DOI 10.31891/2307-5732-2024-341-5-2
УДК 534.1

ПУКАЧ ПЕТРО
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-0359-50205
e-mail: petro.y.pukach@lpnu.ua
СЛЮСАРЧУК ОЛЬГА
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0003-3464-0252
e-mail: olha.z.sliusarchuk@lpnu.ua
ПУКАЧ ПАВЛО
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-0488-6828
e-mail: pavlo.p.pukach@lpnu.ua

ЯКІСНІ ТА ЧИСЛОВІ ПІДХОДИ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНІЧНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

У роботі розглянуті певні важливі з точки зору практичних застосувань класи одновимірних середовищ, у математичних моделях яких згинальна жорсткість середовища не є суттєвою з точки зору фізичної інтерпретації процесу коливань. Математичні моделі нелінійних коливальних процесів у технологічних системах вказаного вигляду відзначаються різноманітністю структури. Тому дослідження перехідних процесів у таких системах є доволі складним завданням. Не існує точних аналітичних методів знаходження розв'язків змішаних задач. Крім того, застосування хоча б якихось наближених чи аналітичних підходів до побудови розв'язків у відповідних модельних рівняннях для вивчення та аналізу динамічних процесів у таких системах є неможливим. У зв'язку з цим необхідне створення нової методики дослідження, яка поєднує в собі якісні та чисельні підходи до дослідження. У зв'язку з вказаним у цій праці вирішено комплекс наступних дослідницьких завдань: проведено обґрунтування існування та єдиності розв'язків відповідних задач математичної фізики, тобто встановлено умови коректності; проведено якісну оцінку вказаних розв'язків; застосування чисельного методу підтвердило адекватність наведених якісних підходів; здійснено аналіз особливостей динаміки у деяких класах систем. При дослідженні коректності використано загальні підходи нелінійної теорії крайових задач – метод Гальоркіна та метод компактності. Застосовано процедуру отримання апріорних оцінок та отримання збіжностей у відповідних функціональних просторах. При чисельному дослідженні модельних задач використано метод Рунге-Кутта четвертого порядку та просторово-часову дискретизацію. Застосування розробленої у статті методики та гібридного (якісно-числового) підходу при аналізі математичних моделей дозволило отримати можливість ефективного контролю та оптимізації параметрів технологічних систем. Крім того, така методика дає можливість запобігати появі резонансних режимів коливань, які негативно впливають на технологічний процес.

Ключові слова: якісні методи, нелінійні коливання, нелінійне хвильове рівняння, метод Гальоркіна, метод монотонності, метод компактності, нелінійні пружні властивості.

PUKACH PETRO
Lviv Polytechnic National University
SLIUSARCHUK OLHA
Lviv Polytechnic National University
PUKACH PAVLO
Lviv Polytechnic National University

QUALITATIVE AND NUMERICAL APPROACHES TO STUDY OF NONLINEAR MATHEMATICAL MODELS OF TECHNICAL OSCILLATORY SYSTEMS

The paper considers certain classes of one-dimensional media that are important from the practical applications, in the mathematical models of which the bending stiffness of the medium is not significant from the point of view of the physical interpretation of the oscillation process. Mathematical models of nonlinear oscillatory processes in technological systems of the specified type are characterized by a variety of structures. Therefore, the study of transient processes in such systems is a rather difficult task. There are no exact analytical methods for finding solutions to mixed problems. In addition, the application of at least some approximate or analytical approaches to the construction of solutions in the relevant model equations for the study and analysis of dynamic processes in such systems is impossible. In this regard, it is necessary to create a new research methodology that combines qualitative and quantitative research approaches. In connection with the stated in this work, a complex of the following research tasks was solved: the justification of the existence and unity of the solutions of the corresponding problems of mathematical physics was carried out, that is, the conditions of correctness were established; a qualitative assessment of the specified solutions was carried out; the use of the numerical method confirmed the adequacy of the given qualitative approaches; an analysis of dynamics features in some classes of systems was carried out. When studying the correctness, general approaches of the nonlinear theory of boundary value problems were used - the Galerkin method and the compactness method. The procedure for obtaining a priori estimates and obtaining convergences in the corresponding functional spaces is applied. The fourth-order Runge-Kutta method and spatio-temporal discretization were used in the numerical study of model problems. The application of the methodology developed in the article and the hybrid (qualitative-numerical) approach in the analysis of mathematical models made it possible to effectively control and optimize the parameters of technological systems. In addition, this technique makes it possible to prevent the emergence of resonant modes of oscillations, which negatively affect the technological process.

Key words: qualitative methods, nonlinear oscillations, nonlinear wave equation, Galerkin method, monotonicity method, compactness method, nonlinear elastic properties.

Актуальність проблематики та аналітичний огляд літератури

Бурхлива тенденція до удосконалення нових методів та підходів, використання інформаційно-орієнтованих моделей реальних технологічних систем у сучасних проблемах машинобудування ускладнює проблеми постановки і розв'язання таких класів нелінійних задач математичної фізики, математичні моделі яких у рамках існуючих дотепер схем дослідити не дається. Мова, зокрема, йде про класичні підходи, асимптотичні методи нелінійної механіки тощо. До такого типу задач відносяться деякі важливі практичні задачі машинобудування: задачі про коливання гнучких елементів різноманітних передавальних механізмів, дослідження систем відтворення інформації, моделювання нелінійних коливань ліній конвеєрів та канатних доріг, устаткування для намотування дроту, синтез та оптимізація параметрів бурильного обладнання для нафтових і газових свердловин, трубопроводів тощо.

Математичні моделі у всіх вказаних та багатьох інших випадках відзначаються складною структурою та характеризуються відсутністю загальних аналітичних (точних чи наближених асимптотичних) методів розв'язування такого класу задач. Складність зумовлена, зокрема, нелінійністю пружного закону для матеріалу, з якого виготовлено технологічний виріб, та нелінійним характером закону зміни амплітуди коливань від різного роду дисипативних сил та сил опору. Проблема моделювання та дослідження вказаних нелінійних систем в загальному випадку розв'язана лише для певного класу задач математичної фізики, зазвичай, вузького. Таким чином, при дослідженні нелінійних технологічних коливальних систем не існує прийнятних з точки зору адекватності загальних методів для кількісної оцінки та обчислення амплітудно-частотних характеристик динамічного процесу.

Водночас станом на даний час широке коло якісних методів та підходів теорії нелінійних задач математичної фізики дають можливість для доволі загального вигляду згаданих вище технологічних коливальних систем складної структури отримати результати існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків таких задач від початкових даних. Розроблено методики, які дозволяють довести коректність (існування, єдиність, неперервну залежність) розв'язку певної крайової задачі в математичній моделі. Цей результат дає змогу в наступних етапах дослідження математичної моделі застосовувати відповідні чисельні методи знаходження розв'язку. Тому проблема поєднання якісних методів при дослідженні з можливістю застосовувати адекватні чисельні підходи в нелінійних коливальних системах є актуальною. Ми називаємо такий підхід якісно-числовим або гібридним.

Метод Гальоркіна та метод монотонності [1] є класичними методами сучасної теорії нелінійних крайових задач. За допомогою цих методів можна досліджувати якісні властивості розв'язків у моделях нелінійних коливань під дією сил опору внутрішньої та зовнішньої природи. Саме таке дослідження проведено у цій роботі. Наукова новизна результатів роботи полягає в розвитку та узагальненні методів аналізу нелінійних крайових задач на широкі класи коливальних систем, які мають практичне використання.

У праці досліджено якісні властивості розв'язків задач для таких нелінійних хвильових рівнянь та систем

$$u_{tt} - \beta u_{xx} + \gamma(x, t, u_t) = f(x, t), \tag{1}$$

де β– стала, яка визначає фізико-механічні параметри системи, функція γ характеризує нелінійну залежність амплітуди коливань від сил опору. Задачі для еволюційних хвильових рівнянь вигляду (1) та подібних до них у обмежених та необмежених за просторовою та часовою змінною областях були предметом дослідження у працях [2–9]. Результати існування та єдиності отримані або в припущенні певної поведінки розв'язку або без таких припущень. У [10] розглянуто двовимірну змішану задачу для слабко нелінійної системи хвильових рівнянь. Математична модель коливань, яка враховує нелінійний характер пружних сил та лінійний характер сил опору в системі вивчена в [11].

Обґрунтування коректності певних класів математичних моделей слабко та сильно коливальних систем нелінійного вигляду здійснено в роботах [12–18]. Зокрема, в цих роботах розроблено методологію дослідження коректних змішаних задач для нелінійних дисипативних еволюційних рівнянь типу коливань балки в обмеженій та необмеженій областях.

Формулювання задачі. Огляд якісних методів дослідження нелінійних математичних моделей

Методика дослідження математичної моделі слабко нелінійних коливань однорідного середовища за умови нелінійного впливу сили опору формулюється для змішаної задачі

$$U_{tt} - \alpha U_{xx} + g|U_t|^{p-2}U_t = \Phi(x, t), \quad p > 2, \tag{2}$$

з початковими умовами

$$U(x, 0) = U_0(x), \tag{3}$$

$$U_t(x, 0) = U_1(x) \tag{4}$$

та крайовою умовою

$$U(0, t) = 0. \tag{5}$$

У рівнянні (2) та умовах (3)-(5):

- $U(x, t)$ – величина зміни положення точки середовища з координатою x для довільного моменту часу t;
- α – деяка стала, яка описує пружні властивості середовища, залежить від площі поперечного перерізу, погонної маси ділянки середовища тощо;
- $g > 0$ – деяка стала, яка характеризує та описує нелінійність сил зовнішнього опору;

-$\Phi(x,t)$ – функція впливу на середовище зовнішніх сил;

- $U_0(x)$ та $U_1(x)$ описують початкові дані (відхилення в початковий момент часу та початкову швидкість середовища) відповідно.

Припускаємо, що $x \in (0,+\infty)$, тобто розглядаємо модель напівбезмежного середовища, а сам динамічний процес розглядаємо на безмежному часовому інтервалі $t \in [0,+\infty)$.

Короткий огляд результатів якісного дослідження. Узагальненим розв'язком задачі (2) – (5) будемо називати функцію $U(x,t)$, яка задовольняє початкову умову (3) та тотожність інтегрального вигляду в області Q_τзміни просторової та часової змінної

$$\int_{Q_\tau}[-U_tV_t+\alpha U_xV_x+|U_t|^{p-2}U_tV-fV]dxdt+$$
$$+\int_0^{+\infty}U_t(x,\tau)\,V(x,\tau)dx-\int_0^{+\infty}U_1(x)\,V(x,0)dx \tag{6}$$

для довільного $\tau \in (0,T)$ та для довільної функції V , яка має обмежений носій та є такою, що тотожність (6) має сенс.

Метою дослідження розв’язку нелінійної задачі (2)-(5) для хвильового рівняння (2) є саме отримання якісними методами теорії нелінійних крайових задач достатніх умов коректності (існування та єдиності) розв'язку в класі локально інтегрованих функцій. Розглянуте вище рівняння описує математичну модель вимушених коливань одновимірної технологічної коливальної системи в середовищі з опором. Основний результат якісного дослідження: при виконанні певних додаткових умов існує функція $U(x,t)$ - єдиний у відповідному функціональному просторі узагальнений розв'язок задачі (2)-(5) з певними функціональними властивостями.

Результати застосування чисельного інтегрування

Здійснимо чисельне моделювання для окремого випадку рівняння (2), а саме за умови, що фізико-механічні характеристики середовища є незмінними вздовж його довжини, тобто

$$U_{tt}=aU_{xx}-g_0|U_t|^{p-2}U_t=0.$$

Припускаємо, що a та g_0– константи, крайові умови приймають вигляд $U(0,t)=U(l,t)=0$. Початкова форма описується так:

$$U_0(x)=\begin{cases}\dfrac{2hx}{l}, & 0\le x\le \dfrac{l}{2},\\ 2h-\dfrac{2hx}{l}, & \dfrac{l}{2}\le x\le l.\end{cases}$$

Припускаємо, що $U_t(x,0)=0,$ тобто початкова швидкість дорівнює нулю. Розглядувана задача моделює поперечні коливання одновимірного середовища, яке у момент часу $t=0$ навантажена зосередженою силою. Точка прикладання цієї сили має координату $x=\frac{l}{2}$. Сформульована задача має вигляд задачі (2)-(5). Як можна показати (про це сказано вище), існує єдиний в певному функціональному просторі узагальнений розв'язок такої задачі. Враховуючи цей факт, для чисельного знаходження такого розв’язку можна вибирати адекватний з точки зору обчислювальної складності метод. Вказане вище рівняння можна звести до системи, яка містить два рівняння вигляду

$$\begin{cases}U_t(x,t)=V(x,t),\\ V_t(x,t)=aU_{xx}-g_0|U_t|^{p-2}V.\end{cases}$$

Проміжок $[0,l]$розіб’ємо точками просторової дискретизації $x_i=\frac{il}{n}$ на n однакових частин довжини $\Delta=\frac{l}{n}$. Похідну за просторовою змінною можна наблизити скінченною різницею вигляду

$$U_{xx}=\frac{U(x_{i-1},t)-2U(x_i,t)+U(x_{i+1},t)}{\Delta^2}.$$

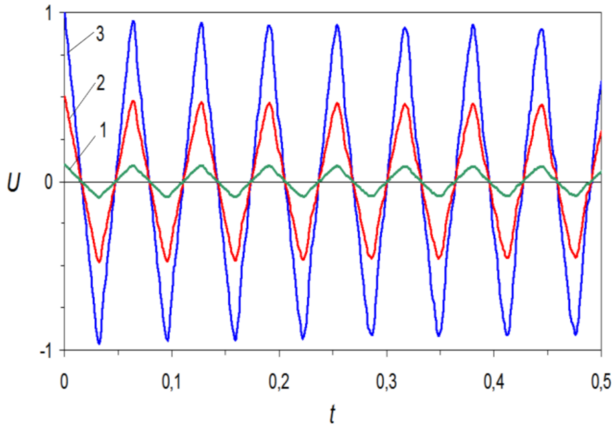
Чисельне розв’язання системи звичайних диференціальних рівнянь $\begin{cases}U'(t)=V(t),\\ V'(t)=L(t,V),\end{cases}$ де $L(t,V)=aU_{xx}-g_0|U_t(x,t)|^{p-2}V(x,t)$, здійснюємо методом Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$\begin{cases}U_{k+1}=U_k+V_k\Delta t+\dfrac{\Delta t}{6}(k_1+k_2+k_3),\\ V_{k+1}=V_k+\dfrac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\end{cases}$$

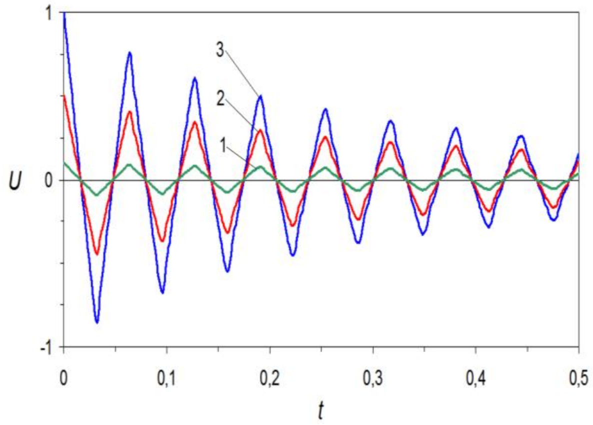
причому $t_k=k\Delta t$, $U_k=U(t_k)$, $V_k=V(t_k)$,

$$\begin{cases}k_1=L(t_k,U_k,V_k)\Delta t,\\ k_2=L\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2},U_k+V_k\dfrac{\Delta t}{2},V_k+\dfrac{k_1}{2}\right)\Delta t,\\ k_3=L\left(t_k+\dfrac{\Delta t}{2},U_k+V_k\dfrac{\Delta t}{2}+\dfrac{k_1}{4}\Delta t,V_k+\dfrac{k_2}{2}\right)\Delta t,\\ k_4=L\left(t_k+\Delta t,U_k+V_k\Delta t+\dfrac{k_2}{2}\Delta t,V_k+k_3\right)\Delta t.\end{cases}$$

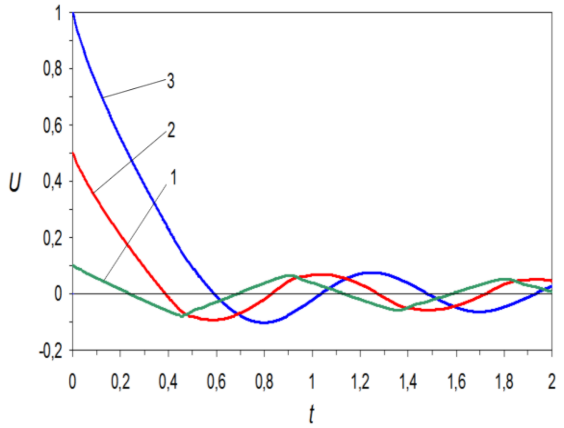
На рис. 1а) – 1г) представлені графіки зміни в часі від положення середини точки середовища за умов різного початкового відхилення (крива 1 - $h=0{,}15$; крива 2 - $h=0{,}5$; крива 3 - $h=0{,}95$) із урахуванням різних моделей сил опору. Усі інші параметри системи вважаємо безрозмірними.



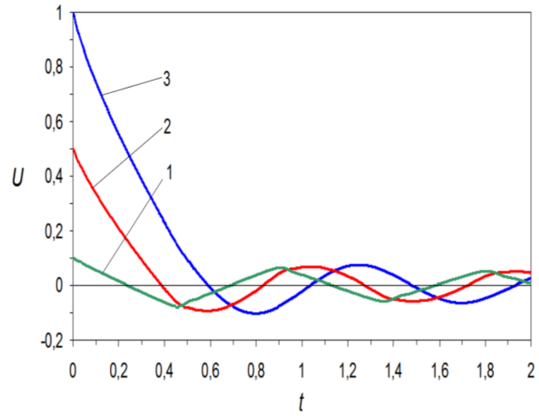
а) $a=800$, $g_0=1$, $p=2{,}2$.



б) $a=800$, $g_0=1$, $p=2{,}9$.



в) $a=10$, $g_0=4$, $p=3{,}9$.

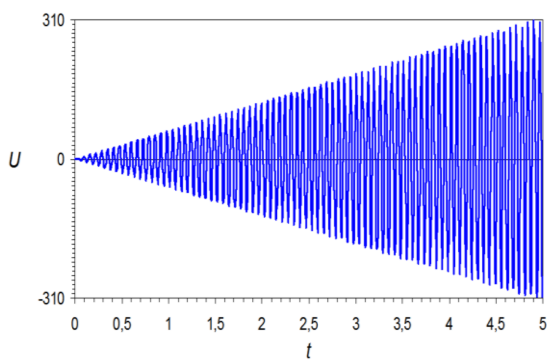


г) $a=10$, $g_0=4$, $p=5$.

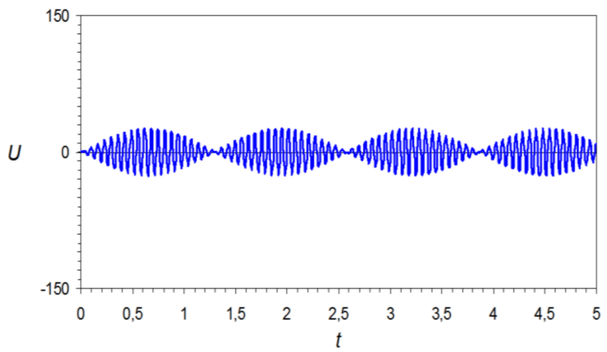
Рис. 1. Графік зміни з часом положення середини середовища за різноманітних значень параметрів a, g_0, p.

Чисельна симуляція проведена також з метою встановлення умов та параметрів динамічного резонансу. При такому підході видається можливим визначити вплив параметрів нелінійної математичної моделі на амплітуду в коливальних динамічних режимах типу биття коливань, які є близькими до резонансних. На рис. 2 а) – б) представлені графіки часової залежності відхилення середини середовища Припускаємо, що $h=1$. Враховано різні нелінійні моделі сил зовнішнього опору. Крім того, розглянуто різні значення частоти зовнішньої сили та значення параметрів системи. Вивчаємо математичні моделі коливань, які рисуємо диференціальним рівнянням

$$U_{tt}(x,t)=\alpha U_{xx}(x,t)-g_0\left|U_t(x,t)\right|^{p-2}U_t(x,t)+k\sin\omega t-b,\ b=const,\quad p>2.$$



а) $l=2$, $a=800$, $g_0=0{,}2$, $k=8000$, $\omega=\sqrt{a}\,\pi$, $b=0$, $p=3$ **(нелінійний резонанс);**



б) $l=2$, $a=800$, $g_0=0$, $k=8000$, $\omega=\sqrt{a}\,\pi$, $b=-7$, $p=3$ **(динамічний режим «биття коливань»).**

Рис. 2. Графіки відхилення середини середовища в режимах резонанс та биття коливань за різних значень параметрів середовища

Висновки

У цій праці отримала подальший розвиток гібридна (якісно-числова) методика комплексного підходу до вивчення амплітудно-частотних характеристик у математичних моделях технологічних коливальних систем. Актуальність таких підходів зумовлена широким застосуванням відповідних математичних моделей у задачах синтезу та оптимізації параметрів промислового обладнання. Показано на ефективність такого підходу у випадках неможливості застосування аналітичних та наближених асимптотичних методів розв’язування відповідних крайових задач математичної фізики.

Якісні результати, отримані у цій роботі, а також представлені на їх основі чисельні та графічні залежності показують наступне.

- наявність в коливальній системі сили зовнішнього опору має своїм наслідком затухання коливань одновимірного середовища;
- основним чинником швидкості затухання нелінійних коливань є величина степеня нелінійності сили опору (або степеня нелінійності відповідного пружного закону);
- за достатньо великої величини показника нелінійного степеневого закону сили опору (показники степеня $p \geq 3$) процес коливань переходить в аперіодичний;
- період коливань мало залежить від сили опору, якщо значення параметрів g, p та h є малими, тобто у цьому випадку такий вплив є доволі незначний.

Зазначимо, що такий факт також можна підтвердити інтегруванням відповідних диференціальних рівнянь асимптотичними методами. Зрозуміло, це можна зробити, якщо відповідні математичні моделі допускають можливість застосування такої методики. Отже, вказана у праці методика добре узгоджується з відомими дотепер підходами.

Гібридна (якісно-числова) методика має широкі перспективи при дослідженні математичних моделей складних нелінійних механічних систем з дисипацією. Це одна з можливих подальших перспектив її застосування.

References

1. Lions J.-L. 1969. Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, France.
2. Pukach P. Ya. 2023. Qualitative methods for researching mathematical models of nonlinear mechanical systems of complex structure. Publishing House Spolom, Lviv, Ukraine, 144 p.
3. Dragieva N. A. 1987. A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity. Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.,Volume 23, № 4, 95–106.
4. Metrikine A. V. 2004. Steady state response of an infinite string on a non-linear visco-elastic foundation to moving point loads. Journ. Sound Vibr., Volume 272, 1033–1046.
5. Yang Zhijian. 1997. Blowup of solutions for a class of quasilinear evolution equations. Jour. of Nonlin. Anal. Theory. Meth. and Appl.. Volume 28, No. 12, 2017–2032.
6. Astaburuaga M. 1998. Scattering frequencies for a perturbed system of elastic wave equations. J. Math. Anal. And Appl., Volume 219, 52–75.
7. Gurtin M. 1981. An introduction to continuum Mechanics. Academic Press, New York. USA, 261 p.
8. Park J. Y. 2002. Variational inequality for quasilinear wave equations with nonlinear damping terms. Nonlin. Anal., Volume 50, 1065–1083.
9. Glazatov S. 1992. On some variational inequalities for nonclassical type operators. Banach Center Publications, Volume 27, 169–174.
10. Ryo Ikehata. 2005. Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equation. J. Math. Anal. And Appl., Volume 301, 366–377.
11. Levine H. A. 1998. Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equations. Journ. Math. Anal. And Appl., Volume 228, 181–205.
12. Santee D. M. 2006. Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads. Shock and Vibrations, Volume 13, 273–284.
13. Todorova G. 2001. Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping. Journ. Diff. Equat., Volume 174, 464–489.
14. Pukach P. Ya. 2013. Research of transversal vibrations of semi-infinite cable under the action of nonlinear resistance forces. XVI International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations". Abstracts of conference reports. Kiev, Ukraine, May 29–31, 2013, 250
15. Gu R.J. 2000. Frictional wear of a thermoelastic beam. Journ. Math. Anal. And Appl., Volume 242., 212–236.
16. Majdoub M. 2005. Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation. Journ. Math.Anal. Appl., Volume 301, 354–365.
17. Clark H. R. 2002. Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains. Electronic Journ. Qualit. Theory of Diff. Equat., No 7, 1–21.
18. M’Bagne F. 2008. Regularity result for the problem of vibrations of a nonlinear beam. Electronic Journal of Differential Equations, No. 27, 1–12.