DOI 10.31891/2307-5732-2023-325-5-108-110
УДК 004.67

КАМІНСЬКИЙ РОМАН
Національний університет «Львівська Політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-3812-2009
e-mail: kaminsky.roman@gmail.com
ПШЕНИЧНИЙ ОЛЕКСАНДР
Національний університет «Львівська Політехніка»
https://orcid.org/0000-0001-8823-7472
e-mail: sasha.pshenychniy@gmail.com
ХУДИЙ АНДРІЙ
Національний університет «Львівська Політехніка»
https://orcid.org/0000-0003-2029-7270
e-mail: khudyy@ukr.net

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЦИКЛІЧНОГО ЧАСОВОГО РЯДУ ЧИСЕЛ ВОЛЬФА (ПОКАЗНИКА СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ)

Фрактальний аналіз циклічних часових рядів є актуальною задачею в багатьох областях людської діяльності. В даній статті наведена формальна модель циклічного часового ряду та наведені результати фрактального аналізу на прикладі сонячної активності на базі чисел Вольфа. В результаті фрактального аналізу існуючих циклів рядах визначені показники фрактальної розмірності та експоненти Герста.
Ключові слова: циклічні часові ряди, фрактальний аналіз, R/S-метод.

KAMINSKYI ROMAN, PSHENYCHNYY OLEKSANDR, KHUDYY ANDRIY
Lviv Polytechnic National University

FRACTAL ANALYSIS OF PERIODIC TIME SERIES OF WOLF NUMBERS (SOLAR ACTIVITY METRIC)

Periodic time series are ubiquitous: both natural and anthropogenic processes often follow various-length periods, resonating into complex patterns. Research aiming to detect those patterns and predict future process evolution has been active for centuries, but the real breakthrough happened in with introduction of Fractal analysis techniques by B. Mandelbrought and R/S method by H. Hurst. Current research is focused on a methodology of fractal parameters calculation such as Hurst fractal dimensions, Hurst exponent, and defining a formal model of periodic time series. The domain for approbating this methodology was chosen to be data on solar activity, defined by sunspots count – Wolf numbers. The peculiarity of the time series of the number of sunspots, is that the division into cycles is carried out naturally, namely, the absence of spots or their small number are the boundaries of the cycles. In addition, their repeatability in a qualitative sense is identical, but in a quantitative sense, we have a clearly expressed difference in the duration of the cycles, in the nature of the trends present in each of them, in the chaotic dynamics of amplitudes, and therefore in the chaotic change in the dispersion of levels, the asymmetry of the branches of growth and decline, and in values of the number of spots. By their physical essence, time series characterize the dynamics of the measured indicator, which may depend on the influence of many factors, both external and internal, and which are implicitly reflected in its behavior. This, in turn, does not create a completely identical picture of the changing states of the time series data source. For this reason, forecasting methods based on time series trends have inaccuracy and a short horizon. The selection of cycles in time series based on the nature of trend behavior can provide significant results and useful information for making and making important decisions. Fractal characteristics of cycles provide new knowledge about the cyclical process of changes in solar activity. So, the fractal dimension indicates complexity (chaoticity in the dynamics of the level values), the Hurst exponent allows to establish randomness, regularity and the presence of a trend.
Keywords: periodic time series, fractal analysis, R/S-method.

Постановка проблеми

Метод фрактального аналізу – це один із напрямків математичного аналізу, що став складовою частиною методів дискретної нелінійної динаміки і призначений для дослідження нелінійностей в динаміці часових рядів. Його широко використовують при вивченні та оцінюванні ступеня стабільності різноманітних систем, що дозволяє встановити зв'язок стану системи з фрактальними показниками.

В цьому плані, при дослідженні різних аналогічних, зокрема, циклічних процесів представляє певний інтерес їхня фрактальна природа або її відсутність. Відповідь на це дає фрактальний аналіз в результаті застосування R/S-методу (Rescaled range method). Цей метод часто використовують для встановлення характеру часового ряду, тобто ряд є чисто випадковим, чи в ньому присутній тренд, чи він є звичайним стаціонарним коливальним процесом.

Часові ряди не виникають з нічого і не є самі по собі, вони завжди є результатом спостережень за досліджуваною системою, окремим об'єктом, явищем чи процесом. Розрізняють фрактальні та звичайні часові ряди. Фрактальні часові ряди відрізняється від традиційних своїми статистичними характеристиками. Їх функції розподілів переважно мають важкі хвости, повільно згасаючі автокореляції та спектр потужності, а також можуть мати локальну або глобальну самоподібність. Будучи створені складними системами, вони проявляють свою динаміку в широкому діапазоні часових масштабів та розподілів значень.

В результаті вимірювання спостережуваних величин, формують відповідні таблиці з отриманих числових значень, у відповідності з моментами часу їх реєстрації. Такі пари числових значень – величина та час виміру відображають характер динаміки їх першоджерела.

Основною його особливістю є те, що використовуючи лише обсяг даних та показники варіації, такі як середньоквадратичне (стандартне) відхилення та розмах послідовності біжучої суми відхилень рівнів оригінального часового ряду від його середнього арифметичного, можна визначити такі фрактальні показники як фрактальну розмірність і показник Герста. В основному, розмах кумулятивного часового ряду та середньо-квадратичного відхилення оригінального часового ряду, отримані як статистичні величини, використовують для обчислення значення величини показника Герста і з його допомогою класифікувати досліджуваний часовий ряд – встановити яким є цей ряд: персистентним (присутній тренд), антиперсистентним (ряд є коливним) або випадковим.

Метою роботи є описання цілісної методології визначення фрактальних показників та розробка формальної моделі циклічних часових рядів. В цьому плані, в рамках даного дослідження має бути представлена формальна модель циклічного часового ряду, а також наданий метод визначення точного значення фрактальної розмірності для циклічних часових рядів.

Аналіз останніх досліджень

Дослідженню часових рядів присвячено дуже багато публікацій у формі монографій, звітів, статей, сайтів. Проте, стосовно виявлення циклічності та фрактального аналізу їх значно менше і вони переважно є більш специфічні. Циклічність розглядається на рівні з трендовою і сезонною компонентами, а стосовно фрактального аналізу основна увага стосується фрактальної розмірності і показника Герста.

В статті [1] показано, що циклічність в часових рядах властива об’єктам різної природи. Цикли не є однаковими, і не є строго періодичними, кожен цикл є унікальний. Тому корисно розглядати часові ряди як реалізацію стохастичних процесів, і це ставить питання про те, як представити циклічність у стохастичних процесах. Автори вважають, що основним описовим інструментом для цього є «функція спектральної щільності», яка є предметом цієї статті. Результати огляду методів аналізу часових рядів разом із їх застосуваннями приведені в статті [2]. В роботі [3] за допомогою відповідних тестів показано застосування методу статистик фазової дисперсії до магнітних циклів, аналогічних до сонячної активності. Метод адаптивної сегментації детермінованих циклічних сигналів розроблено в [4], який дозволяє виділити цикли та визначити їх регулярність, що підтверджується наведеними прикладами оцінювання точності цього методу.

В роботі [5] показано, що фрактальний часовий ряд є самоафінним та характеризується показником шорсткості H , який є мірою збереження коливань, пов'язаних з часовим рядом, причому для вимірювання цього показника використано середні значення попиту на електроенергію в туристичному місті та цілій країні в сенсі порівняння результатів. Для фрактального аналізу часового ряду в [6] використано метод зміненого діапазону (R/S) та оцінено показники фрактальної розмірності та експоненти Герста з метою виявлення зв’язку між розподілом рівнів часового ряду та розподілом експоненти Герста. В публікації [7] використано фрактальний аналіз для форми зображень самих сонячних плям методом відношення площі до периметра. У статті [8] приведені візуально і кількісно результати щодо вимірювання передбачуваності даних часових рядів, за допомогою аналізу перемасштабованого співвідношення (R/S) і показника Герста, яке показує подібність тенденцій щодо часу і виражає подібність даних часових рядів у фрактальних термінах. В статті [9] вивчали ефективність трьох методів: аналіз скоригованого перемасштабованого діапазону, аналіз флуктуацій із виключеним трендом і аналіз часових графіків дисперсії в оцінці показника Герста і вказано, що аналіз скоригованого перемасштабованого діапазону є найбільш ефективним методом із найменшою середньоквадратичною помилкою. Процедуру оцінки стійкості в часових рядах за допомогою показника Герста запропоновано в [10], а також встановлено, що загальна відсутність довгострокової пам’яті характеризує всі часові ряди, які використовували методи Ло. У статті [11] дано огляд аналізу часових рядів разом із його застосуваннями та відображені: їхні закономірності, тенденції, сезонні коливання, нерегулярні цикли та спорадичні зміни рівнів з метою вивчення та оцінювання впливу існуючих чинників.

Виклад основного матеріалу: фрактальний аналіз та суть R/S – методу

Точне коректне визначення фрактального аналізу виявити не вдалося. Тому, для розуміння загального поняття саме фрактального аналізу взято його визначення з англомовної та україномовної вікіпедій.

Означення та зміст фрактального аналізу. Англомовний варіант подає це визначення так: «Fractal analysis is a contemporary method of applying nontraditional mathematics to patterns that defy understanding with traditional Euclidean concepts. In essence, it measures complexity using the fractal dimension». Перекладач Google дає такий переклад: «фрактальний аналіз – це сучасний метод застосування нетрадиційної математики до моделей, які не піддаються розумінню традиційними евклідовими концепціями. По суті, він вимірює складність за допомогою фрактальної розмірності».

Україномовний варіант натомість є таким: «Фрактальний аналіз – відносно молода і швидко прогресуюча галузь сучасної математики, яка засобами теорії мір дробових порядків, метричних розмірностей, операторів дробового інтегрування та диференціювання вивчає властивості математичних об'єктів зі складною локальною будовою».

Отже, в загальному, фрактальний аналіз це методологія вивчення і визначення тих характеристик об’єктів, для яких мають місце фрактальні властивості. На сьогоднішній день методами фрактального аналізу є методи визначення фрактальної розмірності, обчислення показника Герста та знаходження величини фрактальної константи.

Основна робота Г. Герста полягала у розвитку теорії R/S-методу та його практичному застосуванні [12]. Герст (1965) розробив метод аналізу «масштабованого (зміненого) діапазону», тобто статистичний метод аналізу довгих записів природних явищ. Аналіз зміненого діапазону є центральним інструментом моделювання фрактальних даних [7]. У цьому аналізі зміненого діапазону використовуються два фактори:

1) різниця між максимальним і мінімальним значеннями кумулятивного ряду,

2) стандартне відхилення від спостережуваних значень.

Ці два значення, а точніше їх відношення, описуються показниковою функцією з коефіцієнтом пропорційності C та показником степеня H, а в якості незалежної змінної використовують кількість рівнів часового ряду.

В поширенні цього методу значну роль відіграла робота Б. Мандельброта «Фрактальна геометрія природи» [12]. R/S-метод ґрунтується на так званому методі нормованого розмаху або R/S-методі. Тут нормування здійснюється шляхом ділення розмаху накопиченого відхилення ряду кумулятивних сум на стандартне відхилення для оригінального часового ряду. Реалізація цього методу, стосовно часового ряду $Y(t)$, полягає у визначенні таких фрактальних показників: фрактальної розмірності D, розмаху кумулятивної суми відхилень R, стандартного відхилення оригінального часового ряду S, показник Герста $H = 2 - D$, якого в англомовній літературі називають експонентою Герста (Hurst exponent), n – кількість рівнів часового ряду $Y(t, n)$ та фрактальної константи – коефіцієнта пропорційності C. Усі ці величини пов'язані між собою таким співвідношенням

$$\frac{R}{S} = C \cdot n^{H} . \tag{1}$$

Основна відмінність методу нормованого розмаху від інших статистичних методів, які використовують для аналізу часових рядів, полягає в тому, що даний метод включає у свій аналіз напрямок часу, у той час як інші відомі методи стосовно цього часу інваріантні.

Значення відношення *R/S* у рівності (1) відоме як *перемасштабований діапазон*, оскільки воно має середнє значення нуль (сума відхилень кумулятивного ряду) і приведене до стандартного відхилення вихідного часового ряду. Значення *R/S* масштабується, при збільшенні приросту часу, n (тут *n* представляє номер моментів часу реєстрації спостережень), на величину значення показника степеневого закону, який дорівнює H, тобто у степені показника Герста H. Усі фрактали масштабуються за степеневим законом. За цим показником можна порівнювати різні явища, розвиток яких є представлений часовим рядом.

Алгоритм R/S-методу. З теоретичної точки зору в плані цього методу можна подати деякий часовий ряд як множину $Y(t) = y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n)$ середнє значення $\bar{y}$ і стандартне відхилення σ часового ряду. Далі необхідно перемасштабувати діапазон в такий спосіб: віднімаємо вибіркове середнє $\bar{y}$ від кожного рівня часового ряду

$$z_i = y_i - \bar{y}, \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{2}$$

де n – кількість рівнів часового ряду (обсяг вибірки).

В результаті цієї операції отримана послідовність таких різниць має середнє значення нуль. Цю послідовність подають як кумулятивний часовий ряд *Z*:

$$Z = \sum_{i=2}^{i=n} z_i = \sum_{i=2}^{i=n} \left(y_i - \bar{y} \right). \tag{3}$$

Скоригований, тобто змінений (промаштабований) діапазон – це різниця між максимальним і мінімальним значеннями рівнів кумулятивного часового ряду *Z*:

$$R = max\left(z_1, \ldots, z_n\right) - min\left(z_1, \ldots, z_n\right). \tag{4}$$

Для такого кумулятивного часового ряду $max\left(z_1, \ldots, z_n\right) \geq 0$, тобто завжди буде більшим або рівним нулю, натомість $min\left(z_1, \ldots, z_n\right) \leq 0$, завжди буде меншим або рівним нулю. Тому скоригований (за різницею (4)) діапазон завжди буде додатнім. Іншими словами, скоригований (промаштабований) діапазон *R* – це відстань, яку система проходить за час *t*. В даній ситуації, якщо часовий ряд не залежить від часу, можна використати рівняння (2) для опису поведінки системи.

Поняття циклічного часового ряду

Циклічність даних. Категорія циклічність зустрічається в багатьох галузях і має свій зміст в кожній з них. Сонячна активність, виражена числами Вольфа, є яскравим прикладом циклічності в межах тривалості місяців та років.

Загалом циклічність або цикли в часових рядах можна подати як повторюваність визначених дій, що відбуваються протягом деякого відтинку часу і на цьому відтинку мають місце початок і завершення цих дій. Аналіз та опрацювання таких циклів суттєво покращує інформацію про такі часові ряди, особливо в задачах прогнозування та управління. Проте з другої сторони, виходячи з принципів і суті системного підходу такі цикли переважно свідчать про зміни стану системи, яка генерує власне дані таких циклічних часових рядів. На практиці для багатьох часових рядів досить легко виділити такі цикли, проте досить часто таке виділення проводять в кінці аналізу і лише для того щоб зафіксувати їх присутність, тобто аналіз здійснюють відразу цілого часового ряду.

Особливість поняття циклічності, як вважають автори, проявляється в тому, що спочатку необхідно виявляти і розглядати послідовність таких циклів на осі часу, причому відтинки часу для даного циклу, є його межами і мають фіксований порядок, тобто моменти переходу від даного циклу до наступного за ним є одним моментом на осі часу.

Циклічна складова описує переважно тривалі періоди відносного підйому і спаду. Вона складається з окремих циклів, які змінюються за амплітудою і тривалістю, отже, її сутність в тому, що значення досліджуваного показника впродовж деякого часу зростає, досягаючи певного максимуму, потім знижується, досягаючи певного мінімуму, потім знову змінюється до попереднього рівня. Проте, циклічні складові мусять бути подібними відносно трендів, в них можуть змінюватись статистичні показники, вони можуть корелювати між собою, їх межі можуть бути строго визначеними або різними. Їх зміна залежить від впливу різних чинників, які складно ідентифікувати формальними методами. У випадку чисел Вольфа в основі цих чинників лежать внутрішні процеси Сонця, що впливають на його зовнішнє магнітне поле, і які неможливо вимірювати прямими спостереженнями. Для аналізу цієї складової часового ряду зазвичай залучається додаткова інформація, про подібні вивчені інші часові ряди. Для моделювання циклічної компоненти використовуються певні періодичні функції з періодами, що кратні циклам, а в аналітичні вирази цих функцій включають гармоніки (тригонометричні функції), періодичність яких зумовлена змістовною сутністю задачі. Математичним апаратом може слугувати теорія потоків та імпульсних процесів.

З теорії часових рядів відомо, що циклічна складова, що входить в адитивну чи мультиплікативну моделі в такому вигляді:

адитивна модель $$Y(t) = m(t) + c(t) + s(t) + \xi_t, \quad (5)$$

мультиплікативна модель $$Y(t) = m(t) \cdot c(t) \cdot s(t) \cdot \xi_t, \quad (6)$$

$m(t)$ – тренд, що характеризує тенденцію (динаміку) поведінки об’єкта дослідження;

$c(t)$ – циклічна компонента, яка виділяє на осі часу окремі, часто не повторювані, ситуації або події;

$s(t)$ – сезонною, коли враховують економічні фактори, в основному пов’язані з порами року;

ξ_t – випадкова складова, до якої відносять різні помилки, похибки, аномалії, отримані під час збирання та опрацювання даних.

Основною з них є трендова компонента яка відображає основну тенденцію в поведінці досліджуваного показника. Циклічна і сезонна компоненти не зв’язані між собою. Тобто сезонність може бути виявлена в циклічній компоненті, а цикли – в сезонній. Випадкова компонента, як правило, завжди присутня в часовому ряді і фактично в більшості випадків є незалежною.

В тім, циклічна компонента несе важливу інформацію, оскільки виділяє періоди часу, в яких зосереджена інформація про певні події, такі, що їх можна розглядати цілком окремо. Їх тривалість може бути однакова, приблизно однакова або цілком різна. Події, що відбуваються протягом тривалості циклу також можуть бути різними.

Циклічна мінливість часового ряду, як показано в [1] може бути описана періодичними функціями, такими як синус або косинус. В цьому плані циклічність має спектральне представлення коваріанси стаціонарного процесу, а сам циклічний процес може бути поданий як простий стохастичний процес у вигляді:

$$Y(t) = \alpha \cdot cos(\omega t) + \delta \cdot sin(\omega t), \quad (7)$$

де α і δ випадкові змінні з математичним сподіванням $E(\alpha) = E(\delta) = 0$; $E(\alpha \cdot \delta) = 0$, а $E(\alpha^2) = E(\delta^2) = \sigma^2$.

При такому підході процес є простим, він є періодичним з періодом $\frac{2\pi}{\omega}$, а компоненти α і δ мають в $Y(t)$ випадковими амплітуду і фазу, тобто дві будь-які реалізації матимуть різні амплітуди і різні фази.

В даній ситуації на жаль немає жодних інтуїтивних причин вважати, що цикли мають якесь відношення до синусоїдального або якого-небудь іншого періодичного процесу. В теорії хаосу існують неперіодичні цикли і хоча вони мають середню тривалість, проте точне значення тривалості наступного циклу невідоме.

Формальне подання циклічного процесу

Потреба конкретного, формалізованого і разом з тим стислого опису отриманих результатів, виникає досить часто, а особливо для їх публікації. Розглядаючи часовий ряд як послідовність певних, переважно досить подібних повторюваних подій, які розглядають та досліджують на скінченних і сумісних інтервалах часу, можна подати таку сукупність подій циклічним часовим рядом. В результаті попередньої обробки моменти переходу ситуації від події до події є відомі як межі інтервалів на яких розгортаються події, тобто границі циклів є визначені як відповідні моменти часу. Очевидно, що кожному такому циклу можна поставити у відповідність певний показник, який в тій чи іншій мірі характеризує даний цикл. Цикли в цьому випадку будуть представлені прямокутниками різної висоти. Це не буде виглядати як імпульсний процес, оскільки між імпульсами не має проміжків – зріз прямокутника першого циклу збігатиметься з фронтом прямокутника наступного циклу. Різниця тут полягатиме лише у висоті прямокутників, визначеній характеристичним показником для кожного циклу.

Якщо кожному циклу приписати значення деякого визначального показника, наприклад, значення рангу даного циклу, величину багатовимірного середнього з отриманих з аналізу його фрактальних показників або якогось окремого, важливого для даної задачі, показника. Тоді, візуалізацію такого бачення можна реалізувати, використовуючи властивості одиничної функції, або функції одиничного стрибка Гевісайда. Ця функція має такий вигляд:

$$U\left(t-t_0\right)=\begin{cases}0, & t<t_0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=t_0,\\ 1, & t>t_0.\end{cases} \tag{8}$$

Саме у такому вигляді (2) дана функція $U\left(t-t_0\right)$ називається узагальненою одиничною функцією Гевісайда. Графік цієї функції на осі часу, зображений на рис. 1, показує те, що в момент часу $t=t_0\neq 0$ має місце зміна її значення з $U\left(t\right)=0$ до значення $U\left(t\right)=1$, а також відбувся її зсув вправо на t_0.

Позитивним моментом використання одиничної функції є те, що будь-який цикл може бути представлений різницею двох одиничних функцій однакової амплітуди, що й зображено на рис. 2.

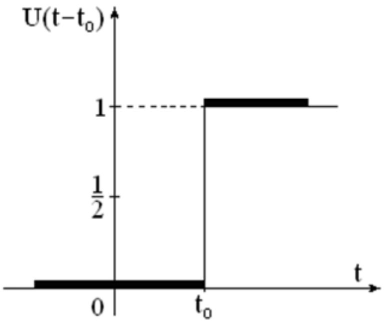

Рис. 1. Графіки одиничної функції.

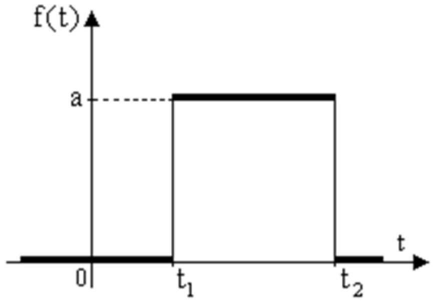

Рис. 2. Графік одиничного імпульсу локалізованого в часі.

Тобто, за допомогою узагальнених одиничних функцій легко представити локалізований в часі цикл, зображений прямокутником висотою $f\left(t\right)$, який має аналітичний опис у формі обмежень тривалості цього імпульсу

$$f\left(t\right)=\begin{cases}a, & t_1<t<t_2,\\ 0, & t<t_1, t>t_2.\end{cases} \tag{9}$$

Функцію $f\left(t\right)$ за допомогою узагальненої одиничної функції можна записати в наступний спосіб

$$f\left(t\right)=a\left[\eta\left(t-t_1\right)-\eta\left(t-t_2\right)\right]. \tag{10}$$

Графік цієї функції має вигляд зображений на рис. 3.

В цьому випадку, циклічний часовий ряд $Y\left(t\right)$ можна подати як суму послідовних в часі циклів у такому вигляді

$$Y\left(t\right)=\sum_{i=0}^{T}\sum_{k=1}^{K}Y_i^k\left(t_i\right)\cdot\left[\eta\left(t_i-t_k\right)-\eta\left(t_i-t_{k+1}\right)\right], \tag{11}$$

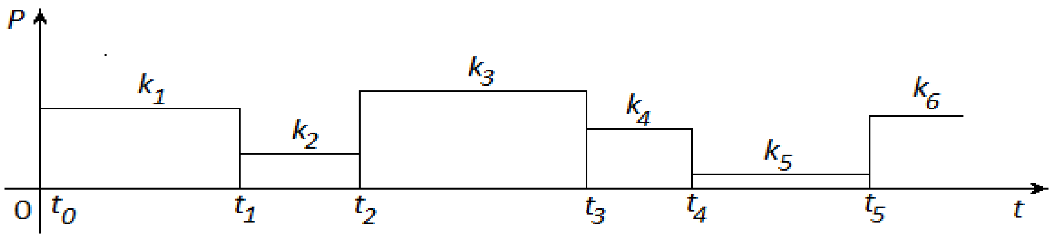

Рис. 3. Значення характеристичного показника P і тривалості циклів як $t_{i+1} - t_i$ для k_i циклів часового ряду

де k – номер моменту часу на початок циклу, а i – індекс моменту часу, в який проведено або зафіксовано дане спостереження (в загальному це біжучий час).

Оскільки значення границь циклів та їх параметрів в результаті попередньої або біжучої обробки даних ці значення є відомі візуалізація (11) у вигляді діаграми чи графіка дає наочну картину стосовно тривалості та розподілу циклів на осі часу.

Циклічні часові ряди, які побудовані на статистичних даних про конкретні реальні процеси володіють фрактальними характеристиками, а тому для їх дослідження можуть використовуватися методи фрактального аналізу. Важливість фрактального виміру часового ряду є в тому, що він вказує на те, що процес є чимось середнім між детермінованим і випадковим [10].

На практиці аналіз часового ряду переважно починають з вивчення його графіка. На основі його розгляду встановлюють вид тенденції, частоту екстремумів, спадні і зростаючі ділянки, викиди. Саме в цей момент можна виділити найбільш цікаві інтервали, які відповідають монотонному зростанню величини значень рівнів – від деякого найменшого значення до деякого найбільшого. Якщо ж циклом вважати зміну значень рівнів, тобто від якогось значення, а далі зростання і спад (чи навпаки) до такого ж значення, то в даній ситуації ми можемо говорити про напівцкли і розглядати ситуації саме в таких інтервалах часу.

Отже циклічність часового ряду може бути зумовлена як самою природою джерела, так і суб'єктом, що його досліджує, проте і в першому і в другому випадку вона є його фізичною характеристикою.

Визначення фрактальних параметрів

Алгоритм визначення точного значення фрактальної розмірності

В даній роботі значення фрактальної розмірності визначено клітинковим методом Гаусдорфа-Безіковича. Фрактальна розмірність є одним з центральних понять фрактальної геометрії. Вона характеризує міру структурованості досліджуваного об'єкта, його самоподібність, тобто відображає як цей об'єкт заповнює простір в якому знаходиться. Наприклад, лінії графіка одновимірного часового ряду зображені на площині – двовимірній системі, займають на ній певну площу і їх розмірність вже не рівна одиниці.

Часовий ряд, переважно, зображають графічно деякою множиною X, точок, кожна з яких представлена парою координат на площині, так, що ординати приймають випадкові значення, а абсциси мають строго неспадний порядок. Отже, кожен рівень часового ряду має фіксоване положення, як точки з відомими координатами. В такому разі, часовий ряд можна розглядати як множину X точок, занурених в двовимірний евклідовий простір.

Одновимірний часовий ряд в такому просторі не є плоским об'єктом (бо утворений лініями), тобто вже не належить до категорії «лінія», розмірність якої рівна одиниці, але і не належить до категорії «площина», розмірність якої – два. За [12], множина X таких точок називається фрактальною, якщо її розмірність Гаусдорфа $D(X)$ не є цілим числом. Розмірність Гаусдорфа за означенням показує яку кількість n «куль» діаметром ε потрібно для того, щоб в кожній такій кулі знаходився хоча б один елемент множини X, тобто $n(\varepsilon) \approx 1/\varepsilon^D$, коли $\varepsilon \to 0$. Логарифмуючи цей вираз та враховуючи зміну діаметр ε отримаємо вираз для розмірності Гаусдорфа, а відтак і фрактальної розмірності:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log n(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \tag{12}$$

З другої сторони, розмірність – це число D, яке виражає зв'язок природної міри геометричної фігури (наприклад, довжина, площа або об'єм) з величиною (в даному випадку довжиною), яку покладено в основу даної метричної системи. Якщо метричний еталон такої величини, прийнятий за одиницю вимірювання, збільшити (зменшити) в b раз, то вказана міра зменшиться (збільшиться) в b^D раз. Цю розмірність називають ***метричною***, а джерелом такого означення є вираз для звичайної міри M (довжини, площі чи об'єму) довільної геометричної кривої, поверхні чи тіла і її можна подати в такому вигляді:

$$M = \lim_{\delta \to 0}\left[N(\delta)\cdot\delta^D\right], \quad D = 1, 2, 3 \tag{13}$$

де $N(\delta)$ – число симплексів (відрізків, клітинок або кубів) з геометричним фактором (лінійним розміром) δ, що визначає апроксимацію вихідної множини (об’єкта) в метричному просторі.

В 1919 р. Гаусдорф запропонував своє означення розмірності компактної множини для такого типу об’єктів в довільному метричному просторі. Він зауважив, що якщо вказані множини покривати кулями радіусом δ, то мінімальне число куль $N(\delta)$, що покривають або містяться в цій множині, при зменшенні δ зростає у відповідності зі степеневим законом:

$$N(\delta) \propto \left(\frac{1}{\delta}\right)^{D}. \tag{14}$$

Причому, показник степеня D може бути обчислений точно. Цей показник Гаусдорф назвав розмірністю. Якщо логарифмувати обидві частини рівняння (14) і подати у вигляді рівності відносно D, тоді отримаємо точне визначення хаусдорфової розмірності:

$$D = \lim_{\delta \to 0}\left[\frac{\ln N(\delta)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right] \tag{15}$$

Як бачимо з наведених інтерпретацій обидва вирази приводять до одного і того ж вигляду поняття розмірності, саме цей вираз і фігурує при розгляді фрактальної розмірності. На основі цього розроблено метод для обчислення точного значення фрактальної розмірності одновимірного часового ряду.

Суть методу полягає в тому, що на графік часового ряду накладають набір сіток, клітинки яких мають квадратну форму, причому, часовий ряд вважають еквідистантним. Розміри клітинок підбирають так щоб їх ширина, в додатному напрямку осі абсциси, охоплювала 2, 3, 4, 5, 6 значень часового ряду. Тоді висоту клітинок h, в напрямку осі ординати можна легко визначити за її шкалою. В результаті, кількість клітинок в кожному вертикальному стовпчику, з основою рівною ширині клітинки, буде рівна

$$n_k = \frac{\max\left(y_i^k\right) - \min\left(y_i^k\right)}{\Delta l} \tag{16}$$

де n – номер стовпчика, k – номер сітки, а Δl – розмір її клітинки, визначений за шкалою ординат.

Очевидно, що кількість клітинок в даному випадку і загальна їх сума будуть дробовим числами, проте це є точне значення кількості клітинок для даного розміру сітки. В результаті маємо співвідношення для обчислення точного значення кількості клітинок фрактальної розмірності для конкретного розміру сітки

$$D_k = \frac{\log\left(n_k\right)}{\log\left(\frac{1}{\Delta l_k}\right)} \tag{17}$$

Як подає рівняння (17) для кожної сітки з цього набору значення величини D_k очевидно будуть відрізнятися. Відображення цих значень в логарифмічних координатах показує, що ці значення з ростом розміру клітинок монотонно спадають за величиною.

Візуально можна стверджувати, що ця їх монотонність має лінійну залежність. На практиці цю залежність апроксимують прямою лінією $y(x) = D \cdot x + b$. Тоді, значення кутового коефіцієнта D приймається за величину фрактальної розмірності часового ряду. Значення фрактальної розмірності D є мірою шорсткості і в одновимірному просторі вищим значенням відповідає і більша шорсткість, зазубреність.

Визначення показника Герста

Аналіз поведінки різноманітних систем, представлених часовими рядами досить часто показує їх фрактальну поведінку та довгострокову залежність – тривалу пам’ять між рівнями. Ця залежність або стійкість у часових рядах пов’язана зі степеневими кореляціями і часто називається ефектом Герста. Емпіричні спостереження багатьох вчених показали, що кореляції між спостереженнями, які знаходяться далеко одне від одного в часі, затухають набагато повільніше, ніж можна було б очікувати від класичних стохастичних моделей [13]. Залежність від тривалої пам'яті характеризується показником Герста H. Варто зазначити, що фрактальна розмірність є локальною властивістю часового ряду, в той час як показник Герста є глобальною характеристикою.

На практиці досить часто фрактальну розмірність замінюють показником Герста H. Це пов’язано з тим, що має місце простий лінійний зв’язок між розмірністю D та показником Герста H, значення якого належать одиничному інтервалу, тобто $H \in [0,1]$.

Для фрактальних – самоподібних часових рядів їх локальні властивості відображаються на глобальних в такий спосіб:

$$D = m + 1 - H \quad (18)$$

де m. – розмірність простору, в даному випадку одновимірного, тобто $m = 1$.

Якщо $H > 0.5$ має місце залежність від тривалої пам'яті або персистенція і, в цьому випадку, ряд має стійкий тренд. При $H < 0.5$ ряд має коливальний характер. Іншими словами, чим ближче значення показника H до 1, тим більш зазубреним буде часовий ряд. Коли значення H близьке або рівне 0.5 часовий ряд є випадковим і не пам'ятає своїх початкових умов. Отже, для визначення показника Герста достатньо знайти значення фрактальної розмірності.

Використовуючи співвідношення (18), значення показника Герста визначають так:

$$H = 2 - D \quad (19)$$

З виразу (19) випливає: точність значення величини показника H визначається точністю значення величини показника фрактальної розмірності D.

Самоподібність, безсумнівно, є природним припущенням для багатьох систем. Вважається, що через інтуїтивну привабливість і відсутність відповідних альтернатив самоподібність і лінійний зв'язок виправдані великою кількістю результатів, отриманих вченими.

Обчислення фрактальних характеристики циклічних часових рядів на прикладі даних сонячної активності – чисел Вольфа

У лівій частині виразу (1) значення величин R і S досить легко визначити за допомогою отриманих значень, проте в правій частині значення експоненти Герста H можна визначити, лише визначивши значення фрактальної розмірності *D*. Для демонстрації застосування даного підходу використано дані сонячної активності – числа Вольфа.

Представлення сонячної активності середньомісячними числами Вольфа, які відповідають середньому значенню спостережуваної кількості плям на Сонці протягом кожного місяця. Підрахунок цих плям є відомий з 1749 року і проводиться кожен день і в наш час. В даній роботі використано дані до 2019 року, тобто до завершення 24-го циклу [14].

Кількість рівнів цього часового ряду становить 3251, які, в свою чергу, утворюють 24 цикли з подібною структурою та з різною тривалістю. Результати фрактального аналізу інтенсивності плям на Сонці розподілених за циклами є приведені в табл. 1. В результаті як статистичного так і фрактального аналізів в таблицю внесені такі числові дані.

Таблиця 1

№ циклу	Обсяг даних	Середнє	Середньо-квадратич. відхилення	Розмах кумулят	Фрактальна розмірність	Експонента Герста
K	N	A	S	R	D	H
1	134	69,864	41,795	446,95	1,143	0,857
2	109	98,486	64,92	392,97	1,1891	0,8109
3	112	108,661	87,49	2419,78	1,1632	0,8368
4	165	102,035	75,32	5173,84	1,1931	0,8069
5	152	37,407	31,38	2133,92	1,104	0,896
6	150	31,339	30,05	1662,22	1,1538	0,8462
7	127	62,647	44,91	2325,28	1,1063	0,8937
8	117	112,309	80,04	5802,86	1,1472	0,8528
9	150	98,857	68,67	3915,95	1,1176	0,8824
10	136	91,615	60,68	3297,02	1,2252	0,7748
11	142	88,335	78,06	4629,36	1,0644	0,9356
12	136	56,432	44,73	2591,22	1,0332	0,9668
13	147	64,143	50,85	3087,1	1,1973	0,8027
14	137	53,439	43,99	2482,79	1,0577	0,9423
15	121	73,320	57,57	2792,75	1,0811	0,9189
16	122	67,744	47,6	2530,63	1,0792	0,9208
17	126	95,321	68,8	3504,12	1,0665	0,9335
18	123	108,033	67,8	4126,37	1,0261	0,9739
19	127	128,135	100,78	5730,86	1,0883	0,9117
20	141	85,082	52,69	3204,06	1,1656	0,8344
21	124	112,568	82,91	4468,64	1,137	0,863
22	117	107,863	82,91	4022,32	1,1298	0,8702
23	153	80,046	65,69	4294,68	1,2989	0,7011
24	145	49,467	41,21	2606,53	1,125	0,875

Статистичні: номер циклу K від першого до 24-го, який завершився 1 грудні 2019 року, обсягу циклу N , вираженому кількістю місяців, середнього арифметичного A кількості плям в циклі та середньо-квадратичного відхилення кількості плям S для кожного циклу.

Особливість часового ряду кількості плям на Сонці, яка у свій спосіб характеризує сонячну активність полягає в тому, що поділ на цикли здійснюється природним шляхом, а саме, відсутність плям або мала їх кількість є границями циклів. Крім того, повторюваність їх в якісному сенсі ідентична, проте в кількісному – маємо чітко виражену відмінність в тривалості циклів, в характері присутніх трендів в кожному з них, хаотичній динаміці амплітуд, а отже і хаотичній зміні дисперсії рівнів, асиметричності гілок зростання і спаду та в значенні числа плям.

Висновки

Використання фрактального аналізу, зокрема, до часових рядів має в наш час досить широке застосування, хоча використовується лише частина його можливостей. Проте, стосовно часових рядів можна зауважити, що фрактальному аналізу переважно піддають весь ряд, окремо зазначаючи присутність сезонної та циклічної компонент та інших його характеристик. На нашу думку, як і багатьох методичних матеріалів з аналізу часових рядів, виявлення сезонності і циклів має бути первинним.

За своєю фізичною суттю часові ряди фактично характеризують динаміку вимірюваного спостережуваного показника, яка може залежати від впливу багатьох чинників, як зовнішніх, так і внутрішніх, і, які неявно відображені в його поведінці. Це, у свою чергу, не створює повної ідентичної картини зміни станів джерела даних часового ряду. Власне, з цієї причини, мають неточність та малий горизонт методи прогнозування на основі трендів часових рядів.

Виділення циклів в часових рядах на основі характеру поведінки тренду може дати вагомі результати та корисну інформацію для вироблення і прийняття важливих рішень.

Фрактальні характеристики циклів дають нові знання про циклічний процес зміни сонячної активності. Так, фрактальна розмірність вказує на складність (хаотичність в динаміці значень рівнів), показник Герста дозволяє встановити випадковість, регулярність та присутність тренду.

Література

1. Watson M. W. Time Series: Cycles. https://www.princeton.edu/~mwatson/papers/isb201119.pdf

2. Jonath Jose. Introduction to time series analysis and its applications. https://www.researchgate.net/publication/362389180

3. Olspert N., Kapyla M. J. and Peltz J. Method for estimating cycle lengths from multidimensional time series: Test cases and application to a massive "in silico" dataset. arXiv:1612.01791v1 [astro-ph.SR] 6 Dec 2016. https://ieeexplore.ieee.org/document/7840977

4. Lytvynenko Iaroslav. Method of segmentation of determined cyclic signals for the problems related to their processing and modeling. Scientific Journal of the Ternopil National Technical University 2017, № 4 (88) 153-169.

5. Sanchez J.R., Arizmendi C.M. Fractal Analysis of Electrical Power Time Series. https://www.researchgate.net/publication/1954436_Fractal_Analysis_of_Electrical_Power_Time_Series

6. Malhar Kale, Ferry Butar Butar. Fractal Analysis of Time Series and Distribution Properties of Hurst Exponent. https://www.researchgate.net/publication/281092858

7. Rajkumar B. Haque S. Hrudey W. Fractal dimensions of umbral and penumbral regions of sunspots. Solar Physics volume 292, Article number: 170 (2017). https://doi.org/10.1007/s11207-017-1184-2

8. Bal A., Ganguly D., Chatterjee K. (2021). Stationarity and Self-similarity Determination of Time Series Data Using Hurst Exponent and R/S Ration Analysis. In: Hassanien, A.E., Bhattacharyya, S., Chakrabati, S., Bhattacharya, A., Dutta, S. (eds) Emerging Technologies in Data Mining and Information Security. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1300. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-33-4367-2_57

9. Ceballos Roel F., Largo Fe F. On The Estimation of the Hurst Exponent Using Adjusted Rescaled Range Analysis, Detrended Fluctuation Analysis and Variance Time Plot: A Case of Exponential Distribution. arXiv:1805.08931 [stat.CO] (or arXiv:1805.08931v1 [stat.CO] for this version). https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.08931, Journal reference: Imperial Journal of Interdisciplinary Research 2017 (Volume 3, Issue 8, pp. 424-434)

10. Brooks C. (1995) A measure of persistence in daily pound exchange rates. Applied Economics Letters, 2 (11). pp. 428-431. ISSN 1466-4291. doi: https://doi.org/10.1080/135048595356998.

11. Jonath Jose. Introduction to time series analysis and its applications. https://www.researchgate.net/publication/362389180_INTRODUCTION_TO_TIME_SERIES_ANALYSIS_AND_ITS_APPLICATIONS

12. Mandrlbrot Benoit B. The Fractal Geometry of Nature. Times Books, 1982, 468 pages, ISBN-10: 0716711869.

13. Chu Kiong Loo, Andrews Samraj, and Gin Chong Lee. Evaluation of Methods for Estimating Fractal Dimension in Motor Imagery-Based Brain Computer Interface. Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2011, Article ID 724697, 8 pages, doi:10.1155/2011/724697

14. NASA data on solar activity observation. https://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch/SN_m_tot_V2.0.txt.