

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2026-363-84>

УДК 621.396.96

ТАРАСЕНКО ЄВГЕН

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

<https://orcid.org/0009-0004-0506-6997>

e-mail: Yevhen.Tarasenko@cit.khpi.edu.ua

БРЕСЛАВЕЦЬ ВІТАЛІЙ

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

<https://orcid.org/0000-0002-9954-159X>

e-mail: Vitalii.Breslavets@khpi.edu.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДСТЕЖЕННЯ ЦІЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФІЛЬТРІВ КАЛМАНА

У статті запропоновано інтегрований підхід до моделювання початкового етапу супроводження цілей у радіолокаційних системах на основі поєднання експоненціальної GERT-мережі та фільтра Калмана. GERT-модель забезпечує макрорівневий опис процесу «радар–об’єкт стеження», дозволяючи аналітично визначати функції розподілу часу взаємодії, враховувати багатоваріантні переходи та часові затримки. Водночас вона не реалізує рекурсивної корекції координат і швидкостей та не мінімізує середньоквадратичну помилку оцінювання.

Для підвищення точності запропоновано використання фільтра Калмана як мікрорівневого інструмента уточнення траєкторії. Сформульовано дискретну модель у просторі станів та рекурсію «прогноз–корекція», а також показано, як результати GERT застосовуються для ініціалізації параметрів фільтра та адаптації його коваріації. Моделювання підтвердило зменшення RMSE та підвищення узгодженості оцінок. Запропонована рамка «GERT → Kalman» поєднує часово-ймовірнісний аналіз із високоточною рекурсивною оцінкою стану в умовах завад.

Ключові слова: фільтр Калмана, GERT-модель, марківські моделі, радіолокаційна станція, обробка сигналів, завадостійкість системи.

TARASENKO YEVHEN, BRESLAVETS VITALII

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”

MODELING THE TARGET TRACKING PROCESS USING KALMAN FILTERS

The article proposes an integrated approach to modeling the initial stage of tracking air targets in radar systems based on a combination of a probabilistic-temporal model of the GERT type and a recursive state estimation procedure using the Kalman filter. At the macro level, the process of interaction “radar-tracked object” is described by an exponential GERT network using moment generating functions, which allows analytically forming an equivalent W-function, determining the distribution and probability density functions of the interaction time, as well as taking into account multivariate transition trajectories, returns to previous states, and detection confirmation delays. It is shown that the GERT model effectively reproduces global temporal-probabilistic regularities of the process, but does not provide recursive correction of coordinates and velocities estimates in real time and minimization of the mean square error.

To overcome these limitations, it is proposed to integrate the Kalman filter as a micro-level tool for trajectory estimation. A discrete linear stochastic model in the state space is formulated, a two-step recursion “prediction-correction”, principles of selection of motion models (CV, CA, CT), structures of noise covariance matrices and tuning procedures based on RMSE and NEES criteria are presented. It is shown that the time characteristics obtained from GERT can be used to initialize the initial state and covariances, as well as for adaptive tuning of the sampling step and process noise parameters.

The modeling results demonstrate the complementarity of the approaches: GERT forms a structural-probabilistic framework of the tracking process, while the Kalman filter provides smoothing of measurements, reduction of the spread of estimates and a significant reduction of RMSE compared to the macro-level estimate. The proposed integration framework “GERT → Kalman” creates a methodological basis for building a comprehensive model of goal tracking in a cluttered environment, combining the analysis of the temporal-probabilistic structure of the process with highly accurate recursive real-time state estimation.

Keywords: Kalman filter, GERT model, Markov models, radar station, signal processing, system immunity.

Стаття надійшла до редакції / Received 18.02.2026

Прийнята до друку / Accepted 11.03.2026

Опубліковано / Published 26.03.2026



This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© Яропуд Віталій, Колісник Микола, Штуць Андрій

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв’язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Сучасні радіолокаційні системи функціонують в умовах зростання щільності повітряного руху, підвищеної маневреності цілей та активного застосування навмисних перешкод. За таких умов початковий етап супроводження – від моменту первинної детекції до стабілізації траєкторії – набуває критичного значення, оскільки саме тут формуються початкові оцінки координат, швидкостей і часових параметрів взаємодії «радар–об’єкт стеження». Помилки на цьому етапі мають накопичувальний характер і можуть призводити до зриву супроводу або зростання похибок у подальших циклах обробки.

Існуючі підходи до моделювання процесів супроводження умовно поділяються на макрорівневі та мікрорівневі. Зокрема, GERT-мережі дозволяють адекватно описувати багатоваріантну структуру ймовірнісних переходів, часові затримки та розподіли часу взаємодії, однак не забезпечують рекурсивної корекції стану в реальному часі та мінімізації середньоквадратичної помилки оцінювання. Натомість фільтр Калмана ефективно

виконує локальне оцінювання координат і швидкостей за наявності шуму, але не враховує складну часово-ймовірнісну організацію процесу детекції та підтвердження траєкторії.

Таким чином, виникає наукова проблема побудови узгодженої інтеграційної моделі, яка поєднує структурно-ймовірнісний аналіз початкового етапу супроводження з високоточною рекурсивною оцінкою стану цілі. Необхідно розробити методичну рамку, що дозволить використовувати результати GERT-моделювання для формування початкових умов і параметрів фільтрації, забезпечуючи водночас зменшення похибки (RMSE), контроль узгодженості оцінок (NEES) та підвищення завадостійкості РЛС у складних умовах функціонування.

Аналіз досліджень та публікацій

Аналіз наукової літератури щодо моделей супроводження цілей у радіолокаційних системах виявляє кілька основних напрямків: стохастичне описання процесів, рекурсивна оцінка стану та їхнє поєднання для підвищення стійкості до шуму й завад [1]. Традиційні дослідження в галузі оцінювання стану повітряних об'єктів на основі фільтра Калмана та його розширених варіантів значною мірою присвячені оптимізації рекурсивного оцінювання стану цілі в умовах шуму та неповних спостережень. Зокрема шляхом адаптивного налаштування коваріацій або використання модифікованих алгоритмів (наприклад, розширеного чи сильного слідувального фільтра) для підвищення точності й швидкості збіжності оцінок стану в динамічних середовищах [2-3].

В окремі групи досліджень розглядаються ймовірнісні моделі опису логіки переходів станів, включно з марковськими та GERT-мережами [4]. GERT-моделі дозволяють описувати складні часові ймовірнісні сценарії з кількома паралельними шляхами та затримками, що особливо актуально при первинній фазі виявлення та переходів між станами «детекція–супровід–втрати». Порівняльні дослідження демонструють, що ймовірнісні мережі можуть більш адекватно репрезентувати розподіли часу переходів у складних завадостійких сценаріях у порівнянні з класичними марковськими моделями [5].

Серед сучасних публікацій важливе місце займають праці, які спрямовані на побудову математичних моделей початкового етапу взаємодії між радіолокаційною станцією та ціллю з використанням GERT-мереж. Зокрема, у роботі [6] описано застосування ймовірнісно-часових моделей для оцінювання логіки переходів між станами та часових характеристик, що лежать в основі процесу виявлення і первинного супроводу. Зазначено, що GERT-модель відображає структуру переходів та часові затримки і може бути використана для формування початкових оцінок стану та часових характеристик перед подальшою обробкою.

В наступних працях наголос на комплементарності GERT-підходів і рекурсивних фільтрів стану: GERT створює макрорівневий ймовірнісно-часовий каркас, тоді як фільтри Калмана уточнюють локальні оцінки траєкторій у реальному часі на основі вимірювальних даних. Такий інтегрований підхід поєднує переваги обох класів методів та відкриває перспективи для побудови гнучких і точних моделей супроводження в складних умовах завад і неповноти даних [7-8].

Таким чином, сучасний стан досліджень свідчить про чітку тенденцію до гібридизації стохастичних моделей логіки процесу з рекурсивними алгоритмами оцінювання стану [9]. Що є відповіддю на виклики, пов'язані зі складною динамікою цілей, впливом шуму й неоднорідністю умов вимірювань у реальних радіолокаційних системах.

У даній роботі розглянуто та розширено цю методологію, інтегруючи GERT-мережі та фільтрацію Калмана для досягнення збалансованого опису макро- і мікрорівневих аспектів супроводу цілей.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є: розроблення інтегрованої моделі початкового супроводження цілей у радіолокаційній системі на основі поєднання GERT-мережі та фільтра Калмана для підвищення точності й завадостійкості оцінювання стану.

Для досягнення поставленої мети було сформовано наступні задачі:

- сформулювати ймовірнісно-часову модель взаємодії «радар–об'єкт стеження» на основі GERT-мережі;
- розробити дискретну модель у просторі станів та алгоритм рекурсивного оцінювання за схемою «прогноз–корекція»;
- обґрунтувати механізм інтеграції результатів GERT-моделювання в процедуру ініціалізації та налаштування фільтра Калмана;
- провести моделювання та оцінити ефективність інтегрованого підходу за показниками точності та узгодженості оцінок.

Виклад основного матеріалу

Фільтр Калмана це потужний рекурсивний алгоритм, який використовується для оцінювання стану динамічної системи в умовах шуму та невизначеності. Робота фільтра включає два ключові етапи:

- Прогнозування. На цьому етапі прогнозується наступний стан об'єкта на основі його моделі руху.
- Корекція. На цьому етапі прогноз уточнюється з використанням вхідних вимірювань, мінімізуючи помилки та враховуючи шум системи.

Етап прогнозування використовується для обчислення майбутнього стану об'єкта на основі поточної оцінки та моделі динаміки. На цьому етапі стан об'єкта (наприклад, його положення та швидкість) оновлюється згідно з рівнянням:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k, \quad (1)$$

де: $\hat{x}_{k|k-1}$ – прогнозований стан системи на кроці k ,

A_k – матриця переходу стану, яка описує динаміку об'єкта,
 $\hat{x}_{k-1|k-1}$ – попередній скоригований стан,
 $B_k u_k$ – вплив керувальної дії, де B_k – керувальна матриця, а u_k – вектор керувальних параметрів (за наявності).

Прогноз коваріації помилки: коваріація помилки стану оновлюється з урахуванням шуму процесу:

$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k, \quad (2)$$

де: $P_{k|k-1}$ – матриця коваріації помилки для прогнозованого стану,

Q_k – матриця коваріації шуму процесу (характеризує динамічну невизначеність системи).

Цей етап забезпечує прогноз майбутнього стану об'єкта, який згодом буде уточнено під час етапу корекції.

Етап корекції використовується для уточнення прогнозованого стану на основі нових вимірювальних даних. Це дозволяє фільтру враховувати похибки спостереження та мінімізувати відхилення.

Обчислимо коефіцієнт підсилення Калмана. Коефіцієнт підсилення Калмана визначає, якою мірою вимірювальні дані мають впливати на оновлення стану:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (3)$$

де: H_k – матриця спостереження (пов'язує стан системи з вимірюваними величинами),

R_k – матриця коваріації шуму вимірювань (описує невизначеність вимірювальних даних).

Прогнозований стан уточнюється з урахуванням нових даних:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}), \quad (4)$$

де: z_k – вектор вимірювань на кроці k ,

$z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$ – різниця між вимірюваннями та прогнозованим станом (помилка спостереження),

K_k – коефіцієнт підсилення Калмана.

Матриця коваріації помилки оновлюється, щоб відобразити зменшену невизначеність:

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}, \quad (5)$$

де: $P_{k|k}$ – оновлена матриця коваріації стану,

I – одинична матриця.

Ці етапи реалізуються на основі рівнянь стану та спостереження, де ключову роль відіграють матриці переходу, коваріація шуму процесу та коваріація шуму вимірювань.

У контексті нашого дослідження фільтр Калмана використовується для уточнення траєкторій, отриманих після початкової обробки даних. Під час етапу прогнозування враховується модель руху цілей, зокрема їхня маневреність. Етап корекції зменшує вплив шуму, що виникає під час вимірювання координат і швидкостей цілей.

Використання фільтра Калмана в поєднанні з моделями GERT дозволяє інтегрувати переваги обох підходів, забезпечуючи як аналіз процесів на макрорівні, так і деталізацію даних на мікрорівні. Така інтеграція відкриває можливості для розроблення гнучкої та точної моделі супроводження цілей у радіолокаційних системах, особливо в умовах високої невизначеності та шуму.

Зв'язок між двома підходами можна подати як послідовність етапів і операцій. Модель GERT забезпечує такі операції.

- моделює високорівневий процес виявлення та супроводження цілі.
- описує імовірнісні переходи між станами та часові затримки.

Фільтр Калмана приймає дані, згенеровані моделлю GERT, і використовує їх як початкові умови для своєї роботи. Після першого кроку фільтр Калмана уточнює локальні траєкторії цілі, мінімізуючи вплив шуму.

Ця інтеграція враховує як макрорівневі, так і мікрорівневі аспекти радіолокаційних систем. На макрорівні аналізується загальна структура процесу, включаючи вплив різних станів та імовірностей. На мікрорівні підвищується точність супроводження завдяки детальній обробці даних.

Запропонований підхід має кілька переваг:

– Підвищена точність. Фільтр Калмана зменшує невизначеність, спричинену шумом і завадами, поліпшуючи якість даних, що надає модель GERT.

– Стійкість до завад. Модель GERT враховує складні імовірнісні сценарії, тоді як фільтр Калмана адаптується до змінних умов у реальному часі.

– Ефективність. Поєднання обох підходів забезпечує збалансоване навантаження: модель GERT керує загальною структурою процесу, тоді як фільтр Калмана зосереджується на локальних завданнях.

На рис. 1 представлено структурну схему, що ілюструє взаємозв'язок між моделлю GERT і фільтром Калмана.

Як приклад реалізації комплексу математичної моделі наведено та реалізовано такий алгоритм:

Крок 1. Виявлення цілі (GERT). Модель GERT імітує процес виявлення та визначає імовірності й часові характеристики виявлення цілі.

Крок 2. Початкова оцінка стану (GERT). Модель GERT надає імовірнісну оцінку положення цілі та її початкової траєкторії.

Крок 3. Уточнення траєкторії (фільтр Калмана). Фільтр Калмана уточнює траєкторію на основі даних, наданих моделлю GERT, мінімізуючи помилки та забезпечуючи безперервне супроводження.

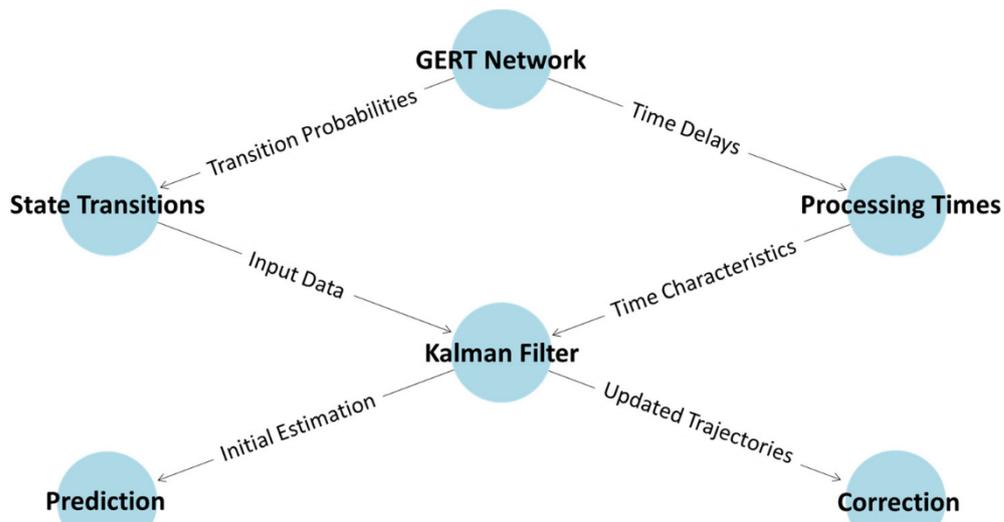


Рис. 1. Структурна схема взаємозв'язку між моделлю GERT і фільтром Калмана

Результати реалізації та оцінювання взаємодії між двома підходами до моделювання наведено на рис. 2.

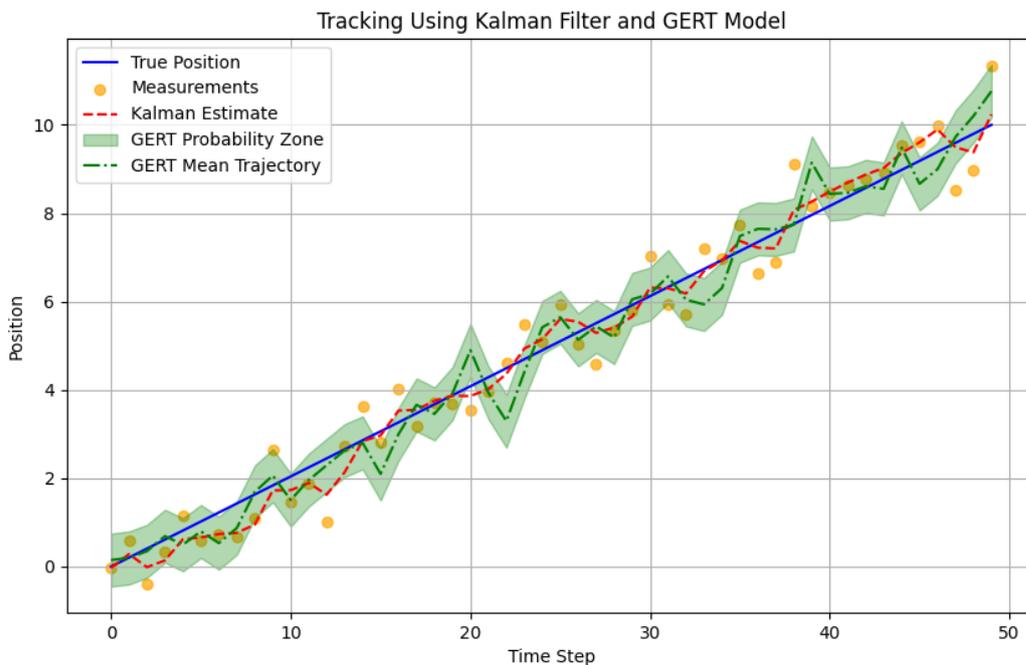


Рис. 2. Оцінювання взаємодії між двома підходами до моделювання

Рис. 2 ілюструє процес супроводження об'єкта з використанням фільтра Калмана та моделі GERT, а також їхню взаємодію для обробки вимірювальних даних. Синя лінія відображає істинне положення об'єкта на кожному часовому кроці, слугуючи еталонною траєкторією. Це ідеальне положення показує, де об'єкт знаходиться в кожний момент часу без впливу шуму й невизначеності.

Помаранчеві точки на графіку представляють зашумлені вимірювання положення об'єкта, імітуючи дані, отримані з реальних сенсорів. Ці вимірювання випадково відхиляються від істинної траєкторії через шум, що є характерним для будь-якої реальної системи спостереження. Попри це, вимірювання залишаються достатньо близькими до істинної траєкторії, що дозволяє фільтру Калмана ефективно використовувати їх для корекції положення об'єкта.

Червона штрихова лінія демонструє оцінки положення об'єкта, згенеровані за допомогою фільтра Калмана. Цей фільтр згладжує зашумлені вимірювання, мінімізуючи відхилення та наближаючи оцінки до істинної траєкторії. Результати фільтра Калмана демонструють високу точність, оскільки його оцінки тісно збігаються з еталонною траєкторією.

Зелена штрихпунктирна лінія показує середню траєкторію, передбачену моделлю GERT. Ця траєкторія базується на імовірнісних переходах і часових характеристиках, визначених моделлю GERT. Хоча загалом вона узгоджується з істинною траєкторією, передбачення GERT є менш точними через їх імовірнісну природу. Зелена заштрихована область навколо середньої лінії GERT відображає зону невизначеності моделі, показуючи

діапазон можливих положень об'єкта. Розширена зона невизначеності підкреслює, що модель GERT забезпечує ширше, більш узагальнене подання положення об'єкта, на відміну від фільтра Калмана, який мінімізує шум.

Поєднане використання моделі GERT і фільтра Калмана демонструє їхню комплементарну природу. Модель GERT враховує імовірнісні характеристики системи та надає початкове розуміння можливого діапазону положень об'єкта. Фільтр Калмана, зі свого боку, уточнює траєкторію на основі вхідних вимірювальних даних, забезпечуючи точні оцінки. Такий комбінований підхід є особливо корисним для задач супроводження, де потрібні як висока точність, так і врахування невизначеностей системи. Графік наочно демонструє відмінності між підходами, їхні переваги та відповідні обмеження.

Надамо дискретну постановку задачі оцінювання стану та формулу двокрокової рекурсії «прогноз–корекція» для радіолокаційного супроводження цілей. Метою цього моделювання є перетворення макрорівневі часово-імовірнісні характеристики, отриманої з GERT моделі, на узгоджені початкові умови і параметри фільтра. Після чого виконання мікрорівневого уточнення траєкторії в реальному часі з мінімізацією середньоквадратичної помилки (Root Mean Square Error, RMSE) та контролем узгодженості.

Розглядаємо дискретно-часову лінійну стохастичну систему у формі простору станів із кроком дискретизації Δt .

$$\begin{aligned}x_k &= F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k, \\z_k &= H_k x_k + v_k, k = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (6)$$

де $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор прихованого стану (мінімально, декартові координати та швидкості, за потреби, прискорення або параметри маневру), $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ – вектор вимірювань РЛС (радіолокаційної станції);

F_k – матриця переходу стану, яка реалізує модель руху між тактами;

H_k – матриця спостереження, що відображає перетворення стану у вимірювані величини;

$B_k u_k$ – керувальна дія (зазвичай відсутня для пасивного супроводу і тоді $B_k = 0$);

$w_k \sim N(0, Q_k)$ та $v_k \sim N(0, R_k)$ – некорельовані гаусівські шуми процесу й вимірювання відповідно з коваріаціями $Q_k \geq 0$, $R_k > 0$. Припускаємо попарну незалежність (w_i, v_j) для всіх i, j та незалежність від початкового стану.

Вибір структури x_k визначається моделлю руху. Для моделі сталої швидкості (Constant Velocity, CV) у двовимірному просторі з координатами (x, y) та швидкостями (\dot{x}, \dot{y}) маємо

$$\begin{aligned}x_k &= [x \dot{x} y \dot{y}]^T, \\F_k &= \text{blkdiag} \left(\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Для моделі сталого прискорення (Constant Acceleration, CA) додаємо компоненти (\ddot{x}, \ddot{y}) , і відповідні

блоки F_k набувають вигляду $\begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 1/2 \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. За наявності кутової швидкості маневру використовують

модель СТ (Coordinated Turn), де F_k залежить від ω_k і Δt (у наближенні малих кроків або із точним розв'язком через матричну експоненту). Вибір між CV/CA/CT узгоджується з домінантною кінематикою цілі у сценаріях, що їх надало макрорівневе моделювання GERT. Якщо GERT індикує високі імовірності «спокійних» гілок, доцільно застосувати CV. Якщо імовірні гілки з прискоренням чи поворотами – CA/CT відповідно.

Матриця спостереження H_k залежить від типу вимірювачів. Для декартових вимірювань положень, $z_k = [xy]^T + n_k$, маємо

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\quad (8)$$

Якщо РЛС надає полярні вимірювання дальності r та кута θ , класичний фільтр Калмана слід замінити на розширений (Extended Kalman Filter, EKF) або квадратно-корінний EKF, оскільки відображення

$$h(x) = [\sqrt{x^2 + y^2}, a \tan 2(y, x)]^T,\quad (9)$$

є нелінійним; у цьому випадку H_k – Якобіан $\partial h / \partial x$ у точці прогнозу. У межах цього підпункту залишаємося у лінійному декартовому випадку; нелінійні аспекти виносяться у додаток.

Коваріація шуму процесу Q_k кодує нашу невизначеність щодо ненаблюдаваної збурювальної динаміки. Для моделі CV із білим прискоренням дисперсії σ_a^2 стандартний вигляд блоку $Q(\Delta t, \sigma_a^2)$ у 1D дорівнює

$$Q_{1D} = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 \end{bmatrix},\quad (10)$$

$$Q_k = \text{blkdiag}(Q_{1D}, Q_{1D}),\quad (11)$$

що безпосередньо впливає з інтегралу білого шуму прискорення. Для CA/CT застосовують узгоджені форми Q_k або їхні апроксимації на основі безперервно-часової моделі з подальшою дискретизацією через формулу Ванга–Чена. Коваріація шуму вимірювань R_k визначається специфікаціями сенсора: для незалежних декартових вимірювань часто беруть $R_k = \text{diag}(\sigma_x^2, \sigma_y^2)$, тоді як для полярних – $R_k = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$ із подальшою лінеаризацією.

Ініціалізація (x_0, P_0) є критичною для збіжності фільтра. На цьому етапі використовуємо виходи GERT як початкові умови. Середні значення часових характеристик імовірних гілок перетворюються на оцінки положення (через геометрію сцени та таймінг детекції), а варіанси часу на первинні коваріації позицій. У найпростішому випадку

$$x_0 = \hat{x}_{GERT}, R_0 = \text{diag}(\sigma_{x_0}^2, \sigma_{\dot{x}_0}^2, \sigma_{y_0}^2, \sigma_{\dot{y}_0}^2), \quad (12)$$

де $\sigma_{\cdot_0}^2$ узгоджені із шириною GERT-розподілів та паспортними характеристиками сенсора на момент первинної детекції.

Рекурсія фільтра Калмана складається з кроку прогнозу та кроку корекції. На кроці прогнозу обчислюють апіорні оцінки стану та коваріації:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= F_k \hat{x}_{k-1}^+ + B_k u_k, \\ P_k^- &= F_k P_{k-1}^+ + F_k^T + Q_k, \end{aligned} \quad (13)$$

де «(-)» позначає прогноз, а «(+）」 уже скориговану оцінку попереднього кроку. На кроці корекції, отримавши вимірювання z_k , обчислюють матрицю інновації S_k та коефіцієнт підсилення Калмана:

$$\begin{aligned} S_k &= H_k P_k^- - H_k^T + R_k, \\ K_k &= P_k^- H_k^T S_k^-, \end{aligned} \quad (14)$$

після чого виконують оновлення оцінки стану та її коваріації:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-), \\ P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-. \end{aligned} \quad (15)$$

У чисельній практиці останню формулу часто реалізують у симетризованій формі Йозефа:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- - (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T, \quad (16)$$

що краще зберігає симетрію та додатню напівозначеність у скінченній точності. Для підвищеної чисельної стабільності застосовують квадратнокореневі реалізації, де еволюціонують не P_k , а його фактор Чолескі.

Ключовим питанням практичного застосування є тюнінг коваріацій Q_k . Матриця R_k первинно задається паспортними похибками сенсора, але за наявності калібрувальних серій може бути переоцінена з емпіричних інновацій. Матриця Q_k відбиває «ступінь довіри» до моделі руху. Завеликі значення призводять до надмірного джиттеру траєкторії. Замалі до інерційності й відставання за різких маневрів. Практично Q_k підганяють за критеріями якості таких, як RMSE позиції/швидкості на валідаційних траєкторіях, та перевіряють узгодженість через нормовану квадратичну помилку оцінки (Normalized Estimation Error Squared, NEES). Для лінійної гаусівської моделі математичне сподівання NEES дорівнює розмірності стану n_x . Систематичне перевищення вказує на недооцінене Q_k або R_k , систематично мала NEES на переоцінені коваріації.

На рис. 3. наведено графік зміни середньоквадратичної помилки (Root Mean Square Error, RMSE) оцінки положення для двох підходів.

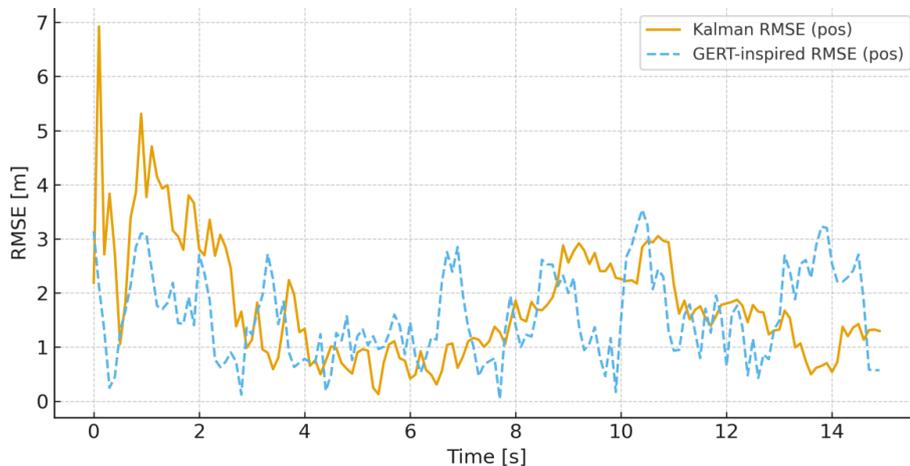
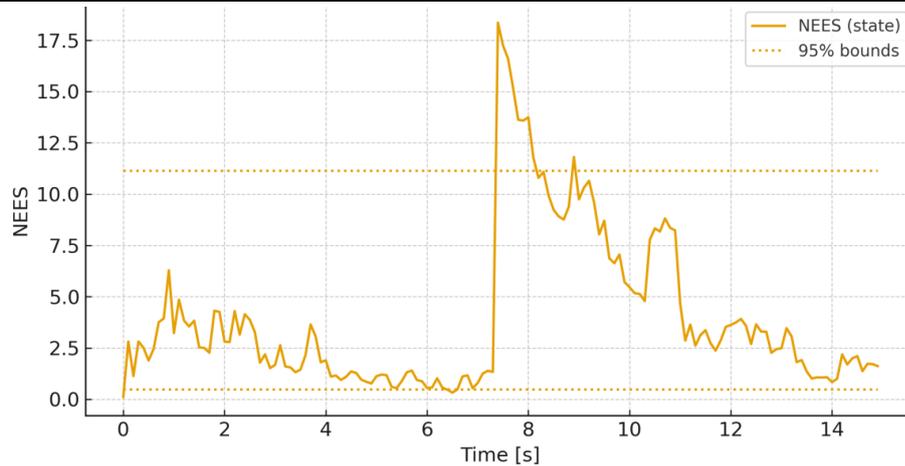


Рис. 3. Динаміка похибки: RMSE положення в часі для фільтра Калмана та середньої, отриманої за допомогою GERT-модельовання

Крива фільтра Калмана демонструє суттєво нижчу похибку після короткої фази «пуску» та адаптації до маневру, що підтверджує доцільність налаштування коваріацій Q і R . Крива RMSE, що отримана за допомогою GERT-модельовання, є вищою через відсутність рекурсивної корекції вимірюваннями. Графік служить кількісним аргументом на користь обраного варіанта покращення.

На рис. 4. наведено траєкторію нормованої квадратичної помилки оцінювання стану та теоретичні 95-відсоткові межі розподілу χ^2 для розмірності стану $n_x=4$.

Як видно з рисунку після маневру NEES зростає (модель руху тимчасово «не встигає»), але повертається у довірчу смугу після адаптації, що свідчить про коректність вибраних Q та R і відсутність систематичної помилки у прогнозі коваріацій.

Рис. 4. Узгодженість оцінювача NEES із 95% χ^2 -межами

Плавна інтеграція з GERT реалізується двома механізмами. По-перше, часові висновки GERT визначають оптимальний крок дискретизації Δt . Якщо мережа демонструє наявність коротких гілок зі значущими затримками, зменшують Δt аби фільтр Калмана міг оперативно реагувати. Якщо домінують довгі гілки з малими змінами, Δt може бути збільшено для економії обчислень без втрати якості. По-друге, імовірна маса на гілках з маневровими подіями використовується для адаптації Q_k . Коли GERT сигналізує підвищену імовірність маневру, елементи Q_k , пов'язані з прискореннями/кутовою швидкістю, тимчасово збільшують, підсилюючи адаптивність фільтра.

Якщо траєкторія оцінюється у декартових координатах, але вимірювання надходять у полярних, необхідна стабільна конверсія та, за потреби, EKF/UKF (Unscented Kalman Filter) для нелінійної проєкції. У цьому випадку еквівалентні формули прогнозу залишаються, а корекція виконується із заміною H_k на Якобіан $\partial h/\partial x$ або на сигма-точки (у UKF). Нормалізація кутів, логіка «огортання» $(-\pi, \pi]$ та масштабування кутових дисперсій є обов'язковими для запобігання штучному збільшенню RMSE через кутові розриви.

З огляду на реальні дані РЛС, слід врахувати наявність хибних тривог і пропусків спостережень. У межах базової лінійної рекурсії ці явища опрацьовуються поза фільтром. Через виконання (gating) інновації та асоціацію вимірювань, після чого відібрані z_k подаються до корекції. При відсутності вимірювання виконується лише прогноз. Таке відокремлення дозволяє зберегти математичну чистоту фільтра і, водночас, зробити його придатним до вбудовування у ширший тракт обробки сигналів.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

У статті розроблено та досліджено інтегрований підхід до супроводження повітряних цілей у радіолокаційній системі на початковому етапі функціонування в умовах навмисних перешкод, що поєднує ймовірно-часову модель на основі GERT-мережі з рекурсивним оцінюванням стану за допомогою фільтра Калмана. Показано, що GERT-модель ефективно формує макrorівневий структурно-ймовірнісний каркас процесу, забезпечуючи аналітичне визначення часових характеристик і сценаріїв переходів, тоді як фільтр Калмана виконує мікрорівневе уточнення траєкторії з мінімізацією середньоквадратичної помилки.

Проведена статистична валідація підтвердила коректність ініціалізації та узгодженість роботи інтегрованого методу вже на початковій фазі супроводу. Траєкторія NEES після короткого перехідного процесу стабілізується в межах 95-відсоткових χ^2 -довірчих меж, що свідчить про адекватність вибраних параметрів дискретизації та коваріацій шумів у заваденасиченому середовищі. Порівняльний аналіз на множині незалежних прогонів показав статистично значуще зменшення RMSE для фільтра Калмана порівняно з GERT-середньою траєкторією, особливо в умовах раптового погіршення якості вимірювань.

Отримані результати підтверджують комплементарність макrorівневого GERT-аналізу та мікрорівневої рекурсивної фільтрації, а також доцільність їх інтеграції для підвищення точності та завадостійкості РЛС. Запропонований підхід може бути використаний як методична основа для побудови адаптивних алгоритмів супроводу в однорадарних системах. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення моделі для випадків негаусівських завад, масових хибних спрацювань та інтеграцію процедур асоціації вимірювань.

Література

11. Serkov A. The influence of a potential barrier on the mechanisms of excitation of own fluctuations in radio products in conditions of exposure to electromagnetic radiation / Serkov A., Breslavets V., Breslavets J., Yakovenko I. // *Advanced Information Systems*. – 2023. – Vol. 7, no. 1. – P. 36–40. – DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.06>.

12. Tian Feng. Target Tracking Algorithm Based on Adaptive Strong Tracking Extended Kalman Filter / Tian Feng, Xinzhao Guo, Weibo Fu // *Electronics*. – 2024. – Vol. 13, no. 3 – Art. 652. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics13030652>.
13. Wang J. Model Adaptive Kalman Filter for Maneuvering Target Tracking Based on Variational Inference Wang J., Wang X., Chen Y., Yan M., Lan H. // *Electronics*. – 2025. – Vol. 14, no. 10. – Art. 1908. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics14101908>.
14. Semenov S. A Mathematical Model for the Initial Interaction Stage Between a Radar System and a Target Using GERT Network / Semenov S., Krupska-Klimczak M., Mieczkowski P., Tarasenko Y., Voronets V., Voronets O., Breslavets V., Davydov V. // *Applied Sciences*. – 2025. – Vol. 15, no. 3. – Art. 1123. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app15031123>.
15. Pustovoitov P. The speed calculating increasing method of the markov model network node / Pustovoitov P., Okhrimenko M., Voronets V., Udalov D. // *Advanced Information Systems*. – 2021. – Vol. 5, no. 3. – P. 13–17. – DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.3.02>.
16. Semenov S. Development of a fuzzy GERT-model for investigating common software vulnerabilities / Semenov S., Zhang L., Cao W., Bulba S., Babenko V., Davydov V. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2021. – Vol. 6, no. 2(114). – P. 6–18. – DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.243715>.
17. Arroyo Cebeira A. Adaptive IMM-UKF for Airborne Tracking / Arroyo Cebeira A., Asensio Vicente M. // *Aerospace*. – 2023. – Vol. 10, no. 8. – Art. 698. – DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10080698>.
18. Semenov S. Development of an Intelligent Method for Target Tracking in Radar Systems at the Initial Stage of Operation Under Intentional Jamming Conditions / Semenov S., Wasiuta O., Jammine A., Golec J., Krupska-Klimczak M., Tarasenko Y., Voronets V., Breslavets V., Lvov S., Moskalenko A. // *Applied Sciences*. – 2025. – Vol. 15, no. 13. – Art. 7072. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app15137072>.
19. Компанієць В. Стохастичний метод аналізу джитера на основі згортки гіперекспоненційних розподілів при самоподібному трафіку / Компанієць В., Пустовойтов П. // *Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки*. – 2025. – Т. 355, № 4. – С. 213–220. – DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-355-32>.

References

1. Serkov A. The influence of a potential barrier on the mechanisms of excitation of own fluctuations in radio products in conditions of exposure to electromagnetic radiation / Serkov A., Breslavets V., Breslavets J., Yakovenko I. // *Advanced Information Systems*. – 2023. – Vol. 7, no. 1. – P. 36–40. – DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.06>.
2. Tian Feng. Target Tracking Algorithm Based on Adaptive Strong Tracking Extended Kalman Filter / Tian Feng, Xinzhao Guo, Weibo Fu // *Electronics*. – 2024. – Vol. 13, no. 3 – Art. 652. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics13030652>.
3. Wang J. Model Adaptive Kalman Filter for Maneuvering Target Tracking Based on Variational Inference Wang J., Wang X., Chen Y., Yan M., Lan H. // *Electronics*. – 2025. – Vol. 14, no. 10. – Art. 1908. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics14101908>.
4. Semenov S. A Mathematical Model for the Initial Interaction Stage Between a Radar System and a Target Using GERT Network / Semenov S., Krupska-Klimczak M., Mieczkowski P., Tarasenko Y., Voronets V., Voronets O., Breslavets V., Davydov V. // *Applied Sciences*. – 2025. – Vol. 15, no. 3. – Art. 1123. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app15031123>.
5. Pustovoitov P. The speed calculating increasing method of the markov model network node / Pustovoitov P., Okhrimenko M., Voronets V., Udalov D. // *Advanced Information Systems*. – 2021. – Vol. 5, no. 3. – P. 13–17. – DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.3.02>.
6. Semenov S. Development of a fuzzy GERT-model for investigating common software vulnerabilities / Semenov S., Zhang L., Cao W., Bulba S., Babenko V., Davydov V. // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2021. – Vol. 6, no. 2(114). – P. 6–18. – DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.243715>.
7. Arroyo Cebeira A. Adaptive IMM-UKF for Airborne Tracking / Arroyo Cebeira A., Asensio Vicente M. // *Aerospace*. – 2023. – Vol. 10, no. 8. – Art. 698. – DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace10080698>.
8. Semenov S. Development of an Intelligent Method for Target Tracking in Radar Systems at the Initial Stage of Operation Under Intentional Jamming Conditions / Semenov S., Wasiuta O., Jammine A., Golec J., Krupska-Klimczak M., Tarasenko Y., Voronets V., Breslavets V., Lvov S., Moskalenko A. // *Applied Sciences*. – 2025. – Vol. 15, no. 13. – Art. 7072. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app15137072>.
9. Kompaniets V. Stochastic method of jitter analysis based on the convolution of hyperexponential distributions for self-similar traffic / Kompaniets V., Pustovoitov P. // *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*. – 2025. – Vol. 355, no. 4. – P. 213–220. – DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-355-32>.