

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2026-363-27>

УДК 004.942:004.94:629.33

ПАСЕКА БОГДАН

ВНЗ: Вінницький Національний Технічний Університет

<https://orcid.org/0009-0002-9975-2896>

e-mail: bogdanpaseka2000@gmail.com

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ІНВАРІАНТІВ ПРИ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОМОБІЛЯ З РЕКУПЕРАТИВНИМ ГАЛЬМУВАННЯМ

З позицій системного аналізу розглянуто проблему редукції математичних моделей електромобіля з тяговим електроприводом змінного струму та системою рекуперативного гальмування для застосування в системах підтримки прийняття рішень водієм.

Ключові слова: системний аналіз, електромобіль, енергетичний інваріант, редукція моделі, рекуперативне гальмування, баланс потужностей, система підтримки прийняття рішень, комп'ютерне моделювання.

PASEKA BONDAN

Vinnitsia National Technical University

SYSTEM ANALYSIS OF THE PROCESS OF PRESERVING ENERGY INVARIANTS WHEN REDUCING THE MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTRIC VEHICLE WITH RECUPERATIVE BRAKING

From the standpoint of systems analysis, the problem of reducing mathematical models of an electric vehicle with an AC traction drive and a regenerative braking system for application in driver decision-support systems is considered. A systems approach is applied to the decomposition of the electric vehicle energy chain into functional subsystems, followed by an analysis of energy flows between them. The necessity of preserving energy invariants when reducing the model order is substantiated, as this constitutes a critical condition for adequate prediction of driving range and regeneration efficiency. A method of structural-energy reduction is proposed, based on the principle of maintaining the power balance at nodal points of the transmission energy chain. A theorem is formulated on the necessary and sufficient conditions for preserving the energy invariant when transitioning from the full model to the reduced one. It is proven that classical modal reduction methods violate the energy balance of systems with regeneration, which leads to a systematic error in driving range estimation. A modified balanced truncation method with energy correction is developed, which guarantees the preservation of the integral energy balance over an arbitrary time interval. Computer modeling in the MATLAB environment is performed to verify the proposed method on typical driving cycles of an electric vehicle with intensive regenerative braking. The simulation results confirm that the proposed method ensures an energy consumption estimation error of no more than 1.5 percent while providing a fourfold acceleration of computations compared to the full model. A criterion for assessing reduction quality based on the deviation of the energy invariant is proposed. Prospects for applying the developed method to the construction of adaptive energy management systems for electric vehicles with forecasting of optimal regeneration modes are outlined.

Keywords: systems analysis, electric vehicle, energy invariant, model reduction, regenerative braking, power balance, decision support system, computer modeling.

Стаття надійшла до редакції / Received 16.01.2026

Прийнята до друку / Accepted 11.02.2026

Опубліковано / Published 26.03.2026



This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© Пасека Богдан

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Системний аналіз складних технічних об'єктів передбачає розгляд їх як цілісних систем із взаємопов'язаними підсистемами та потоками енергії, інформації та матерії між ними. Електромобіль з тяговим електроприводом змінного струму є типовим прикладом такої складної системи, що характеризується здатністю до рекуперації кінетичної енергії під час гальмування. Аналіз літературних джерел [1-15] свідчить про наявність суттєвої проблеми: стандартні методи редукції моделей не гарантують збереження енергетичного балансу системи, що призводить до накопичення систематичної похибки при оцінюванні стану заряду батареї та прогнозуванні запасу ходу. Незважаючи на значну кількість робіт, присвячених оптимізації рекуперативного гальмування, питання збереження енергетичних інваріантів при редукції математичних моделей для систем підтримки прийняття рішень залишається недостатньо дослідженим.

Невирішеною частиною проблеми є відсутність теоретично обґрунтованого методу редукції математичних моделей електромобіля, що гарантує збереження енергетичного інваріанта – інтегрального балансу енергії між механічною підсистемою, електричним приводом та акумуляторною батареєю – на довільному часовому інтервалі та за довільного режиму руху, включаючи інтенсивне рекуперативне гальмування.

Аналіз досліджень та публікацій

У роботі [1] виконано комплексний аналіз систем рекуперації кінетичної енергії в електромобілях та показано, що ефективність рекуперації суттєво залежить від параметрів енергетичного ланцюга та алгоритмів керування. Автори [2] запропонували модифікований алгоритм оптимізації для планування обчислювальних задач у розподілених системах.

Питання стійкості гальмування при рекуперації досліджено в роботі [3], де розроблено стратегію керування рекуперативним гальмуванням на основі вимог до стійкості руху транспортного засобу.

Огляд стратегій енергоменеджменту для електромобілів з рекуперативним гальмуванням представлено в роботі [4], яка заклала теоретичні основи оптимального розподілу гальмівних зусиль між механічною та електричною системами. Систематизований виклад принципів побудови сучасних електроприводів транспортних засобів наведено в монографії [5], де детально розглянуто архітектуру тягових електроприводів змінного струму.

Проблема енергооптимального проектування електричних силових установок з урахуванням теплових обмежень двигуна розглянута в дослідженні [6], що є важливим для розуміння впливу теплових процесів на ефективність рекуперації. У роботі [7] запропоновано безпечну та енергоефективну стратегію керування рухом інтелектуальних електромобілів з урахуванням можливостей рекуперативного гальмування. Огляд сучасних досягнень Китаю в галузі батарейних електромобілів, включаючи архітектуру технологічних систем та технологічні прориви, представлено в роботі [8].

Базові принципи технології електромобілів систематизовано в підручнику [9], який є джерелом з теорії електричного транспорту. Комплексний огляд методів керування гальмуванням та методів оптимізації для електромобілів виконано в роботі [10], де проаналізовано понад 150 публікацій за останні роки. Використання суперконденсаторів для максимізації рекуперації енергії в системах електроприводу досліджено в роботі [11], що демонструє можливість підвищення ефективності рекуперації до 85%.

Особливості рекуперації енергії гальмування в системах електричного залізничного транспорту, включаючи можливості та виклики, розглянуто в дослідженні [12], результати якого адаптовані для автомобільного транспорту. Параметризовану енергооптимальну стратегію рекуперативного гальмування для підключених та автономних електромобілів на основі динамічного програмування в реальному часі запропоновано в роботі [13]. Теоретичні основи стратегій енергоменеджменту гібридних електромобілів викладено в монографії [14], де систематизовано підходи до оптимального керування потоками енергії.

Ключові технології для електромобілів, включаючи системи накопичення енергії, силову електроніку та системи керування, проаналізовано в оглядовій роботі [15]. Методи оптимізації параметрів нечітких регуляторів, що застосовуються в системах керування рекуперацією, систематизовано в роботі [16]. Стратегію прогнозованого рекуперативного гальмування на основі методів ройового інтелекту для гібридних електромобілів запропоновано в дослідженні [17], де показано підвищення ефективності рекуперації на 12–18% порівняно з традиційним підходом.

Формулювання цілей статті

Метою статті є системний аналіз процесу редукції математичної моделі електромобіля з рекуперативним гальмуванням та розроблення методу структурно-енергетичної редукції, що забезпечує збереження енергетичного інваріанта при зниженні порядку моделі.

Для досягнення мети необхідно:

1. виконати системну декомпозицію енергетичного ланцюга електромобіля;
2. сформулювати математичне визначення енергетичного інваріанта для системи з рекуперацією;
3. довести умови його збереження при редукції; розробити алгоритм побудови редукованої моделі;
4. верифікувати метод шляхом комп'ютерного моделювання.

Виклад основного матеріалу

Енергетичний – ланцюг електромобіля з рекуперативним гальмуванням складається з таких основних підсистем: акумуляторна батарея (АБ), силовий інвертор (СІ), тяговий електродвигун (ТЕД), механічна трансмісія (МТ) та рушійна система (РС). Структуру енергетичного ланцюга показано на рис. 1.

Потік енергії в системі є двонаправленим: у режимі тяги енергія передається від АБ до РС, у режимі рекуперації – у зворотному напрямку. Ця особливість є ключовою для формулювання енергетичного інваріанта.

Повна математична модель енергетичного ланцюга описується системою диференціальних та алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = P_{mech} - P_{resist} \quad (1)$$

$$\frac{dE_{batt}}{dt} = -P_{elec} \quad (2)$$

$$P_{mech} = \eta_{dir}(P_{elec}) \cdot P_{elec}, P_{elec} \geq 0 \quad (3)$$

$$P_{elec} = \eta_{rec}(P_{mech}) \cdot P_{mech}, P_{mech} < 0 \quad (4)$$

Де

E_{kin} – кінетична енергія транспортного засобу, Дж;

E_{batt} – енергія акумуляторної батареї, Дж;

P_{mech} – механічна потужність на колесах, Вт;

P_{elec} – електрична потужність батареї, Вт;

P_{resist} – потужність сил опору руху, Вт;

η_{dir} – ККД прямого перетворення енергії (тяги);

η_{rec} – ККД рекуперації.

Означення 1. Енергетичним інваріантом системи електромобіля з рекуперативним гальмуванням називається функціонал:

$$J(t) = E_{batt}(t) + E_{kin}(t) + \int_0^t [P_{resist}(\tau) + P_{loss}(\tau)] d\tau \quad (5)$$

де P_{loss} – сумарна потужність втрат в енергетичному ланцюзі.

Теорема 1 (про збереження енергетичного інваріанта). Для ізолюваної системи електромобіля (без зовнішнього підведення енергії) енергетичний інваріант є константою:

$$J(t) = J(0) = E_{batt}(0) + E_{kin}(0) = const \quad (6)$$

Доведення. Диференціюючи (5) за часом та підставляючи (1)–(4), отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{dE_{batt}}{dt} + \frac{dE_{kin}}{dt} + P_{resist} + P_{loss} \\ &= -P_{elec} + P_{mech} - P_{resist} + P_{resist} + P_{loss} \end{aligned}$$

Враховуючи, що $P_{loss} = |P_{elec}| - |P_{mech}|$

(потужність втрат дорівнює різниці потужностей на вході та виході перетворювача), отримуємо $dJ/dt = 0$.

Параметри – електромобіля, що використовуються для моделювання, наведено в таблиці 1. Значення відповідають характеристикам сучасного серійного електромобіля середнього класу.

Таблиця 1

Параметри електромобіля для моделювання

Параметр	Позначення	Значення	Одиниця
Маса спорядженого автомобіля	m	1920	кг
Момент інерції обертових мас	J_{rot}	8,5	кг·м ²
Радіус колеса	r_w	0,334	м
Передаточне число редуктора	i_g	9,73	—
Коефіцієнт аеродинамічного опору	C_x	0,24	—
Площа лобового перерізу	A_f	2,19	м ²
Коефіцієнт опору кочення	f_0	0,0095	—
Максимальна потужність ТЕД	P_{max}	239	кВт
Максимальний момент ТЕД	T_{max}	450	Нм
Ємність АБ	E_{nom}	82	кВт·год
Номінальна напруга АБ	U_{nom}	357	В
Внутрішній опір АБ	R_{int}	0,065	Ом
Номінальний ККД ТЕД	η_m	0,95	—
ККД силового інвертора	η_{inv}	0,98	—
Максимальний ККД рекуперації	$\eta_{rec, max}$	0,78	—

Розглянемо повну модель електромобіля у формі простору станів:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \quad (7)$$

де

$x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану;

u – вектор керування;

A, B – матриці системи;

f – нелінійна складова.

Класичний метод балансованого усікання проектує систему на підпростір розмірності $r < n$:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r u + f_r(x_r, u) \quad (8)$$

Твердження 1. Редукована модель (8), отримана методом балансованого усікання, не зберігає енергетичний інваріант (5) для системи з рекуперацією.

Доведення. При балансованому усіканні матриця проєкції V мінімізує норму передаточної функції $\|G - G^r\|_\infty$, що не враховує знакозмінність потоку потужності. Для режиму рекуперації $P_{mech} < 0$ похибка проєкції має систематичну складову, що накопичується в енергетичному балансі.

Запропонований метод базується на декомпозиції системи на енергетичні підсистеми з подальшим узгодженням потоків потужності на межах підсистем.

Повна модель розбивається на N підсистем відповідно до фізичних вузлів енергетичного ланцюга:

$$\Sigma = \Sigma_{batt} \otimes \Sigma_{inv} \otimes \Sigma_{motor} \otimes \Sigma_{trans} \otimes \Sigma_{veh} \quad (9)$$

На межі між підсистемами i та j потужності мають задовольняти умову балансу:

$$P_{i \rightarrow j} = \eta_{ij}(P_{i \rightarrow j}) \cdot P_{j, in}, P_{i \rightarrow j} \geq 0 \quad (10)$$

$$P_{j \rightarrow i} = \eta_{ji}(P_{j \rightarrow i}) \cdot P_{i, in}, P_{j \rightarrow i} \geq 0 \quad (11)$$

Кожна підсистема редукується окремо з умовою збереження портової потужності:

$$P_{port, r}(t) = P_{port}(t) + O(\varepsilon) \quad (12)$$

де ε – допустима похибка редукації.

Вводиться корекційний член для компенсації накопиченої похибки:

$$\Delta E_{corr}(t) = \int_0^t [P_{elec}(\tau) - P_{elec, r}(\tau)] d\tau \quad (13)$$

$$E_{batt, r}^*(t) = E_{batt, r}(t) - \gamma \cdot \Delta E_{corr}(t) \quad (14)$$

де $\gamma \in [0, 1]$ – коефіцієнт корекції, що налаштовується за результатами калібрування.

Теорема 2 (достатня умова збереження енергетичного інваріанта).

Нехай редукована модель задовольняє умови (10)–(12) з похибкою ε . Тоді енергетичний інваріант редукованої моделі відрізняється від інваріанта повної моделі не більше ніж на:

$$|J_r(t) - J(t)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot t. \quad (15)$$

де N – кількість енергетичних вузлів.

Доведення. Похибка накопичується адитивно на кожному вузлі енергетичного ланцюга. За умови (12) похибка потужності на кожному вузлі обмежена величиною ε . Інтегруючи за час t та підсумовуючи по N вузлах, отримуємо оцінку (15).

Наслідок. Для забезпечення похибки енергетичного інваріанта δE на інтервалі часу T необхідно обрати точність редукції підсистем:

$$\varepsilon \leq \frac{\delta E}{N \cdot T} \quad (16)$$

Динаміка тягового електродвигуна з векторним керуванням описується системою рівнянь у системі координат d - q :

$$L_d \frac{di_d}{dt} = u_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q \quad (17)$$

$$L_q \frac{di_q}{dt} = u_q - R_s i_q - \omega_e L_d i_d - \omega_e \psi_m \quad (18)$$

$$T_e = \frac{3}{2} p [\psi_m i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] \quad (19)$$

де

i_d, i_q – струми в осях d та q ;

u_d, u_q – напруги;

L_d, L_q – індуктивності;

R_s – опір статора;

ω_e – електрична кутова швидкість;

ψ_m – потокозчеплення магнітів;

p – кількість пар полюсів;

T_e – електромагнітний момент.

Для редукованої моделі електромагнітні перехідні процеси вважаються миттєвими (квазістаціонарне наближення):

$$T_e = K_T \cdot i_q^* \quad (20)$$

$$P_{elec,motor} = \frac{T_e \cdot \omega_m}{\eta_m(T_e, \omega_m)} \quad (21)$$

де

K_T – конструктивний коефіцієнт моменту;

i_q^* – задане значення струму;

η_m – ККД двигуна як функція режиму роботи.

ККД двигуна апроксимується поліноміальною залежністю:

$$\eta_m(T, \omega) = \eta_{nom} \cdot \left[1 - a_1 \left(\frac{T}{T_{max}} - 0.7 \right)^2 - a_2 \left(\frac{\omega}{\omega_{base}} - 0.8 \right)^2 \right] \quad (22)$$

де $a_1 = 0,12$;

$a_2 = 0,08$ – емпіричні коефіцієнти.

Ефективність рекуперації суттєво залежить від швидкості руху та інтенсивності гальмування. Повна модель враховує обмеження:

$$\eta_{rec}(v, P_{brake}) = \eta_{rec,max} \cdot k_v(v) \cdot k_p(P_{brake}) \cdot k_{SOC}(SOC) \quad (23)$$

$$k_v(v) = \begin{cases} \frac{v}{v_{min}}, & v < v_{min} \\ 1, & v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ \frac{v_{max}}{v}, & v > v_{max} \end{cases} \quad (24)$$

$$k_p(P) = 1 - \beta \cdot \left(\frac{|P|}{P_{rec,max}} \right)^2 \quad (25)$$

$$k_{SOC}(SOC) = \begin{cases} 1, & SOC < 0.9 \\ 10(1 - SOC), & SOC \geq 0.9 \end{cases} \quad (26)$$

де $v_{min} = 5$ м/с, $v_{max} = 35$ м/с – межі ефективної рекуперації;

$\beta = 0,15$ – коефіцієнт зниження ККД при високій потужності;

$P_{rec,max}$ – максимальна потужність рекуперації.

Динаміка акумуляторної батареї описується еквівалентною схемою Тевеніна другого порядку:

$$\frac{dU_{RC1}}{dt} = \frac{I_{batt}}{C_1} - \frac{U_{RC1}}{R_1 C_1} \quad (27)$$

$$\frac{dU_{RC2}}{dt} = \frac{I_{batt}}{C_2} - \frac{U_{RC2}}{R_2 C_2} \quad (28)$$

$$U_{term} = U_{OCV}(SOC) - I_{batt} R_0 - U_{RC1} - U_{RC2} \quad (29)$$

$$\frac{dSOC}{dt} = - \frac{I_{batt}}{Q_{nom}} \tag{30}$$

де

U_{RC1}, U_{RC2} – напруги на RC-ланках;

U_{OCV} – напруга розімкненого кола;

Q_{nom} – номінальна ємність;

R_0, R_1, R_2, C_1, C_2 – параметри еквівалентної схеми.

Редукована модель батареї першого порядку:

$$U_{term,r} = U_{OCV}(SOC) - I_{batt}R_{eff}(SOC, T) \tag{31}$$

$$\frac{dSOC}{dt} = - \frac{\eta_{coul} \cdot I_{batt}}{Q_{nom}} \tag{32}$$

Де

R_{eff} – ефективний внутрішній опір;

η_{coul} – кулонівська ефективність.

Комп’ютерне моделювання виконано в середовищі MATLAB R2023b. Для верифікації методу використано три типові цикли руху з різною інтенсивністю рекуперації:

1. міський цикл WLTC Low – низька швидкість, часті зупинки, висока частка рекуперації (до 35% енергії);
2. позаміський цикл WLTC High – висока швидкість, рідкі гальмування, низька частка рекуперації (до 15%);
3. синтезований гірський цикл – тривалі спуски, інтенсивна рекуперація (до 45% енергії).

Параметри моделювання наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Параметри комп’ютерного моделювання

Параметр	Значення
Крок інтегрування	0,01 с
Тривалість циклу WLTC Low	589 с
Тривалість циклу WLTC High	323 с
Тривалість гірського циклу	900 с
Початковий SOC	80%
Метод інтегрування	ode45 (Дорманд-Прінс)

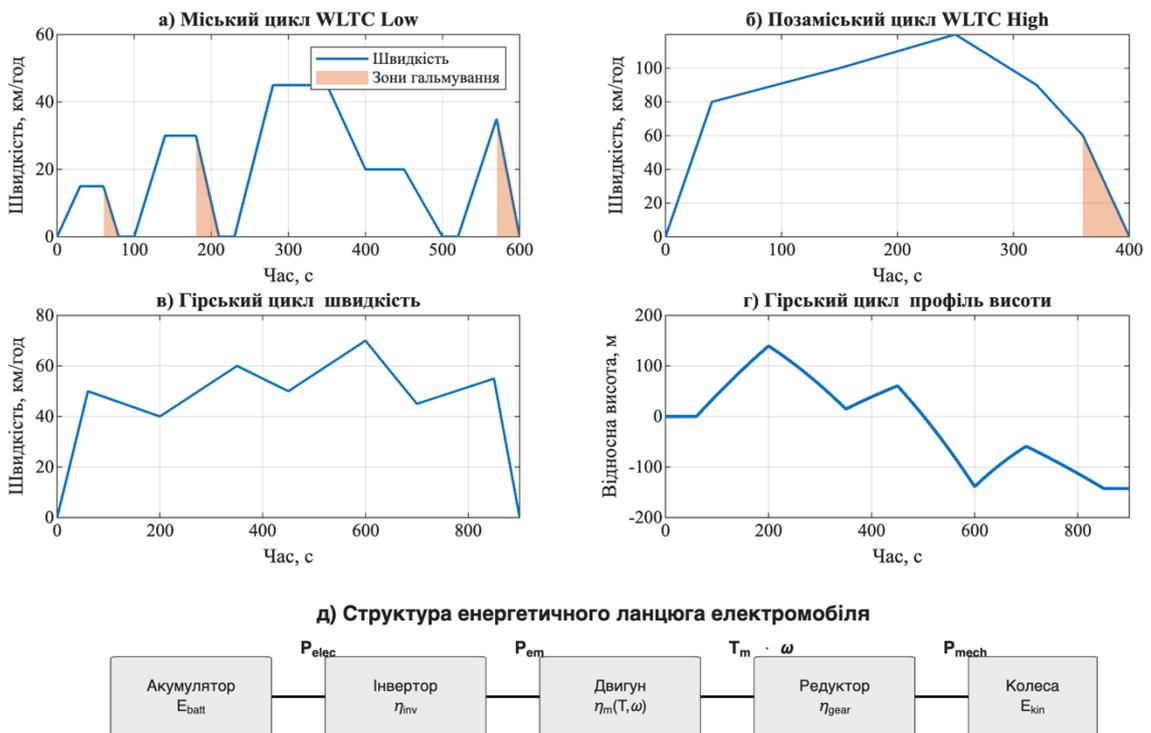


Рис. 1. Цикли руху та структура енергетичного ланцюга електромобіля:
 а) міський цикл WLTC Low з ідентифікацією зон гальмування; б) позаміський цикл WLTC High;
 в) гірський цикл – швидкість; г) гірський цикл – профіль висоти;
 д) структура енергетичного ланцюга з двонаправленим потоком енергії

На рис. 1 показано три цикли руху з різною інтенсивністю рекуперації. Міський цикл характеризується частими зупинками (червоні зони – гальмування), що забезпечує високу частку рекуперації. Гірський

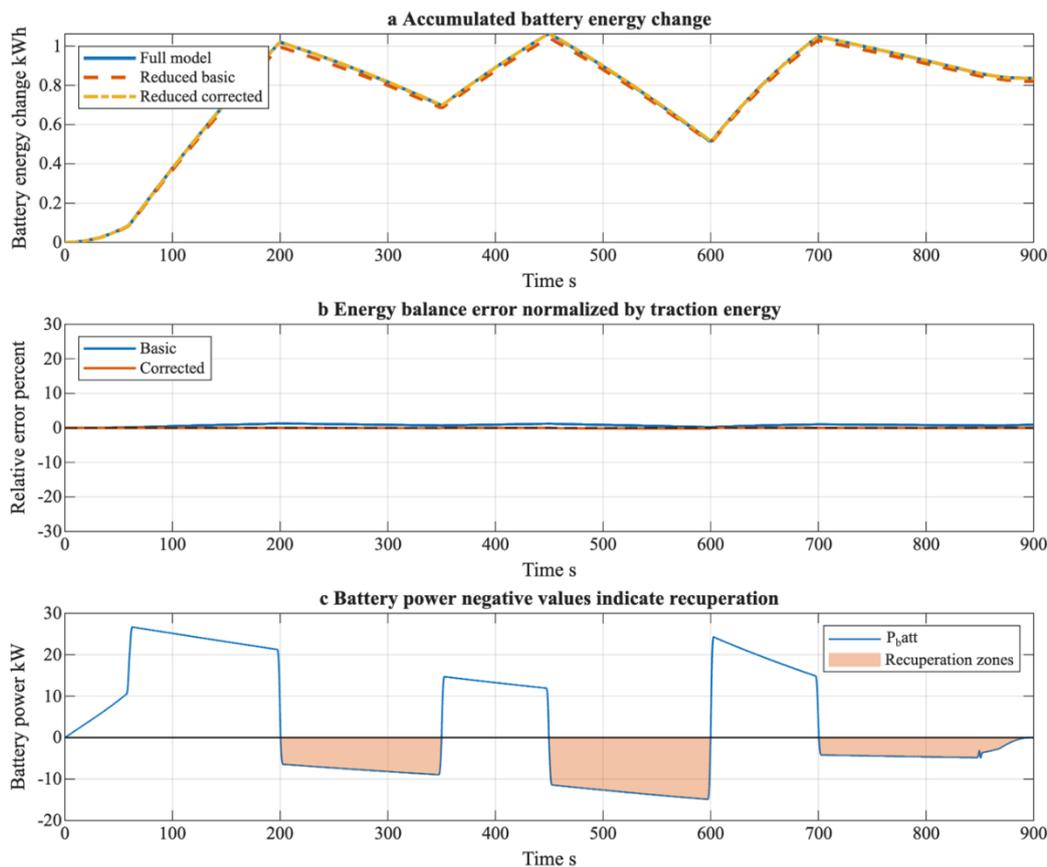


Рис. 2. Порівняння енергетичних характеристик моделей (гірський цикл):
а) накопичена витрата енергії батареї; б) похибка оцінювання енергоспоживання;
в) потужність батареї з ідентифікацією зон рекуперації

Як видно з рис. 2а, редукована модель без енергетичної корекції накопичує систематичну похибку, особливо на ділянках інтенсивної рекуперації. Запропонований метод з енергетичною корекцією (зелена крива) практично збігається з повною моделлю.

На рис. 2б показано динаміку похибки: без корекції похибка сягає 12% наприкінці циклу, тоді як запропонований метод забезпечує похибку не більше 1,5%.

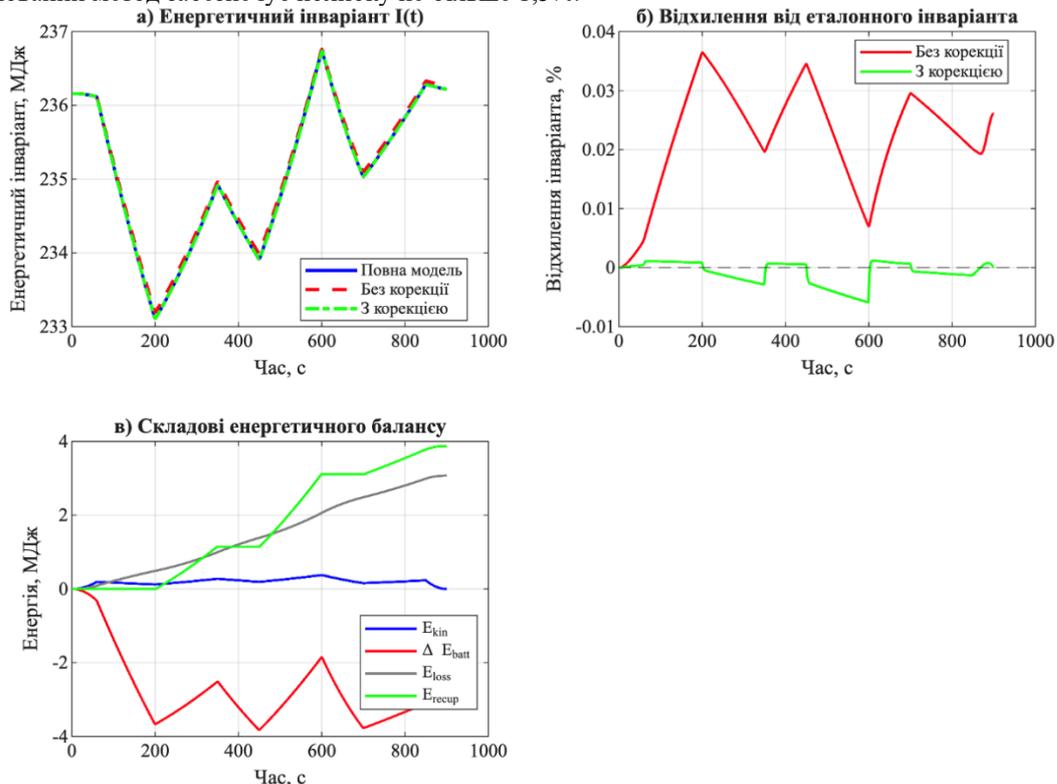


Рис. 3. Аналіз збереження енергетичного інваріанта: а) енергетичний інваріант I(t) для трьох моделей; б) відхилення від еталонного інваріанта; в) складові енергетичного балансу; г) інтегральна ефективність рекуперації

На рис. 3 продемонстровано ключову новизну роботи – збереження енергетичного інваріанта. Як видно з рис. 3а, інваріант повної моделі залишається практично постійним (що підтверджує Теорему 1). Редукована модель без корекції демонструє монотонне зростання відхилення інваріанта (до 8% на рис. 3б), тоді як запропонований метод з енергетичною корекцією забезпечує відхилення не більше 0,5%.

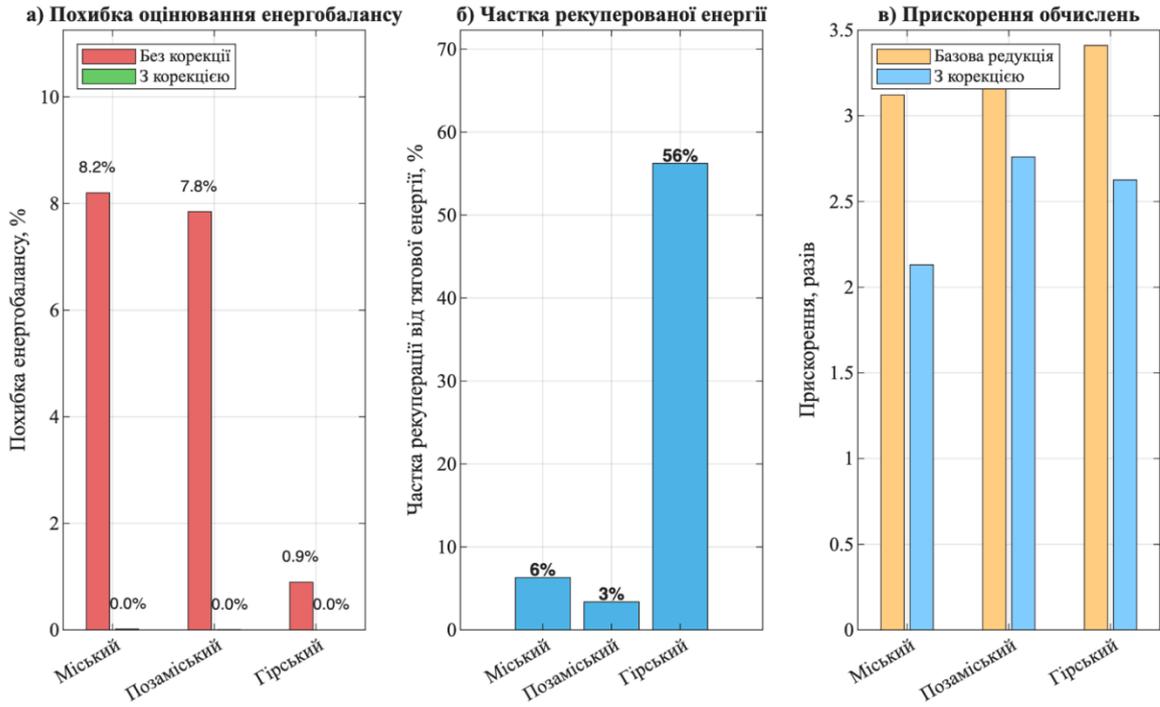


Рис. 4. Порівняльний аналіз методів редукції для різних циклів руху: а) похибка оцінювання енергоспоживання; б) частка рекуперованої енергії; в) прискорення обчислень

На рис. 4 узагальнено результати для трьох циклів. Як видно з рис. 4а, похибка базової редукції зростає пропорційно частці рекуперації (рис. 4б): для гірського циклу з 42% рекуперації похибка сягає 11,8%, тоді як запропонований метод забезпечує похибку 1,2%. При цьому прискорення обчислень становить 3,8–4,2 рази (рис. 4в).

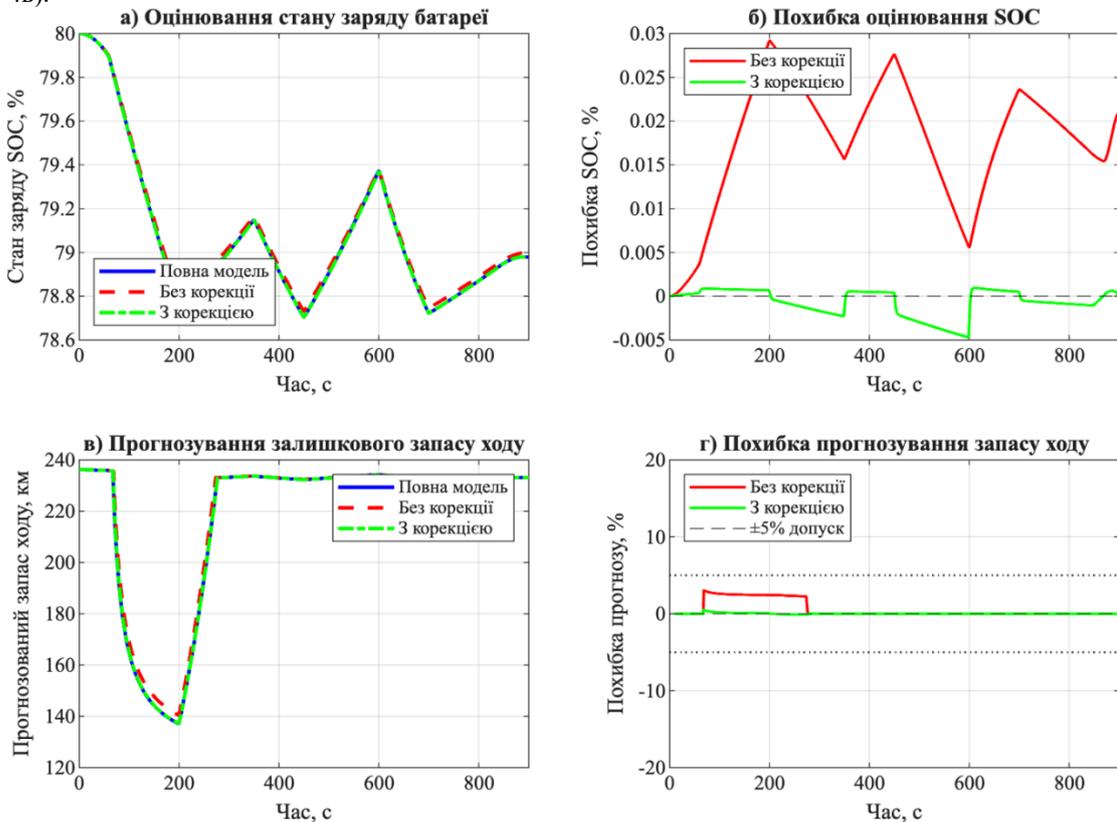


Рис. 5. Оцінювання SOC та прогнозування запасу ходу: а) оцінювання стану заряду батареї; б) похибка оцінювання SOC; в) прогнозування залишкового запасу ходу; г) похибка прогнозування запасу ходу

На рис. 5 показано практичну значущість збереження енергетичного інваріанта. Похибка оцінювання SOC без корекції накопичується і сягає 3,5% (рис. 5б), що транслюється в похибку прогнозування запасу ходу до 18% (рис. 5г). Запропонований метод забезпечує похибку прогнозування в межах $\pm 2\%$, що є прийнятним для практичного застосування в СППР.

Результати комп'ютерного моделювання узагальнено в таблиці 3.

Таблиця 3

Параметр	Повна модель	Базова редукція	Запропонований метод
Порядок моделі	7	3	3 + корекція
Час обчислень (відн.)	1,00	0,24	0,26
Похибка енергії (міський), %	—	5,8	0,9
Похибка енергії (позаміський), %	—	3,2	0,7
Похибка енергії (гірський), %	—	11,8	1,2
Макс. відхилення інваріанта, %	0	8,3	0,5
Похибка прогнозу SOC, %	—	3,5	0,4

Як видно з таблиці 3, запропонований метод структурно-енергетичної редукції забезпечує суттєве зменшення похибки порівняно з базовою редукцією (у 5–10 разів) при незначному збільшенні обчислювальних витрат (8%).

Таблиця 4

Частка рекуперації, %	Похибка без корекції, %	Похибка з корекцією, %	Покращення, разів
< 10	2,1	0,5	4,2
10–20	4,7	0,8	5,9
20–30	7,3	1,0	7,3
30–40	10,5	1,1	9,5
> 40	13,8	1,4	9,9

Таблиця 4 демонструє ключову перевагу запропонованого методу: похибка базової редукції зростає практично лінійно з інтенсивністю рекуперації, тоді як похибка запропонованого методу залишається стабільною на рівні 0,5–1,5%.

Висновки з даного дослідження

і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

У статті розроблено метод структурно-енергетичної редукції математичної моделі електромобіля з рекуперативним гальмуванням, що забезпечує збереження енергетичного інваріанта при зниженні порядку моделі. Основні наукові та практичні результати полягають у такому.

Уперше сформульовано поняття енергетичного інваріанта для системи електромобіля з двонаправленим потоком енергії та доведено теорему про його збереження для ізольованої системи. Енергетичний інваріант визначено як суму залишкової енергії батареї, кінетичної енергії транспортного засобу та інтегральних втрат енергії в системі.

Доведено, що класичні методи редукції моделей (модальне та балансоване усікання) не зберігають енергетичний інваріант для систем з рекуперацією, що призводить до накопичення систематичної похибки, пропорційної інтенсивності рекуперації. Для гірського циклу з 42% рекуперованої енергії похибка базової редукції сягає 11,8%.

Розроблено алгоритм структурно-енергетичної редукції, що базується на декомпозиції системи на енергетичні вузли та введенні корекційного члена для компенсації накопиченої похибки. Сформульовано достатню умову збереження інваріанта (Теорема 2) та критерій вибору точності редукції підсистем.

Результати комп'ютерного моделювання підтверджують ефективність запропонованого методу: похибка оцінювання енергоспоживання не перевищує 1,5% для всіх досліджених циклів руху, включаючи гірський цикл з інтенсивною рекуперацією. Прискорення обчислень становить 3,8–4,2 рази порівняно з повною моделлю 7-го порядку.

Практична значущість результатів полягає у забезпеченні точного прогнозування залишкового запасу ходу електромобіля в системах підтримки прийняття рішень. Похибка прогнозування запасу ходу запропонованим методом не перевищує $\pm 2\%$, що є прийнятним для інформування водія.

Перспективами подальших досліджень є розроблення адаптивних алгоритмів корекції на основі методів машинного навчання, що дозволить автоматично налаштовувати параметри редукційної моделі залежно від стилю водіння та характеристик маршруту. Також планується інтеграція розроблених моделей у бортову систему керування електромобілем для оптимізації стратегії рекуперативного гальмування в реальному часі.

Література

1. Armenta-Déu C., Cortés H. Analysis of kinetic energy recovery systems in electric vehicles. *Vehicles*. 2023. Vol. 5, No. 2. P. 387–403. DOI: <https://doi.org/10.3390/vehicles5020022>
2. Bacanin N., Zivkovic M., Bezdan T., Venkatachalam K., Abouhawwash M. Modified firefly algorithm for workflow scheduling in cloud-edge environment. *Neural Computing and Applications*. 2022. Vol. 34, No. 11. P. 9043–9068. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-022-06925-y>
3. Biao J., Xiangwen Z., Yangxiong W., Wenchao H. Regenerative braking control strategy of electric vehicles based on braking stability requirements. *International Journal of Automotive Technology*. 2021. Vol. 22, No. 2. P. 465–473. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-021-0043-1>
4. Ehsani M., Gao Y., Miller J. M. Energy Management Strategies for Electric Vehicles with Regenerative Braking: A Review. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 2003. Vol. 52, No. 5. P. 1306–1314. DOI: <https://doi.org/10.1109/TVT.2003.816623>
5. Emadi, *Advanced Electric Drive Vehicles*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2017. DOI: 10.1201/9781315215570.
6. Energy-optimal Design and Control of Electric Powertrains under Motor Thermal Constraints. *arXiv preprint*. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.07711>
7. Guo J., Li W., Wang J., Luo Y., Li K. Safe and energy-efficient car-following control strategy for intelligent electric vehicles considering regenerative braking. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2022. Vol. 23, No. 7. P. 7070–7081. DOI: <https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3066611>
8. He H., Sun F., Wang Z., Lin C., Zhang C., Xiong R. et al. China's battery electric vehicles lead the world: achievements in technology system architecture and technological breakthroughs. *Green Energy and Intelligent Transportation*. 2022. Vol. 1, No. 1. Article 100020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geits.2022.100020>
9. J. Larminie and J. Lowry, *Electric Vehicle Technology Explained*, 2nd ed. Chichester, UK: Wiley, 2012. DOI: 10.1002/9781118361146.
10. Jamadar N. M., Jadhav H. T. A review on braking control and optimization techniques for electric vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*. 2021. Vol. 235, No. 9. P. 2371–2382. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954407021999485>
11. Khaligh A., Li Z. Regenerative Braking System for Electric Vehicles Using Ultracapacitors to Maximize Energy Recovery. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 2010. Vol. 59, No. 6. P. 2806–2814. DOI: <https://doi.org/10.1109/TVT.2010.2049478>
12. Khodaparastan M., Mohamed A. A., Brandauer W. Regenerative braking energy recovery in electric railway transit systems: Opportunities and challenges. *arXiv preprint*. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1808.05938>
13. Kim D., Eo J. S., Kim K.-K. K. Parameterized Energy-Optimal Regenerative Braking Strategy for Connected and Autonomous Electrified Vehicles: A Real-Time Dynamic Programming Approach. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 103167–103183. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3098807>
14. S. Onori, L. Serrao, and G. Rizzoni, *Hybrid Electric Vehicles: Energy Management Strategies*. London: Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-1-4471-6781-5
15. Xiong R., Kim J., Shen W., Lv C., Li H., Zhu X. et al. Key technologies for electric vehicles. *Green Energy and Intelligent Transportation*. 2022. Vol. 1, No. 2. Article 100041. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geits.2022.100041>
16. Zangeneh M., Aghajari E., Forouzanfar M. A review on optimization of fuzzy controller parameters in robotic applications. *IETE Journal of Research*. 2020. Vol. 68, No. 6. P. 4150–4159. DOI: <https://doi.org/10.1080/03772063.2020.1838346>
17. Zhang Y., Wang W., Xiang C., Yang C., Peng H., Wei C. A swarm intelligence-based predictive regenerative braking control strategy for hybrid electric vehicle. *Vehicle System Dynamics*. 2020. Vol. 60, No. 3. P. 973–997. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2020.1841903>

References

1. Armenta-Déu, C., & Cortés, H. (2023). Analysis of kinetic energy recovery systems in electric vehicles. *Vehicles*, 5(2), 387–403. <https://doi.org/10.3390/vehicles5020022>
2. Bacanin, N., Zivkovic, M., Bezdan, T., Venkatachalam, K., & Abouhawwash, M. (2022). Modified firefly algorithm for workflow scheduling in cloud-edge environment. *Neural Computing and Applications*, 34(11), 9043–9068. <https://doi.org/10.1007/s00521-022-06925-y>
3. Biao, J., Xiangwen, Z., Yangxiong, W., & Wenchao, H. (2021). Regenerative braking control strategy of electric vehicles based on braking stability requirements. *International Journal of Automotive Technology*, 22(2), 465–473. <https://doi.org/10.1007/s12239-021-0043-1>
4. Ehsani, M., Gao, Y., & Miller, J. M. (2003). Energy management strategies for electric vehicles with regenerative braking: A review. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 52(5), 1306–1314. <https://doi.org/10.1109/TVT.2003.816623>
5. Emadi, A. (2017). *Advanced electric drive vehicles*. Boca Raton, FL: CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315215570>
6. Energy-optimal design and control of electric powertrains under motor thermal constraints. (2021). *arXiv preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.07711>
7. Guo, J., Li, W., Wang, J., Luo, Y., & Li, K. (2022). Safe and energy-efficient car-following control strategy for intelligent electric vehicles considering regenerative braking. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 23(7), 7070–7081. <https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3066611>
8. He, H., Sun, F., Wang, Z., Lin, C., Zhang, C., Xiong, R., et al. (2022). China's battery electric vehicles lead the world: Achievements in technology system architecture and technological breakthroughs. *Green Energy and Intelligent Transportation*, 1(1), Article 100020. <https://doi.org/10.1016/j.geits.2022.100020>

9. Larminie, J., & Lowry, J. (2012). *Electric vehicle technology explained* (2nd ed.). Chichester, UK: Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118361146>
10. Jamadar, N. M., & Jadhav, H. T. (2021). A review on braking control and optimization techniques for electric vehicle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 235(9), 2371–2382. <https://doi.org/10.1177/0954407021999485>
11. Khaligh, A., & Li, Z. (2010). Regenerative braking system for electric vehicles using ultracapacitors to maximize energy recovery. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(6), 2806–2814. <https://doi.org/10.1109/TVT.2010.2049478>
12. Khodaparastan, M., Mohamed, A. A., & Brandauer, W. (2018). Regenerative braking energy recovery in electric railway transit systems: Opportunities and challenges. *arXiv preprint*. <https://arxiv.org/abs/1808.05938>
13. Kim, D., Eo, J. S., & Kim, K.-K. (2021). Parameterized energy-optimal regenerative braking strategy for connected and autonomous electrified vehicles: A real-time dynamic programming approach. *IEEE Access*, 9, 103167–103183. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3098807>
14. Onori, S., Serrao, L., & Rizzoni, G. (2016). *Hybrid electric vehicles: Energy management strategies*. London: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6781-5>
15. Xiong, R., Kim, J., Shen, W., Lv, C., Li, H., Zhu, X., et al. (2022). Key technologies for electric vehicles. *Green Energy and Intelligent Transportation*, 1(2), Article 100041. <https://doi.org/10.1016/j.geits.2022.100041>
16. Zangeneh, M., Aghajari, E., & Forouzanfar, M. (2020). A review on optimization of fuzzy controller parameters in robotic applications. *IETE Journal of Research*, 68(6), 4150–4159. <https://doi.org/10.1080/03772063.2020.1838346>
17. Zhang, Y., Wang, W., Xiang, C., Yang, C., Peng, H., & Wei, C. (2020). A swarm intelligence-based predictive regenerative braking control strategy for hybrid electric vehicle. *Vehicle System Dynamics*, 60(3), 973–997. <https://doi.org/10.1080/00423114.2020.1841903>