https://doi.org/10.31891/2307-5732-2026-365-50
УДК 624.131.3

ДОРОФЄЄВ ЮРІЙ
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0009-0001-0242-6094
e-mail: yurdorof@gmail.com
ГОРЯЩЕНКО СЕРГІЙ
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0001-6623-2523
e-mail: gsl7@ukr.net
ДОРОФЄЄВ ОЛЕКСАНДР
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000 0003 3550 3487
e-mail: alexdorofeyev60@gmail.com

ОБҐРУНТУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ МЕХАНІЗМІВ З ГРАНУЛЬОВАНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Однією з деформаційних характеристик гранульованих матеріалів, що найчастіше використовується, є модуль зсуву G, який, на відміну від пружних і пластичних тіл, залежить як від деформацій γ_0, так і від величини стискуючого напруження σ_0. Отже, він повинен розглядатись не як стала матеріалу, а як параметр поверхні деформування $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0,\ \sigma_0)$. Його величина залежить від досягнутого рівня напружено-деформівного стану й може бути визначена тільки за результатами лабораторних випробувань.

Аналіз експериментальних досліджень, а також опублікованих в літературі даних, дозволив обґрунтувати покладені в основу математичної моделі співвідношення, що описують закономірності зміни форми і об'єму дискретного середовища. Закономірність зміни форми в системі осей τ_o, γ_o, σ_o запропоновано описувати апроксимуючою експериментальні дані зручною для розрахунків степеневою залежністю.

Математична модель повинна бути побудована таким чином, щоб шляхом безперервної чи дискретної зміни впливаючих на процес взаємодії параметрів, прогнозувати поведінку системи. В такій постановці вона дозволяє визначити необхідні для розрахунку машини або механізму силові параметри, потужність рушія, описати особливості їх функціонування в різних умовах, детально запроектувати конструкції робочих органів та силової частини машини.

В статті розглядається тільки фрагмент загальної моделі – модель взаємодії з дискретним середовищем окремих елементів механізму. Основою для моделювання є запропоноване подання процесу у вигляді задачі взаємодії елементів машини (механізму) із неоднорідним середовищем з суттєвим внутрішнім тертям. Найбільш повно процес взаємодії елементів машини з середовищем можна оцінити шляхом розв'язання контактної задачі взаємодії пружного елемента з середовищем. Граничні умови формулюють таким чином, щоб задача моделювання якомога достовірніше описувала особливості технологічного процесу.

Відмінність поставленої нелінійної задачі полягає в тому, що закони деформування матеріалу технологічного дискретного середовища описується складними нелінійними співвідношеннями між інваріантами тензорів напружень і деформацій, котрі враховують прояв внутрішнього тертя та дилатансії. В такій постановці деформаційні параметри середовища залежать від досягнутого в кожній його точці рівня напруженого стану, тому задачу можна класифікувати як фізично нелінійну граничну задачу неоднорідної області.

Ключові слова: *гранульоване середовище; математична модель; нелінійна задача; внутрішнє тертя; дилатансія.*

DOROFIEIEV YURII, HORIASHCHENKO SERHIY, DOROFIEIEV OLEKSANDR
Khmelnytskyi National University

JUSTIFICATION OF INVARIANT RELATIONSHIPS AND FORMULATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE MECHANISM ELEMENTS INTERACTION WITH A GRANULAR ENVIRONMENT

One of the most commonly used deformation characteristics of granular materials is the shear modulus G, which, unlike elastic and plastic bodies, depends on both deformations γ_0 and the magnitude of compressive stress σ_0. Therefore, it should be considered not as a material constant, but as a parameter of the deformation surface$\tau_0 = \tau_0(\gamma_0,\ \sigma_0)$. Its value depends on the achieved level of stress-strain state and can be determined only based on the results of laboratory tests.

The analysis of experimental studies, as well as data published in the literature, allowed us to substantiate the relations that form the basis of the mathematical model, describing the regularities of the change in the shape and volume of a discrete medium. It is suggested to describe the regularity of the shape change in the system of axes τ_o, γ_o, σ_o by a power dependence that approximates the experimental data and is convenient for calculations.

The mathematical model should be constructed in such a way that, by continuously or discretely changing the parameters influencing the interaction process, the behavior of the system can be predicted. In such a formulation, it allows determining the power parameters necessary for calculating a machine or mechanism, the power of the engine, describing the features of their functioning in different conditions, and designing in detail the structures of the working bodies and the power part of the machine.

The article considers only a fragment of the general model - a model of interaction with a discrete environment of mechanism individual elements. The basis for modeling is the proposed representation of the process in the form of an interaction problem of machine elements (mechanism) *with a non-uniform environment with significant internal friction. The interaction process of machine elements with the environment can be most fully evaluated by solving the contact interaction problem of an elastic element with the environment. The boundary conditions are formulated in such a way that the modeling problem describes the features of the technological process as accurately as possible.*

The peculiarity of our nonlinear problem is that the deformation laws of the material of the technological discrete medium are described by complex nonlinear relations between the invariants of the stress and strain tensors, which take into account the impact of internal friction and dilatancy. In such a formulation, the deformation parameters of the medium depend on the achieved stressed state level at each of its points, therefore the problem can be classified as a physically nonlinear boundary value problem of an inhomogeneous area.

Keywords: *granular medium; mathematical model; nonlinear problem; internal friction; dilatancy.*

Стаття надійшла до редакції / Received 16.02.2026
Прийнята до друку / Accepted 13.03.2026
Опубліковано / Published 28.05.2026

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Найважливішою принциповою особливістю деформування, яку необхідно враховувати при моделюванні взаємодії елементів машин, конструкцій або механізмів з гранульованим (дискретним) технологічним середовищем, є залежність деформацій зсуву γ_0 не тільки від дотичних напружень τ_0, але й від стискуючих нормальних напружень σ_0.

Однією з деформаційних характеристик гранульованих матеріалів, що найчастіше використовується, є модуль зсуву *G*, який за фізичним змістом є похідною функції $\tau_0 = f(\gamma_0)$. На відміну від пружних тіл, де *G=const*, і пластичних, де $G = F(\gamma_0)$, модуль зсуву дискретних матеріалів залежить як від деформацій γ_0, так і від величини стискуючого напруження σ_0. Це наглядно демонструють графіки, представлені на рис. 1.

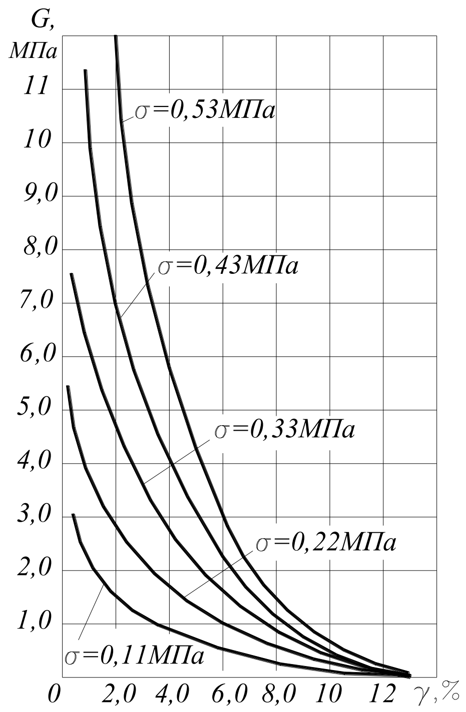

Рис. 1. Залежність модуля зсуву від деформацій γ та від напружень σ

Отже, модуль зсуву дискретних матеріалів повинен розглядатись не як стала матеріалу, а як параметр поверхні деформування $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0,\ \sigma_0)$. Його величина залежить від досягнутого рівня напружено-деформівного стану й може бути визначена тільки за результатами лабораторних випробувань.

Формулювання цілей статті

Метою статті є обґрунтування інваріантних співвідношень та формулювання математичної моделі взаємодії елементів машин, конструкцій або механізмів з гранульованими матеріалами з урахуванням внутрішнього тертя, що виникає в ньому, та ефект дилатансії.

Аналіз досліджень та публікацій

Ще в кінці XIX століття Рейнольдс відмітив, що зсув в дискретних матеріалах супроводжується зміною об'єму, тобто існує *залежність об'ємних деформацій ε_0 від деформацій зсуву γ_0 (ефект дилатансії)*. Вплив дилатансії на закони деформування дискретних матеріалів вивчено недостатньо. Тому при розробці моделі середовища він враховувався не безпосередньо, а через змінний модуль зсуву $G_{зм} = f(\gamma_0,\ \sigma_0)$.

Модуль об'ємної деформації *К*, як відомо, пов'язаний з модулем зсуву *G* і коефіцієнтом Пуассона ν формулою $K = 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}$. Дослідами, результати яких приведені в роботі В.В. Ковтуна [6], показано, що коефіцієнт Пуассона ν для сипких матеріалів змінюється в порівняно невеликих межах і цими змінами можна нехтувати, тобто прийняти гіпотезу сталості величини коефіцієнта Пуассона ν. Тоді при зміні модуля зсуву $G_{зм}$ в залежності від досягнутого рівня напружено-деформівного стану відбуватиметься зміна модуля об'ємної деформації $K_{зм}$ і величину модуля $K_{зм}$ для кожного рівня напруженого стану можна визначити як параметр поверхні деформування $\Phi(\tau_0,\ \gamma_0,\ \sigma_0) = 0$.

Отже, основні деформаційні характеристики теорії пружності *К* і *G* для дискретних матеріалів не є сталими і можуть розглядатись тільки як параметри, що залежать як від досягнутого рівня деформацій, так і від величини стискуючих напружень.

Узагальнюючи сказане, можна зробити висновок, що модель взаємодії машини з технологічним дискретним середовищем повинна враховувати такі характерні особливості його деформування:

1) залежність граничного опору $\tau_{гр}$ від величини стискуючих напружень σ_0;
2) залежність деформацій зсуву γ_0 від нормальних стискуючих напружень σ_0;
3) залежність об'ємних деформацій ε_0 від деформацій зсуву γ_0.

Характер вказаних залежностей можна встановити тільки експериментально шляхом проведення спеціальних лабораторних випробувань і представити у вигляді залежностей між інваріантами тензорів напружень та деформацій.

Виклад основного матеріалу

Запишемо визначальні фізичні співвідношення моделі в інваріантній формі. За інваріанти для дискретного матеріалу зручно вибрати октаедричні напруження τ_o, σ_o і деформації γ_o, ε_o, що виникають по площинці, рівнонахиленій до головних осей:

$$\tau_o=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2};$$

$$\sigma_o=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3};$$

$$\gamma_o=\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2};$$

$$\varepsilon_o=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}.$$

Ці інваріанти мають чіткий фізичний зміст, входять як до фізичних рівнянь стану, так й до критеріїв міцності А.І. Боткіна, що дозволяє описати процес руйнування матеріалу як граничний етап його деформування.

Закон зміни форми з урахуванням внутрішнього тертя запишемо у формі

$$\gamma_o=\frac{\tau_o}{G_e}+F\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right), \quad (1)$$

де G_e– модуль зсуву.

Перша складова описує пружні деформації, які присутні при деформуванні будь-якого матеріалу. Друга – деформації, пов’язані з внутрішнім тертям. Вид функції $F\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right)$ встановлюється експериментально.

Закон зміни об’ємних деформацій можна записати у формі:

$$\varepsilon_o=f(\sigma_o,\gamma_o). \quad (2)$$

Умову переходу в граничний стан –

$$\frac{\tau_o}{\sigma_o}=\frac{c_0}{\sigma_o}+\mathrm{tg}\psi. \quad (3)$$

В співвідношеннях (1), (3) вплив внутрішнього кулонового тертя на процес деформування дискретного матеріалу в допграничній і граничній стадії враховується залежністю деформацій зсуву і опору зсуву від відношення дотичного напруження до нормального $\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right)$.

Для конкретизації виду функцій, що входять до фізичних співвідношень (1)-(3), які покладено в основу моделі дискретного середовища, в лабораторії Хмельницького національного університету проведено серію спеціальних експериментальних досліджень.

Аналіз результатів цих досліджень, а також опублікованих в літературі даних, дозволив обґрунтувати покладені в основу математичної моделі співвідношення, що описують закономірності зміни форми і об’єму дискретного середовища [4].

Закономірність зміни форми в системі осей τ_o, γ_o, σ_o запропоновано описувати апроксимуючою експериментальні дані зручною для розрахунків степеневою залежністю

$$\tau_0=A\sigma_0\gamma_0^{\alpha}=G_{\text{зм}}\gamma_0, \quad (4)$$

де A і α – дослідні параметри

Ця залежність не виділяє окремо пружні деформації, котрі на порядки менші загальних деформацій дискретного матеріалу.

При такій апроксимації дотичний модуль зсуву визначається за формулою

$$G_{\text{зм}}^{\partial}=\alpha A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}, \quad (5)$$

а січний –

$$G_{\text{зм}}^{c}=A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}. \quad (6)$$

Закономірності (2) зміни об’єму дискретних матеріалів зручно описувати залежністю, аналогічною закону Гука. Але на відміну від співвідношення теорії пружності вона включає параметр $K_{\text{зм}}$ поверхні деформування

$$\varepsilon_o=\frac{\sigma_o}{K_{\text{зм}}}, \quad (7)$$

де $K_{\text{зм}}$ – змінний модуль об’ємної деформації, що залежить від властивостей матеріалу і досягнутого в ньому напружено-деформівного рівня.

Цей модуль можна визначити з співвідношення механіки деформівного твердого тіла

$$K_{\text{зм}}=G_{\text{зм}}\cdot 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}=2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}, \quad (8)$$

де $G_{\text{зм}}$– змінний модуль зсуву, який залежить як від рівня деформації γ_o, так і від величини стискуючого напруження σ_o (6); ν– коефіцієнт Пуассона.

Введення припущення про сталість величини коефіцієнта Пуассона ν для дискретних матеріалів дає можливість визначати модуль об’ємної деформації з сімейства експериментальних кривих $\tau_o=F(\gamma_o)$ при $\sigma_o=const$ і відомій величині коефіцієнта ν.

Перехід матеріалу в граничний стан описується умовою (3).

Наведені нелінійні фізичні співвідношення описують в інваріантній формі закономірності деформування і руйнування дискретних (сипких, гранульованих) матеріалів. Вони відрізняються від відомих тим, що включають в себе параметри $K_{\text{зм}}$, $G_{\text{зм}}$ складної багатомірної поверхні деформування $\Phi(\sigma_0,\varepsilon_0,\tau_0,\gamma_0)=0$, які, природно, залежать від досягнутого напружено-деформівного рівня і не можуть бути наперед визначеними.

Математична модель повної системи “механізм-дискретне середовище” як основний фрагмент включає модель взаємодії елементів механізму з середовищем.

Модель повинна бути побудована таким чином, щоб шляхом безперервної чи дискретної зміни впливаючих на процес взаємодії параметрів, прогнозувати поведінку системи.

Вхідними параметрами можуть бути: переміщення робочого органу (шнеку); швидкість переміщення елементів механізму; сили, що передаються середовищу. Відповіддю (відгуком) середовища буде зміна напружено-деформативного стану середовища, реакції якого сприймаються контактними елементами механізму.

В такій постановці модель дозволяє визначити необхідні для розрахунку машини або механізму силові параметри, потужність рушія, описати особливості їх функціонування в різних умовах, детально запроектувати конструкції робочих органів та силової частини машини.

В статті розглядається тільки фрагмент загальної моделі – модель взаємодії з дискретним середовищем окремих елементів механізму. Основою для моделювання є запропоноване подання процесу у вигляді задачі взаємодії елементів машини (механізму) із неоднорідним середовищем з суттєвим внутрішнім тертям.

Для проектування машин потрібно достовірно оцінювати напружено-деформований стан як елементів машини, так і середовища в зоні їх контактування.

Оскільки конструктивні елементи в розрахунках звичайно розглядаються як пружні тіла, особливість формулювання задачі взаємодії відноситься до більш складного об’єкту – середовища із значним впливом внутрішнього тертя.

Найбільш повно процес взаємодії елементів машини з середовищем можна оцінити шляхом розв’язання контактної задачі взаємодії пружного елемента з середовищем. Іноді дію контактуючого елемента машини можна замінити спеціально підібраними граничними умовами. Тоді моделювання зводиться до більш простої граничної задачі, яка описується замкненою системою диференційних рівнянь рівноваги, диференційних рівнянь Коші (рівнянь нерозривності) та фізичними співвідношеннями між напруженнями і деформаціями, що відображають характерні особливості деформування матеріалу середовища в дограничному та граничному станах.

Граничні умови формулюють таким чином, щоб задача моделювання якомога достовірніше описувала особливості технологічного процесу.

Розглянемо постановку задачі на прикладі взаємодії гранульованого (сипкого) матеріалу зі стінками бункеру. Для розрахунку будь-якого елемента бункера необхідно визначити величину тиску сипкого матеріалу на його стінки. Величина тиску залежить від фізико-механічних властивостей сипучого матеріалу, а також глибини y від поверхні матеріалу до будь-якої точки площини, в якій її визначають, і від нахилу стінок бункера до горизонту. Напрям тиску приймається перпендикулярним до поверхні стіни в даній точці (рис. 2).

Застосування будь-якого методу повинно ґрунтуватись на експериментальних дослідженнях, згідно з якими одиничний прямокутний бункер може руйнуватися за декількома схемами (рис. 3, а-г): унаслідок місцевого згину стінок; розриву стінок від внутрішнього горизонтального розпору; відриву воронки; згину вертикальних стінок бункера у своїй площині за нормальними або похилими перерізами **[7]**.

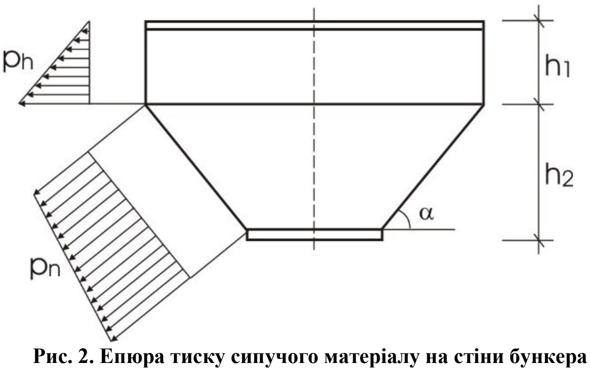

Рис. 2. Епюра тиску сипучого матеріалу на стіни бункера [7]

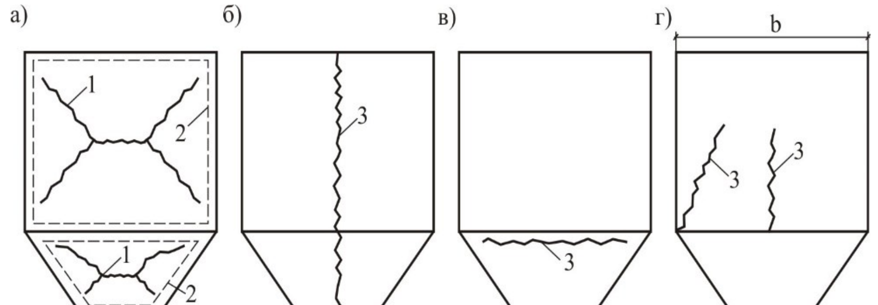

Рис. 3. Розрахункові схеми можливого руйнування бункера внаслідок: ***а) згину стінок із своєї площини; б) розриву стінок бункера горизонтальними силами N; в) відриву воронки; г) згину вертикальних стінок бункера в своїй площині по нормальним і похилим перерізам; 1 – тріщини від згину стінки в своїй площині зовні бункера; 2 – тріщини від згину стінки в своїй площині з внутрішньої сторони бункера; 3 – тріщини від зусиль, що діють у площині стін бункера (нормальні і похилі)*** **[7]**

Для формування граничної задачі розглянемо бункер і масив середовища із суттєвим внутрішнім тертям (розрахункова область О) (рис. 4). Модель включає в себе середовище, як об’єкт націленого впливу на обмежуючу (робочу) поверхню бункера.

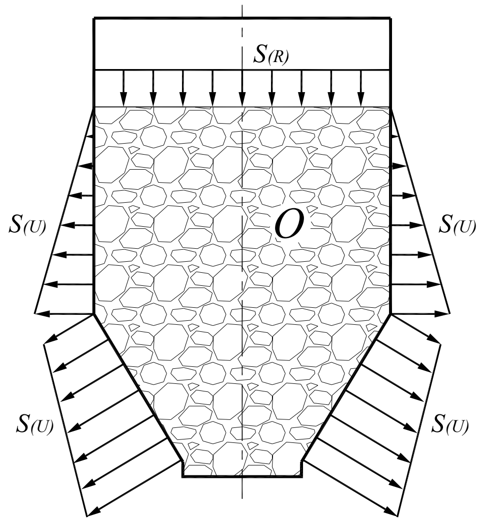

Рис. 4. Розрахункова область граничної задачі дискретного середовища

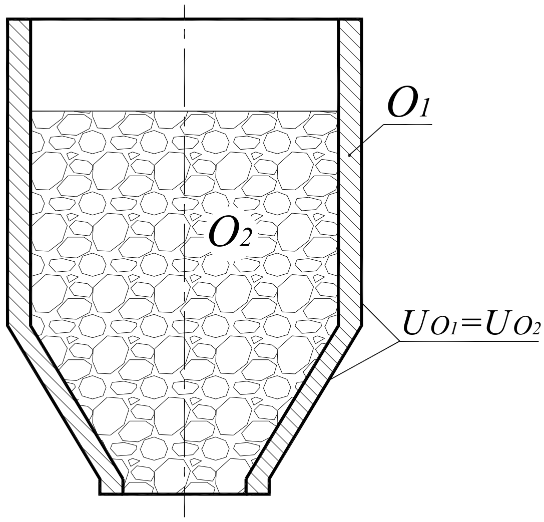

Рис. 5. Розрахункова область контактної взаємодії дискретного середовища зі стінками бункера

В загальній постановці на якійсь дільниці $S_{(R)}$ граничного контуру можуть бути відомі зовнішні навантаження (задані силові граничні умови), на іншій $S_{(U)}$ – переміщення (кінематичні граничні умови). Закони деформування матеріалу описуються нелінійними залежностями, що враховують вплив внутрішнього тертя. В такій постановці задача зводиться до визначення контактних зусиль, що діють на елементи бункера при кінематичних чи силових збуреннях шляхом оцінки напружено-деформованого стану середовища, тобто, створення розрахункової моделі, котра дозволяє передбачати поведінку системи в заданому діапазоні умов.

Задача формується таким чином: визначити в кожній точці області напруження $\{\sigma\}$, деформації $\{\varepsilon\}$ та переміщення $\{u\}$, котрі відповідають прийнятій розрахунковій моделі взаємодії та заданим граничним умовам.

Відмінність поставленої нелінійної задачі від подібних, які розглядалися раніше, полягає в тому, що закони деформування матеріалу технологічного дискретного середовища описується складними нелінійними співвідношеннями між інваріантами тензорів напружень і деформацій, котрі враховують прояв внутрішнього тертя та дилатансії. В такій постановці деформаційні параметри середовища залежать від досягнутого в кожній його точці рівня напруженого стану, тому задачу можна класифікувати як фізично нелінійну граничну задачу неоднорідної області.

Розв’язок цієї складної задачі може бути отриманий тільки чисельними ітераційними процедурами.

Більш інформативним є моделювання на основі контактної задачі взаємодії. В цьому випадку (див. рис. 5) розрахункова область включає підобласті O_1 і O_2 з різними фізико-механічними властивостями. Стінки бункера представляються у вигляді областей, що деформуються за законами теорії пружності. Середовище ж, як і в попередньому випадку, деформується за нелінійним законом, що враховують вплив внутрішнього тертя.

Відмінність цієї постановки від попередньої полягає в існуванні спільних поверхонь, що одночасно належать і середовищу, і стінці, а також можливість оцінити напружений стан не тільки середовища, але й конструктивних елементів. Формулювання подібної задачі включає або умову нерозривності деформації на поверхні контакту, або умову проковзування при виконанні граничних умов на цій поверхні.

Для імітаційного моделювання розв’язується задача поступового силового чи кінематичного навантаження стінок бункера зі сторони дискретного середовища до наставання граничного стану, тобто руйнування стінок. Це дозволяє дослідити процес взаємодії конструктивних елементів бункера з дискретним середовищем з урахуванням особливостей деформування останнього та більш обґрунтовано визначати ряд технічних параметрів конструкції.

Позитивною рисою подібної постановки задачі є врахування особливостей деформування контактуючих елементів, а не тільки дискретного середовища. Модель дозволяє всі окремі процеси взаємодії розглядати як цілісний, єдиний процес і тому може бути основою для побудови повної моделі системи “механізм-дискретне середовище”.

Таким чином, модель процесу взаємодії елементів машини або механізму і дискретного середовища розглядається як система рівнянь, що формулюють граничну або контактну задачу для комбінованої пружної та фізично-нелінійної областей. Результат розв’язання цих задач, як відомо, буде однозначним, якщо він задовольняє умовам рівноваги, умовам нерозривності та прийнятим для матеріалу фізичним співвідношенням (рівнянням стану). Перші дві умови записуються у вигляді систем диференціальних рівнянь незалежно від виду матеріалу.

Рівняння рівноваги з урахуванням об'ємних сил записуються в системі довільних ортогональних осей x, y, z у такому вигляді

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = V_x,$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = V_y,$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = V_z, \qquad (9)$$

де σ_x, σ_y, σ_z – нормальні напруження; τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} – дотичні напруження; V_x, V_y, V_z – об'ємні сили, або у матричній формі

$$[B]^T\{\sigma\} = \{V\}, \qquad (10)$$

де $[B]^{\,T}$ – транспонована матриця диференціального оператора

$$[B]^{\,T} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

$\{\sigma\}$ – вектор напружень, $\{V\}$ – вектор об'ємних сил:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}.$$

Умова нерозривності деформацій може бути зведена до відомих лінійних диференціальних залежностей Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \qquad (12)$$

де u_x, u_y, u_z – переміщення, відповідно, за напрямком осі x, y та z; ε_x, ε_y, ε_z – лінійні деформації; γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} – кутові деформації (зсуви).

Ці залежності в матричній формі записуються у такому виді:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \qquad (13)$$

де $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}.$

Фізичні співвідношення теорії пружності для областей, що моделюють елементи машин та механізмів можна представити матричним рівнянням:

$$\{\sigma\} = [D_e]\{\varepsilon\}, \qquad (14)$$

в якому матриця пружності $[D_e]$ має вигляд

$$[D_e] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν матриці $[D_e]$ в лінійній теорії пружності вважаються сталими характеристиками матеріалу.

Нелінійні фізичні залежності, що описують характерні особливості деформування дискретних матеріалів, для побудови математичної моделі зручно представити у формі, аналогічній рівнянням узагальненого закону Гука, але, на відміну від рівнянь лінійної теорії пружності, замість пружних сталих вони включають змінні параметри, що визначаються з інваріантних співвідношень, одержаних за результатами лабораторних випробувань зразків конкретного матеріалу. Для дискретних матеріалів за такі параметри обрано змінний модуль об'ємної деформації $K_{зм} = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}$ та змінний модуль зсуву $G_{зм} = \frac{\tau_o}{\gamma_o}$. В цьому випадку фізичні рівняння, що описують зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій набувають вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{3}\left[(K_{зм}+4G_{зм})\varepsilon_x + (K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_y + (K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_z\right], \\ \sigma_y = \frac{1}{3}\left[(K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_x + (K_{зм}+4G_{зм})\varepsilon_y + (K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_z\right], \\ \sigma_z = \frac{1}{3}\left[(K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_x + (K_{зм}-2G_{зм})\varepsilon_y + (K_{зм}+4G_{зм})\varepsilon_z\right], \\ \tau_{xy} = G_{зм}\gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} = G_{зм}\gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} = G_{зм}\gamma_{zx}. \end{array}\right\}. \tag{16}$$

Систему рівнянь (16) можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$$\{\sigma\} = [D_{зм}]\{\varepsilon\}, \tag{17}$$

де матриця змінних деформаційних параметрів $[D_{зм}]$ має вигляд

$$[D_{зм}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} K_{зм}+4G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}+4G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}+4G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Фізичні рівняння (16) і компоненти матриці (18) включають змінні параметри

$$K_{зм} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \tag{19}$$

$$G_{зм} = \frac{\tau_0}{\gamma_0}. \tag{20}$$

Ці параметри залежать від досягнутого в кожній точці розрахункової області напруженого (σ_0, τ_0) і деформаційного $(\varepsilon_0, \gamma_0)$ рівнів, тому не можуть бути визначеними заздалегідь. Моделювання ж на основі представлених фізичних співвідношень може бути реалізовано тільки шляхом поетапного розв'язування граничної або контактної задачі на основі спеціально розроблених процедур, коли за результатами розв'язку задачі на попередньому етапі в кожній точці розрахункової області визначаються значення параметрів $K_{зм}$, $G_{зм}$ для наступного етапу.

Крім описаних рівнянь рівноваги, рівнянь Коші і фізичних співвідношень, при формулюванні конкретної задачі необхідно задати умови на контактних поверхнях областей або кінематичні чи силові граничні умови, варіювання параметрами яких дозволяє реалізувати моделювання конкретного технологічного процесу.

Граничні умови можна записати у такому вигляді (див. рис. 3):

$$\begin{array}{lll} \{u\} = \{u_S\} & на & S_{(u)}, \\ \{u\} = \{0\} & на & S_{(0)}, \\ [A]^T\{\sigma\} = \{R_S\} & на & S_{(R)}. \end{array}$$

Перше рівняння виражає рівність переміщень граничних точок заданим зміщенням $\{u_S\}$ границі $S_{(u)}$, наприклад, переміщенням стінки бункера, друге – відсутність переміщень на достатньо віддалених або на конструктивно визначених границях $S_{(0)}$ області, а третє описує відомий зв'язок між внутрішніми зусиллями та навантаженнями, заданими на границі $S_{(R)}$:

$$\begin{array}{c} \sigma_x m + \tau_{xy} l + \tau_{xz} n = R_x; \\ \tau_{yx} m + \sigma_y l + \tau_{yz} n = R_y; \\ \tau_{zx} m + \tau_{zy} l + \sigma_z n = R_z. \end{array}$$

В ньому m, l, n – напрямні косинуси нормалі площинки;

$$[A]^T = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & l & 0 & n \\ 0 & l & 0 & m & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & l & m \end{vmatrix}; \quad R_{(S)} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}.$$

Наведені вирази дозволяють сформулювати граничну задачу.

Для області O з границями $S \in \left(S_{(R)}, S_{(u)}, S_{(0)}\right)$ визначити напруження, деформації та переміщення $\{\sigma\} = \{\sigma\}(x,y,z)$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}(x,y,z)$, $\{u\} = \{u\}(x,y,z)$, що відповідають розрахунковій схемі, прийнятим специфічним законам деформування матеріалу середовища та граничним умовам.

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

$[B]^T\{\sigma\} = \{V\}$ – диференціальні рівняння рівноваги;
$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$ – диференціальні геометричні рівняння;
$\{\sigma\} = [D_{зм}]\{\varepsilon\}$ – фізичні рівняння для середовища

з урахуванням експериментально одержаних інваріантних нелінійних фізичних співвідношень

$$\tau_0 = A\sigma_0\gamma_0^{\alpha} = G_{\mathbf{зм}}\gamma_0,$$
$$\sigma_0 = K_{\mathbf{зм}}\varepsilon_0$$

та граничних умов

$$[A]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} = \{R_S\} \qquad \textbf{\textit{на}} \quad S_{(R)},$$
$$\{u\} = \{u_S\} \qquad \textbf{\textit{на}} \quad S_{(u)},$$
$$\{u\} = \{0\} \qquad \textbf{\textit{на}} \quad S_{(0)}.$$

Розв’язання задачі може вестись як у напруженнях, так і в переміщеннях. Другий підхід у більшості випадків є раціональнішим.

Враховуючи складність обрисів та неоднорідність розрахункової області, нелінійність фізичних співвідношень, залежність деформаційних параметрів від досягнутого рівня напруженого стану – розв’язання граничної задачі стосовно матеріалів із суттєвим внутрішнім тертям може бути отримано тільки чисельним методом за допомогою комп’ютера.

Якщо розрахункова область є фізично неоднорідною і складається з декількох підобластей $O \in (O_1, O_2, \dots)$, матеріал яких різниться законами деформування, гранична задача аналогічно формулюється для кожної з підобластей, але вводяться додаткові умови нерозривності переміщень на їх границях $U_{(S_{n-1})} = U_{(S_n)}$.

Формулювання контактної задачі взаємодії пружних елементів конструкції з дискретним середовищем відрізняється від сформульованої граничної задачі тим, що крім фізично-нелінійної області O_1, котра описує технологічне дискретне середовище, вводиться контактуюча з нею пружна область O_2 (див. рис. 4), що моделює елемент конструкції. Фізичні співвідношення для області O_2, на відміну від співвідношень області O_1, записуються у формі лінійних рівнянь закону Гука. Контактні умови найбільш зручно сформулювати як нерозривність переміщень на контактній поверхні.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

1. Обґрунтовано характер інваріантних визначувальних фізичних співвідношень, що описують в прийнятій моделі закономірності деформування матеріалу середовища. Наведені залежності дозволяють організувати ітераційний процес моделювання, в якому після кожного етапу відповідно досягнутим в точці розрахункової області величинам напружень і деформацій за допомогою цих залежностей призначаються нові значення деформаційних параметрів $G_{зм}$, $K_{зм}$.

2. Сформульовано систему рівнянь і умов, необхідних для математичного моделювання взаємодії машини і дискретного середовища. Моделювання зводиться до комп'ютерної імітації технологічного процесу шляхом поетапної зміни кінематичних чи силових граничних умов і розв'язання на кожному етапі фізично-нелінійної граничної задачі для багатозв’язної неоднорідної області.

Відмінність розробленої моделі від відомих полягає в тому, що система рівнянь включає нові нелінійні фізичні співвідношення, котрі відображають характерні особливості деформування дискретних матеріалів: нелінійність залежностей “напруження-деформації”, а також прояв внутрішнього тертя на усіх етапах деформування.

Література

1. Гевко, І. Б. *Гвинтові транспортно-технологічні механізми: розрахунок і конструювання*. Тернопіль: ТДТУ ім. Івана Пулюя, 2008. 307 с.

2. Грабар, А. В., Шатров, Р. В. Визначення характеру навантаження на шнеки при транспортуванні сипких матеріалів. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 79–84. DOI: 10.31548/machenergy.2019.04.079-084.

3. Дорофєєв, О. А., Горященко, С. Л., Дорофєєв, Ю. О. Обґрунтування моделі взаємодії елементів машин та механізмів з дискретним середовищем. В: *Технічна творчість: зб. наук. пр.* Хмельницький: ХНУ, 2024, № 8, с. 49–50.

4. Дорофєєв, О. А., Багрій, О. В., Дорофєєв, Ю. О. Математичне моделювання взаємодії елементів машин та механізмів з дискретним середовищем. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки*, 2025, № 2, с. 144–149. DOI: https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-21.

5. Дорофєєв, Ю. О., Дорофєєв, О. А. Вплив внутрішнього тертя на процеси деформування сипких та гранульованих матеріалів. В: *Проблеми та інновації у розвитку інженерії, технологій та транспорту*: матеріали II міжнар. наук. конф. студентів і молодих вчених (м. Хмельницький, 24–26 квіт. 2025 р.). Хмельницький: ХНУ, 2025, с. 855–865.

6. Ковтун, В. В. *Нелинейные методы расчета обратных засыпок причальных сооружений с учетом эксплуатационных факторов*: дис. … д-ра техн. наук. Хмельницкий, 1988. 321 с.

7. Масюк, Г. Х. *Залізобетонні конструкції інженерних споруд промислових підприємств: навч. посіб.* Рівне: НУВГП, 2010. 212 с.

References

1. Hevko, I. B. Hvyntovi transportno-tekhnolohichni mekhanizmy: rozrakhunok i konstruiuvannia. Ternopil: TDTU im. Ivana Puliuia, 2008. 307 s.
2. Hrabar, A. V., Shatrov, R. V. Vyznachennia kharakteru navantazhennia na shneky pry transportuvanni sypkykh materialiv. Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 79–84. DOI: 10.31548/machenergy.2019.04.079-084.
3. Dorofieiev, O. A., Horiashchenko, S. L., Dorofieiev, Yu. O. Obgruntuvannia modeli vzaiemodii elementiv mashyn ta mekhanizmiv z dyskretnym seredovyshchem. V: Tekhnichna tvorchist: zb. nauk. pr. Khmelnytskyi: KhNU, 2024, № 8, s. 49–50.
4. Dorofieiev, O. A., Bahrii, O. V., Dorofieiev, Yu. O. Matematychne modeliuvannia vzaiemodii elementiv mashyn ta mekhanizmiv z dyskretnym seredovyshchem. Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky, 2025, № 2, s. 144–149. DOI: https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-21.
5. Dorofieiev, Yu. O., Dorofieiev, O. A. Vplyv vnutrishnoho tertia na protsesy deformuvannia sypkykh ta hranulovanykh materialiv. V: Problemy ta innovatsii u rozvytku inzhenerii, tekhnolohii ta transportu: materialy II mizhnar. nauk. konf. studentiv i molodykh vchenykh (m. Khmelnytskyi, 24–26 kvit. 2025 r.). Khmelnytskyi: KhNU, 2025, s. 855–865.
6. Kovtun, V. V. Nelyneinыe metodы rascheta obratnыkh zasыpok prychalnыkh sooruzhenyi s uchetom эkspluatatsyonnыkh faktorov: dys. … d-ra tekhn. nauk. Khmelnytskyi, 1988. 321 s.
7. Masiuk, H. Kh. Zalizobetonni konstruktsii inzhenernykh sporud promyslovykh pidpryiemstv: navch. posib. Rivne: NUVHP, 2010. 212 s.