturbed Klein-Gordon equation/ Yu. Mitropolskii// Ukr. Math. Zh.– 1995. – vol. 47, № 9. – S. 1209-1216.

4. Mitropolskii Yu. On the construction of an asymptotic solution of the pertubed Brezerton equation / Yu. Mitropolskii// Ukr. Math. Zh.– 1998. – vol. 59, № 1. – S. 58-71.

5. Kalenyuk P.I. On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables/ P.I. Kalenyuk and Z.M. Nytrebych // Journal of Mathematical Sciences – 1999. – vol. 97, № 1. – S. 3879-3887.

6. Haschuk P. Vplyv zmishuvalnoyi syly na para-metrychni kolyvannya hnuchkoho robochoho elementa mekhanichnoho pryvodu/ P. Haschuk // Dynamics and strength of machines – 2008. –№ 614. – S. 55-65.

7. Haschuk P. Parametrychne zburennya hnuchkoho robochoho elementa mekhanichnoho pryvodu/ P.Haschuk and I. Nazar // Automation of production processes in engineering – 2008. –№ 42. – S. 65-69.

8. F.L. Shevchenko and Y.V. Pettik Vliyaniye skorosti protekayushchey zhidkosti na ustoychivost' burilnoy kolonny/ F.L. Shevchenko and Y.V. Pettik// Nauk. visnyk NGU – 2010. –№ 1. – S. 69-72.

9. Kaper H.G. Asymptotic Analysis and the Numerical Solution of Partial Differential Equations/ Hans G. Kaper, Marc Garbey – CRC Press. Taylor & Francis Group, 1991.

10. Bhattacharjee J.K. An introduction to nonlinear oscillators: a pedagogical review/ J.K. Bhattacharjee, A.K.Mallik, S.Chakraborty// Indian J.Phys. – 2007. – vol. 81, No 11. – P. 1115-1175.

11. Limarchenko O.S. Dinamika vrashchayushchikhsya konstruktsiy s zhidkostyu/ O.S. Limarchenko, J.Matarazzo and V. Jasinski – Kyiv: GNOZIS, 2002.

12. Kovacic I. Nonlinear Oscillations. Exact Solutions and their Approximations/ Ivanna Kovacic – Springer Cham, 2020.

13. Gulyaev V.I. Spiralni khvyli v zakruchenykh pruzhnykh trubchastykh sterzhnyakh shcho obertayutsya z vnutrishnim potokom ridyny/ V.I. Gulyaev and A. Borsch// Acoustic Bulletin – 2007. vol. 10. №3 – S. 12-18.

14. Ulitin G.M. Udarnyye protsessy v burovykh ustanovkakh/ G.M. Ulitin and Y.V. Pettik //Vibrations in technics and technologies – 2000. vol. 1. №13 – S. 70-74.

15. Wan der Pol B. Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations/ B. Wan der Pol // Radio Review – 1920. №1 – S. 701-710.

16. Stolz C. Introduction to Non-linear Mechanic. A Unified Energetical Approach/ Claude Stolz – Springer Cham, 2024.