

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2026-361-31>
УДК 621.77

СТАДНІК МИКОЛА

Вінницький національний аграрний університет
<https://orcid.org/0000-0003-2109-6219>
e-mail: stadnik1948@gmail.com

ЯРОПУД ВІТАЛІЙ

Вінницький національний аграрний університет
<https://orcid.org/0000-0003-0502-1356>
e-mail: yaropud77@gmail.com

БУБНОВСЬКА ІРИНА

Вінницький національний аграрний університет
<https://orcid.org/0000-0002-3535-3127>
e-mail: biana25100@gmail.com

КУПЧУК ІГОР

Вінницький національний аграрний університет
<https://orcid.org/0000-0002-2973-6914>
e-mail: kupchuk.igor@i.ua

АНАЛІЗ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛУ ПРИ БАГАТОПРОХІДНОМУ ПРОКАТУВАННІ

У роботі проведено аналіз особливостей пластичної течії металу під час багатопрохідного прокатування з урахуванням зміни анізотропії, що виникає після кожного деформаційного циклу. Традиційно для опису напружено-деформованого стану використовують ізотропний критерій течії Мізеса, однак він не враховує текстуроутворення, яке суттєво змінює механічну поведінку металу після першого проходу. У статті обґрунтовано доцільність застосування критерію Хілла, що дозволяє адекватніше моделювати пластичну течію для матеріалів із проявами анізотропії. Розглянуто кінематичну модель плоского прокатування, визначено швидкості деформацій, умову маталозбереження та зсувні компоненти пластичної течії. На основі рівнянь рівноваги та критерію Хілла отримано спрощені залежності для напружень, характерних для багатопрохідної деформації.

У роботі наведено асоційоване правило течії Хілла та показано механізм зв'язку між головними деформаціями й напруженнями в умовах анізотропного плинку. Запропоновано модифікований підхід до визначення контактного тиску на основі узагальненої формули Сіма, адаптованої до анізотропного критерію течії. Встановлено залежність між контактним тиском і коефіцієнтом анізотропії, що зростає з числом проходів.

Ключові слова: напружено-деформований стан, дослідження, прокатування, деформація, пластичність, технологічний процес.

STADNIK MYKOLA, YAROPUD VITALIY, BUBNOVSKA IRINA, KUPCHUK IGOR

Vinnitsia National Agrarian University

ANALYSIS OF PLASTIC FLOW OF METAL DURING MULTI-PASS ROLLING

The paper analyzes the features of plastic flow of metal during multi-pass rolling, taking into account the evolution of anisotropy that occurs after each deformation cycle. Traditionally, the isotropic Mises flow criterion is used to describe the stress-strain state, but it does not take into account texture formation, which significantly changes the mechanical behavior of the metal after the first pass. The article substantiates the feasibility of using the Hill criterion, which allows for more adequate modeling of plastic flow for materials with manifestations of anisotropy. The kinematic model of flat rolling is considered, the deformation rates, the mass conservation condition, and the shear components of plastic flow are determined. Based on the equilibrium equations and the Hill criterion, simplified dependences for stresses characteristic of multi-pass deformation are obtained.

The paper presents the associated Hill flow rule and shows the mechanism of the relationship between the main strains and stresses under anisotropic flow conditions. A modified approach to determining the contact pressure is proposed based on the generalized Sim formula adapted to the anisotropic flow criterion. The relationship between the contact pressure and the anisotropy coefficient is established, which increases with the number of passes.

The proposed model of plastic flow velocity is based on the modified Oyen formula, in which the flow stiffness parameter increases in accordance with the accumulation of anisotropy. To assess the state of the material, the stress state indicator and the Cockcroft-Latam damage criterion are introduced, which allows determining the degree of accumulated defects in the process of multi-pass deformation. The obtained dependencies provide a qualitatively more accurate description of the processes occurring in the deformation zone and can be used to optimize rolling modes, increase metal plasticity and prevent the occurrence of defects in finished products.

Keywords: stress-strain state, research, rolling, deformation, plasticity, technological process.

Стаття надійшла до редакції / Received 12.12.2025

Прийнята до друку / Accepted 11.01.2026

Опубліковано / Published 29.01.2026



This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© Стаднік Микола, Яропуд Віталій, Бубновська Ірина, Купчук Ігор

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Багатопрохідне прокатування є одним із ключових технологічних процесів формоутворення металів, під час якого відбувається інтенсивне накопичення деформації та формування текстури. Унаслідок цього змінюється пластичність і напружено-деформований стан металу, що ускладнює точний прогноз поведінки матеріалу. Класична модель Мізеса, яка виходить із припущення ізотропії, забезпечує прийнятну точність лише

на початкових етапах деформації, але не враховує анізотропію, що накопичується після першого проходу. Тому актуальною є необхідність застосування моделей, здатних описувати розвиток текстури та зміну плинину.

Аналіз останніх досліджень

Критерій Хілла є одним із найбільш ефективних підходів для опису анізотропної пластичності. Його використання дає змогу аналітично оцінювати вплив орієнтації кристалітів, параметрів прокатування й напружених станів на формування кінцевих властивостей виробу. Аналіз пластичної течії із застосуванням критерію Хілла дозволяє оптимізувати процеси багатопрохідного деформування, зменшити енергетичні витрати та мінімізувати ризик пошкоджень. Тому розробка аналітичної моделі, що враховує анізотропію, є важливим завданням сучасної металургії. [1-3]

Формулювання цілей статті

Метою роботи є: розроблення та обґрунтування аналітичної моделі пластичної течії металу при багатопрохідному прокатуванні з урахуванням еволюції анізотропії, що виникає внаслідок текстуроутворення після кожного проходу.

Для оцінки пластичної течії металу в зоні деформації багатопрохідного прокатування зазвичай використовують ізотропну модель плинину Мізеса. Однак після першого проходу метал набуває текстури (орієнтації кристалітів), що призводить до анізотропії механічних властивостей.

Виклад основного матеріалу

Для досягнення поставленої мети передбачено застосування анізотропного критерію текучості Хілла, що дає змогу коректно врахувати напрямну залежність пластичних властивостей металу, сформовану попередніми деформаційними циклами та текстурою. Розрахунок умов контактної взаємодії валків із заготовкою пропонується виконувати на основі модифікованих залежностей для визначення контактної тиску з урахуванням реальних умов тертя та зміни опору деформації по товщині/довжині осередку деформації. Швидкість пластичного плинину (поля швидкостей) визначається з урахуванням кінематичних обмежень процесу прокатування, що дозволяє точніше відтворювати локальні зони інтенсивної деформації та можливі концентрації напружень.

Додатково працездатність матеріалу оцінюється через накопичене пошкодження за критерієм Кокрофта—Латема, який забезпечує кількісне відстеження схильності до зародження та розвитку дефектів (надривів, тріщин, розшарувань) у критичних ділянках осередку деформації. Комплексне поєднання зазначених підходів підвищує точність прогнозування напружено-деформованого стану металу, створює підґрунтя для оптимізації режимів прокатування (температури, обтиснень, швидкості, умов тертя) та дає змогу завчасно запобігати дефектоутворенню у готових виробах. [4–6]

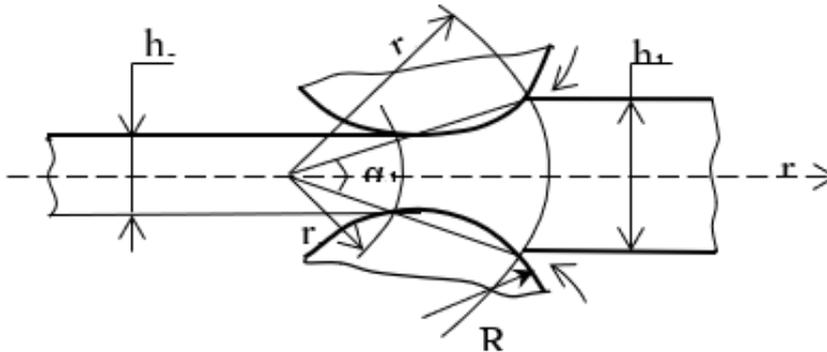


Рис. 1. Схема зони деформації при прокатуванні

Тому для більш адекватного опису напружено-деформованого стану пропонується використовувати анізотропний критерій Хілла, що дозволяє врахувати зміну плинину матеріалу під час багатократної деформації. [7]

Кінематична модель процесу

Розглянемо плоске прокатування, де:

$$\varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_x + \varepsilon_z = 0 \quad (1)$$

Швидкості деформацій:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2)$$

З умови масозбереження:

$$\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_z \quad (3)$$

Зсувна деформація:

$$\dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (4)$$

Рівняння рівноваги.

Відсутність інерційних сил дає:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Критерій пластичності Хілла – третій варіант моделі.

Класичний критерій Хілла:

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (7)$$

Для плоского прокатування:

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (8)$$

Тоді (7) спрощується до:

$$G\sigma_z^2 + H\sigma_x^2 + (F + H)\sigma_z\sigma_x + 2M\tau_{xz}^2 = 1 \quad (9)$$

Це – альтернативний закон плинності, який враховує анізотропію, що накопичується після кожного проходу. Зв'язок напружень із деформаціями (правило течії Хілла).

Використаємо асоційоване правило течії:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

Для головних деформацій:

$$\dot{\varepsilon}_x = \lambda(2H\sigma_x + (F + H)\sigma_z) \quad (11)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \lambda(2G\sigma_z + (F + H)\sigma_x) \quad (12)$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = 4\lambda M\tau_{xz} \quad (13)$$

Розподіл контактної тиску у зоні деформації.

Застосуємо узагальнену формулу Сіма, адаптовану до критерію Хілла:

$$p(z) = \sigma_s^{(H)} \left(1 + m \frac{H_0 - z}{l_c} \right) \quad (14)$$

де

$$\sigma_s^{(H)} = \frac{1}{\sqrt{G\alpha^2 + H(1-\alpha)^2 + (F+H)\alpha(1-\alpha)}} \quad (15)$$

α — коефіцієнт, що відображає пропорцію між σ_x і σ_z :

$$\alpha = \frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_z} \quad (16)$$

Тобто напруження плинності залежить від анізотропії та напрямку деформації.

Модель швидкості пластичної течії металу

Використаємо модифіковану формулу Ойена: [8]

$$v_z(z) = v_{in} + (v_{out} - v_{in}) \left(1 - \frac{z}{H_i} \right)^k \quad (17)$$

де k зростає із числом проходів (через збільшення анізотропії).

Рекомендовано:

$$k_i = 1.3 + 0.1(i - 1) \quad (18)$$

Показник напруженого стану

Визначимо:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (19)$$

Тоді:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_s^{(H)}} \quad (20)$$

Це дозволяє оцінити запас пластичності при анізотропії.

Критерій пошкодження Кокрофта—Латема [9].

Для багатоходового прокатування:

$$D_i = \int_0^{\varepsilon_i} \frac{\sigma_1}{\sigma_s^{(H)}} d \quad (21)$$

Кумулятивне пошкодження:

$$D_{tot} = \sum_{i=1}^k D_i \quad (22)$$

Руйнування:

$$D_{tot} \geq D_c \quad (23)$$

Це дає можливість оцінювати накопичення пошкоджень між проходами.

У якості розрахункової моделі процесу гарячого вальцювання заготовок із алюмінієвого сплаву було обрано схему «круг-овал», оскільки вона є найпоширенішою та характеризується жорсткими умовами напружено-деформованого стану (НДС) заготовки. Розглядали процес вальцювання для заготовок діаметром 25 мм і 35 мм. Розрахункову схему сформовано на основі об'ємної скінченно-елементної моделі (рис. 2).

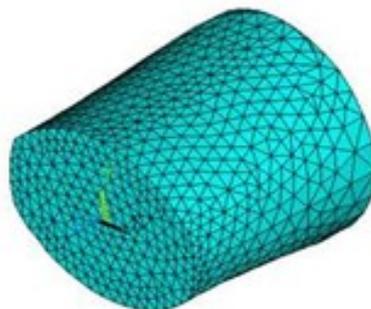
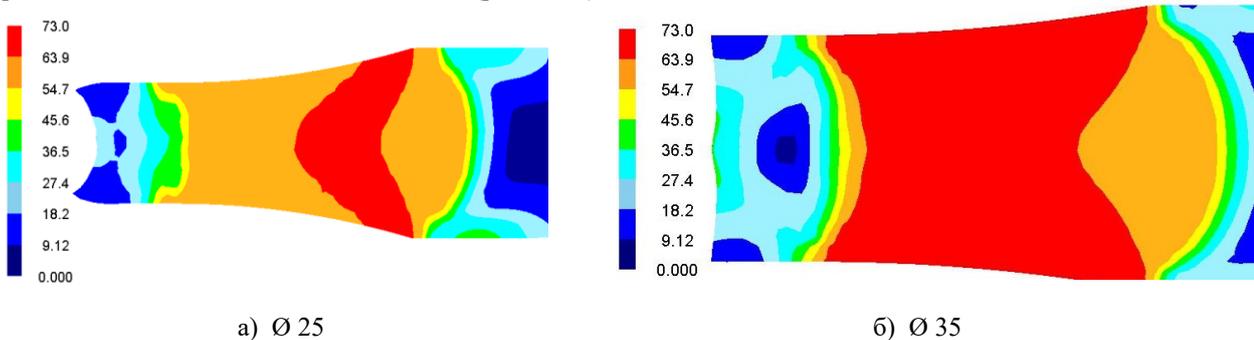


Рис. 2. Дискретна модель осередку деформації заготовки

Просторова дискретна модель твердого тіла була побудована в програмному комплексі Autodesk Inventor і експортована до ANSYS. Початкові заготовки розбивалися на таку кількість елементів, що забезпечує необхідну точність розрахунків.

При моделюванні задавалися умови реального процесу. Властивості початкової заготовки: модуль Юнга $6,9 \times 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона 0,33, умовна межа течії при температурі 450°C , $\sigma = 62$ МПа. Діаграма напруги при розрахунку описувалася залежністю $\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i, T)$, де σ_s - напруга, ε_i - інтенсивність деформації, $\dot{\varepsilon}_i$ - швидкість деформації, T - температура. При розрахунку було враховано контактне тертя в умовах гарячого вальцювання ($\mu = 0,32$). Деформуючий інструмент приймався абсолютно жорстким. Враховували тепловіддачу заготовки докільцю та інструменту. Для матеріалу заготовки набували значення термокондуктивності 180,18 [Н(с·К)], теплоємність 2,43 (Н/мм²/с), випромінювальна здатність 0,7.

За результатами розрахунків був визначений напружено-деформованого стану заготовок, зокрема характер розподілу інтенсивності напружень σ_i для заготовок $\varnothing 25$ і $\varnothing 35$ в момент початку деформації, на проміжних двох етапах та на сталій стадії (рис. 3 а,б).



а) $\varnothing 25$ б) $\varnothing 35$
Рис. 3. Характер розподілу інтенсивності напружень σ_i у період сталій стадії для заготовок:
 а) період зростання осередку деформації $\varnothing 25$,
 б) період сталій стадії $\varnothing 35$.

Після визначення осередку деформації в поздовжньому перерізі, були визначені напруження і деформації в поперечних перерізах на виході заготовки з калібрів, на осі калібрів та на вході заготовки в калібри (формування сталого осередку деформації). На рис. 4 показаний розподіл інтенсивності деформації ε_i в поздовжньому перерізі та умовно відображено місця площини, в яких взяті поперечні перерізи в осередку деформації сталого процесу.

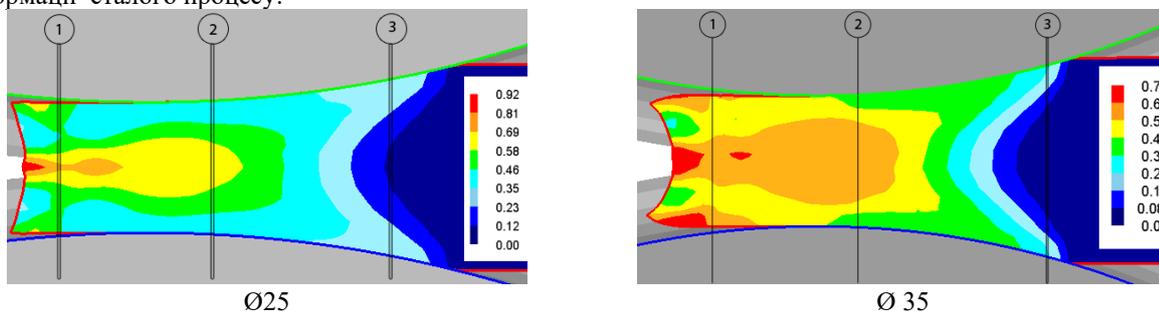


Рис. 4. Характер розподілу інтенсивності деформації ε_i : 1) період сталій стадії; 2) період переходу; 3) період зростання осередку деформації. Це все період сталій стадії

Отриманий у процесі моделювання характер розподілу температури в поздовжньому перерізі вздовж осі заготовки узгоджується з розподілом інтенсивності деформації. У зоні контакту інструмента із заготовкою спостерігається суттєве зниження температури внаслідок тепловіддачі металу інструменту. Пониження температури також відбувається й на вільній (неконтактній) поверхні заготовки. Водночас у ділянках із підвищеною інтенсивністю деформації фіксується зростання температури. У зоні найбільш інтенсивної деформації температура підвищується більш ніж на 20°C . Розподіл інтенсивності деформації ε_i та температури було додатково проаналізовано в поперечних перерізах уздовж осей X і Y, як показано на рис. 5.

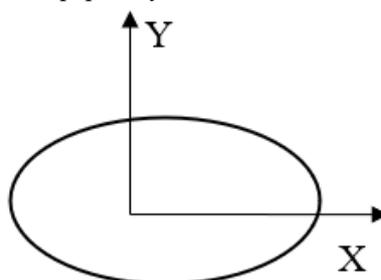


Рис. 5. Схема напрямку осей

Розподіл інтенсивності деформацій ε_i (рис. 6) та нерівномірності температури (рис.7) дає нам можливість оцінити характер формування осередку деформації в поперечному перерізі заготовки.

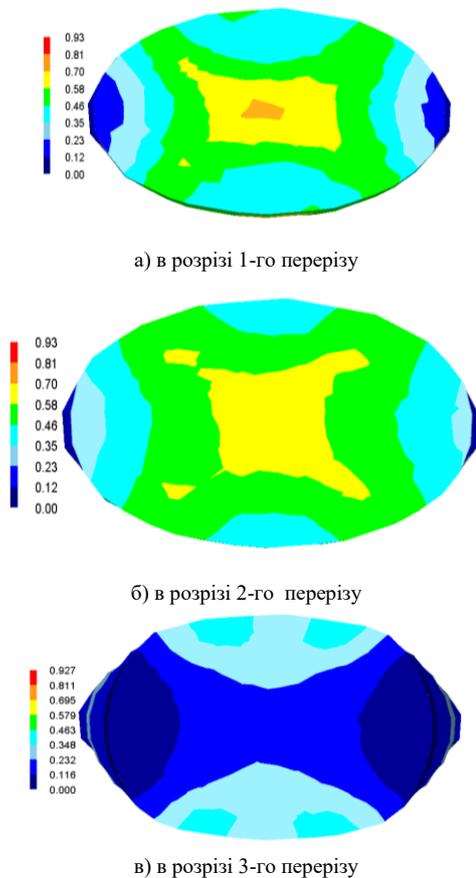


Рис. 6. Розподіл інтенсивності деформацій ε_i для заготовки \varnothing 25 мм

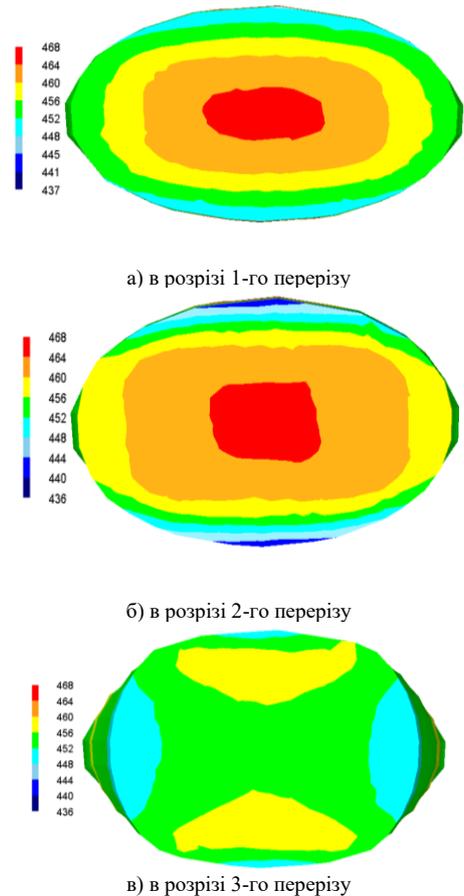


Рис. 7. Розподіл нерівномірності температури для заготовки \varnothing 25 мм.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

У роботі розглянуто модель пластичної течії металу при багатопрхідному прокатуванні з урахуванням анізотропії, що накопичується внаслідок текстуроутворення. Показано, що критерій Мізеса не забезпечує достатньої точності для багатопрхідних процесів, тоді як критерій Хілла дозволяє більш коректно описати змінний характер плинину. Отримано спрощені залежності для напружено-деформованого стану та модифіковано формулу Сіма для визначення контактного тиску. Запропоновано модель швидкості пластичної течії на основі формули Ойена з урахуванням параметра анізотропії, що зростає з числом проходів.

Введення критерію пошкодження Кокрофта—Латема дає змогу оцінювати межу пластичності та накопичення дефектів між проходами, що може бути використано для запобігання руйнуванню металу. Запропоновані залежності створюють основу для подальшої оптимізації режимів прокатування, підвищення якості металопродукції та вдосконалення інженерних методик розрахунку.

Література

1. Lian, J. H., Ahn, D. C., Chae, D. C., Münstermann, S., & Bleck, W. (2015). A comparative study on the formability prediction of steel sheets by anisotropic models based on associated flow rule and non-associated flow rule. *Key Engineering Materials*, 651–653, 150–155. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.651-653.150>
2. Younes, W., Giraud, E., & dal Santo, P. (2015). Plasticity criterion for hot forming of aluminum-lithium alloy. *Key Engineering Materials*, 651–653, 1103–1108. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.651-653.1103>
3. Lou, Y. S., & Yoon, J. W. (2015). Anisotropic behavior in plasticity and ductile fracture of an aluminum alloy. *Key Engineering Materials*, 651–653, 163–168. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.651-653.163>
4. Zhani, K., Darrieulat, M., & Chenaoui, A. (2021). Prediction of anisotropic elastoplastic instability with Rice's criterion in plane compression. *Indian Journal of Science and Technology*, 14(18), 1452–1467. <https://doi.org/10.17485/IJST/v14i18.117>
5. Sener, B., Esener, E., & Firat, M. (2021). Modeling plastic anisotropy evolution of AISI 304 steel sheets by a polynomial yield function. *SN Applied Sciences*, 3, Article 181. <https://doi.org/10.1007/s42452-021-04206-2>

6. Shaabani, A., Jamaati, R., & Hosseinipour, S. J. (2024). Mechanical anisotropic behavior of low-carbon steel processed by asymmetric rolling. *Heliyon*, *10*(13), e34004. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e34004>
7. Бойко, Л. І., & Григоренко, Г. М. (2015). *Теорія пластичності та механіка металів*. НТУУ «КПІ».
8. Дудніков, В. О., & Квасницька, О. В. (2017). *Процеси пластичної деформації при прокатуванні*. НМетАУ.
9. Левченко, В. І. (2020). *Модельовання напружено-деформованого стану при обробці тиском*. НТУ «ХПІ».

References

1. Lian, J. H., Ahn, D. C., Chae, D. C., Münstermann, S., & Bleck, W. (2015). A comparative study on the formability prediction of steel sheets by anisotropic models based on associated flow rule and non-associated flow rule. *Key Engineering Materials*, *651–653*, 150–155.
2. Younes, W., Giraud, E., & dal Santo, P. (2015). Plasticity criterion for hot forming of aluminum-lithium alloy. *Key Engineering Materials*, *651–653*, 1103–1108.
3. Lou, Y. S., & Yoon, J. W. (2015). Anisotropic behavior in plasticity and ductile fracture of an aluminum alloy. *Key Engineering Materials*, *651–653*, 163–168.
4. Zhani, K., Darrieulat, M., & Chenaoui, A. (2021). Prediction of anisotropic elastoplastic instability with Rice's criterion in plane compression. *Indian Journal of Science and Technology*, *14*(18), 1452–1467.
5. Sener, B., Esener, E., & Firat, M. (2021). Modeling plastic anisotropy evolution of AISI 304 steel sheets by a polynomial yield function. *SN Applied Sciences*, *3*, Article 181.
6. Shaabani, A., Jamaati, R., & Hosseinipour, S. J. (2024). Mechanical anisotropic behavior of low-carbon steel processed by asymmetric rolling. *Heliyon*, *10*(13), e34004.
7. Boiko, L. I., & Hryhorenko, H. M. (2015). *Theory of plasticity and mechanics of metals*. NTUU “KPI”.
8. Dudnikov, V. O., & Kvasnytska, O. V. (2017). *Processes of plastic deformation in rolling*. NMetAU.
9. Levchenko, V. I. (2020). *Modeling of the stress–strain state in metal forming*. NTU “KhPI”.