

DOI 10.31891/2307-5732-2024-335-3-40  
УДК 637.5.02

ЧЕСАНОВСЬКИЙ ІВАН

Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького  
<https://orcid.org/0000-0002-8161-3276>  
e-mail: [chesanov.i@gmail.com](mailto:chesanov.i@gmail.com)

КАРПОВА ЛЕСЯ

Хмельницький національний університет  
<https://orcid.org/0000-0001-5015-2107>  
e-mail: [rtlesya@gmail.com](mailto:rtlesya@gmail.com)

ТАБЕНСЬКИЙ СЕРГІЙ

Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького  
<https://orcid.org/0000-0001-8771-5671>  
e-mail: [tlkkaf16@gmail.com](mailto:tlkkaf16@gmail.com)

ПЛОЩИК АННА

Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького  
<https://orcid.org/0000-0002-7034-1930>  
e-mail: [ploschyk.a@gmail.com](mailto:ploschyk.a@gmail.com)

## ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОЇ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ ТА СМУГОВИХ СИГНАЛІВ В КІБЕРФІЗИЧНИХ СИСТЕМАХ З АНАЛОГОВИМИ ІНТЕРФЕЙСАМИ

*В статті розглядається проблема вибору оптимальної частоти дискретизації в задачах цифрової обробки сигналів з обмеженою смугою частот. Досліджено і систематизовано різні підходи особливо в частині дискретизації смугових сигналів, сформовано практичні рекомендації для вирішення даної проблеми враховуючи такі фактори, як надмірність вибірки, співвідношення сигнал/шум, стабільність вузлів дискретизатора тощо. Запропоновано різні підходи та критерії оптимальності процесу дискретизації, що забезпечують компактне та точне представлення сигналу.*

*Ключові слова: дискретизація сигналів, низькочастотні сигнали, смугові сигнали, кіберфізичні системи, аналогові інтерфейси, сигнал/шум, SNR, надмірність вибірки, стабільність дискретизатора.*

CHESANOVSKY IVAN

National Academy of the State Border Service of Ukraine named after Bohdan Khmelnytskyi  
KARPOVA LESYA

Khmelnytsky National University

TABENSKY SERHIJ

National Academy of the State Border Service of Ukraine named after Bohdan Khmelnytskyi  
PLOSCHIK ANNA

National Academy of the State Border Service of Ukraine named after Bohdan Khmelnytskyi

## THE PROBLEM OF OPTIMAL DISCRETIZATION OF LOW-FREQUENCY AND BAND SIGNALS IN CYBERPHYSICAL SYSTEMS WITH ANALOG INTERFACES

*The article delves into the crucial problem of selecting the optimal sampling frequency in digital signal processing, particularly focusing on signals with limited bandwidth. While traditional methods rooted in the Nyquist-Shannon sampling theorem offer clear guidance for low-frequency signals, they overlook the nuances of band-limited signals. Consequently, in such scenarios, selecting the sampling frequency requires ensuring sufficient frequency to prevent distortions while maximizing the signal-to-noise ratio. The research explores various approaches to address this issue and formulates practical recommendations and criteria for sampling frequency selection. Notably, it highlights the significance of oversampling, signal-to-noise ratio, and sampler stability. Moreover, the paper illustrates how various factors influence the sampling process. For instance, it demonstrates that increasing the sampling frequency may lead to a reduction in the signal-to-noise ratio due to noise uniformly distributed across the frequency spectrum. These insights underscore the necessity of adopting a holistic approach to selecting the optimal sampling frequency, which considers both signal and noise characteristics. Additionally, the article outlines avenues for further research and the development of practical methodologies for sampling frequency selection across diverse fields utilizing digital processing of analog signals. It emphasizes the need to generalize research findings and devise universal approaches for optimal sampling frequency selection in applied tasks. Such an approach is crucial for ensuring a compact and accurate representation of the signal in digital form, which is essential for many modern systems and technologies.*

*Keywords: signal sampling, low-frequency signals, bandpass signals, cyber-physical systems, analog interfaces, signal-to-noise, SNR, sampling redundancy, sampler stability.*

### Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

У сучасному світі цифрових технологій, зокрема в галузі цифрової обробки сигналів (ЦОС), проблема дискретизації відіграє ключову роль. Основним завданням дискретизації є перетворення безперервного сигналу в дискретний таким чином, щоб максимально точно зберегти всю необхідну інформацію. Однак, залежно від характеристик сигналу, зокрема його смугової природи, виникають певні унікальні виклики. Традиційні методи, що ґрунтуються на теоремі відліків Найквіста-Шеннона, дають чіткі рекомендації для низькочастотних сигналів, але не дають таких у випадку смугових сигналів. Неоднозначність вибору частоти дискретизації для смугових сигналів полягає у необхідності забезпечення достатньої частоти

дискретизації, для уникнення спотворень і необхідності максимізувати відношення сигнал/шум. В статті розглядаються різні підходи до вирішення цієї проблеми, а також узагальнено практичні рекомендації і критерії оптимальності для обрання частоти дискретизації.

#### Аналіз досліджень та публікацій

Тривалий час, питання вибору частоти дискретизації в задачах цифрової обробки сигналів (ЦОС) відноситься до вирішених, оскільки, цілий ряд теорем дають вичерпну відповідь на те, якою є мінімальна необхідна частота дискретизації для широкого спектру задач ЦОС. Дещо по іншому формулюється задача вибору частоти дискретизації для смугових сигналів, тобто, сигналів у яких виконується умова (рис. 1):

$$f_{\min} / \Delta f \geq 1,$$

де  $f_{\min}$  – мінімальна частота спектру сигналу;  $\Delta f$  – ширина спектру сигналу.

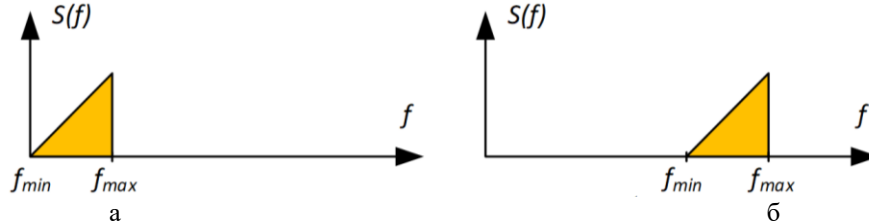


Рис. 1. Частотний спектр низькочастотного (а) та смугового (б) сигналу

Враховуючи неоднозначність вибору частоти дискретизації для такого типу сигналів існують різні підходи, проте, універсального на кожен випадок не існує. Є широкий спектр робіт [1, 2], в яких досліджено питання оптимального вибору частоти дискретизації для смугових сигналів, при чому роботи [2] і [3], окрім теоретичного обґрунтування містять ряд практичних рекомендацій, щодо вибору частоти дискретизації. Широко вивчено питання вибору частоти дискретизації смугових сигналів з позиції забезпечення максимального відношення сигнал/шум, або максимального усунення впливу нестабільності окремих елементів аналогово-цифрового перетворювача (АЦП) для деяких типових випадків ймовірнісних характеристик шумів. В загальному випадку, це не вичерпний перелік всіх факторів, що впливають на вибір частоти дискретизації, тому, доречно окреслити основні критерії оптимальності процесу дискретизації відомі на даний час:

1. Частотний критерій, за яким інтервали між відліками вибираються виходячи з ширини спектра повідомлення, що дискретизується. Це основний критерій вибору частоти дискретизації для низькочастотних сигналів та часто застосовується для смугових сигналів при визначенні мінімальної частоти дискретизації.

2. Кореляційний критерій, за яким інтервал дискретизації вибирається по часу кореляції сигналу, що піддається дискретизації. Даний критерій застосовується тільки для стаціонарних сигналів як для низькочастотних, так і смугових.

3. Квантовий критерій, який часто застосовується для детермінованих сигналів. Частота дискретизації, в цьому випадку, обирається з урахуванням відношення рівня квантування до крутизни функції (детермінованого сигналу), що піддається дискретизації. Даний критерій орієнтований на низькочастотні сигнали, проте, як буде показано далі може бути ефективно застосований і для смугових сигналів при виборі частоти дискретизації в межах обраного діапазону.

На практиці, вибір частоти дискретизації відбувається в декілька етапів після оцінки характеристик сигналу застосовується частотний критерій (критерій Найквіста): частота дискретизації має бути принаймні вдвічі більшою за найвищу частотну складову, присутню в сигналі. Такий вибір гарантує, що сигнал може бути точно реконструйований з його вибіркового значень. Проте, враховуючи низку шкідливих чинників, присутніх в процесі дискретизації, частоту дискретизації обирають дещо вищою. Окрім надлишковості даних, це має і позитивний ефект, оскільки підвищення частоти дискретизації призводить до підвищення відношення сигнал/шум (SNR), проте, не завжди. В багатьох випадках ефект може бути зворотнім, за специфічних шумових характеристик системи. Наприклад, сигнал має обмежену смугу пропускання, а шум - рівномірно розподілений по всьому частотному діапазоні. Підвищення частоти дискретизації призводить до збільшення кількості відліків сигналу на одиницю часу. Шум також дискретизується з тією ж частотою, що й сигнал. Оскільки шум рівномірно розподілений по всьому частотному діапазоні, його амплітуда в кожному відліку буде меншою, ніж при більш низькій частоті дискретизації. При обчисленні SNR (співвідношення сигнал/шум) використовується середнє значення сигналу та шуму. Збільшення кількості відліків (при фіксованій енергії сигналу) призведе до зменшення середнього значення сигналу. Оскільки шум залишається незмінним, SNR зменшується. При нерівномірному розподілі шуму, оптимальний вибір частоти дискретизації має це враховувати.

Даний приклад показує, що для оптимізації SNR в процесі дискретизації частотного критерію недостатньо і необхідно керуватись іншим, що демонструє неоднозначність самого процесу дискретизації і окреслює суть проблеми. Ще більш складним випадком є дискретизація смугових сигналів, оскільки вибір частоти дискретизації здійснюється не тільки за шириною спектру сигналу а ще і в межах декількох діапазонів.

В даній роботі пропонується узагальнення результатів дослідження в даному напрямку і спроба формулювання однозначних практичних підходів вибору частоти дискретизації сигналів в прикладних задачах різних галузей де передбачається цифрова обробка аналогових сигналів. В роботі досліджено та обґрунтовано основні проблеми дискретизації вузькосмугових сигналів, та сформовано загальний підхід, що забезпечує компактне (з позиції об'єму вибірки) і коректне (з позиції точності) відтворення інформації (форми або спектру) що міститься в сигналі при дискретизації.

Періодична дискретизація, за визначенням – це процес представлення безперервного сигналу послідовністю дискретних (миттєвих) значень. В практичних задачах, основою для визначення базового параметру процесу дискретизації – частоти дискретизації  $f_\delta$  є теорема Найквіста-Шеннона, в якій доведено, що для однозначного представлення неперервної функції  $s(t)$  з обмеженим  $f_{\max}$  спектром достатньо її миттєвих значень взятих із частотою  $f_\delta \geq 2f_{\max}$ , тобто

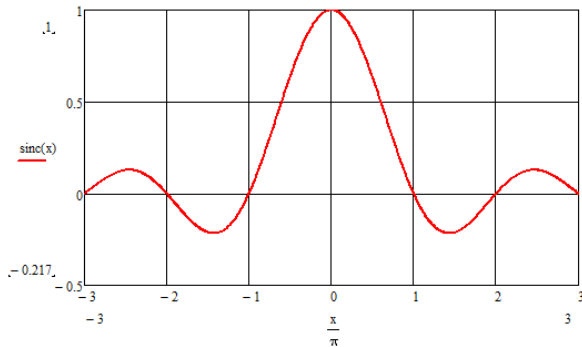


Рис. 2. Вигляд функції sinc(x)

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_\delta) F_k(f_{\max}), \quad (1)$$

де  $T_\delta = 1/f_\delta \leq 1/2f_{\max}$  – період дискретизації; – функціонал, що забезпечує відтворення неперервної функції  $s(t)$  за її миттєвими значеннями  $s(kT_\delta)$ .

Форма функціонала  $F[.]$  може бути різною і визначається типом задачі, що розв'язується, проте для випадку  $T_\delta = 1/2f_{\max}$  він має оптимальну форму (рис. 2)

$$F_k(f_{\max}) = \text{sinc}(2\pi f_{\max} t - \pi k), \quad (2)$$

де  $\text{sinc}(x) = \sin/x$ .

Саме при такому періоді дискретизації і формі  $F[.]$  забезпечується повна статистична незалежність окремих відліків, оскільки  $\text{sinc}(2\pi f_{\max} t - \pi k) = 0$  при всіх значеннях  $t = mT_\delta$ ,  $m \in Z$  крім  $m = k$  і як наслідок максимальну ентропію відліків та мінімальний об'єм дискретної вибірки [1]. Функцію (1) застосовують в іншій формі, якщо  $s(t)$  містить постійну складову  $S_0$ .

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s(kT_\delta) - S_0) F_k(f_{\max}), \quad (3)$$

Розглянемо модель неперервного, полігармонійного сигналу, що містить  $M$  складових з частотами, не більше  $f_{\max}$ :

$$s(t) = \sum_{i=0}^M S_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i), \quad (4)$$

де  $S_i, f_i, \phi_i$  – випадкові значення амплітуд, частот і початкових фаз гармонійних складових, при цьому  $S \in [0..1]$ ,  $f \in [0..f_{\max}]$ ,  $\phi \in [-\pi.. \pi]$ . Відповідно (1) і (2), функція (4) може бути повністю визначена миттєвими значеннями, взятими з періодом  $T_\delta = 1/2f_{\max}$  (рис. 3).

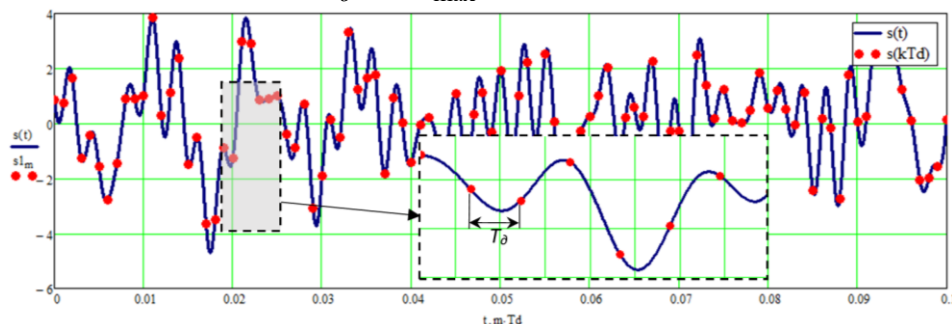


Рис. 3. Форма  $s(t)$  та періодичної вибірки  $s(kT_\delta)$

Частотний спектр  $s(t)$  представлено на рис. 4.

Порівняльна оцінка приведених на рис. 3 спектрів демонструє, що вони займають однакову смугу, містять однакову постійну складову і є практично ідентичними за частотним складом (рис. 4). Це підтверджує допущення про те, що для повної реконструкції сигналу достатньо його дискретної вибірки з періодом  $T_\delta = 1/2f_{\max}$ .

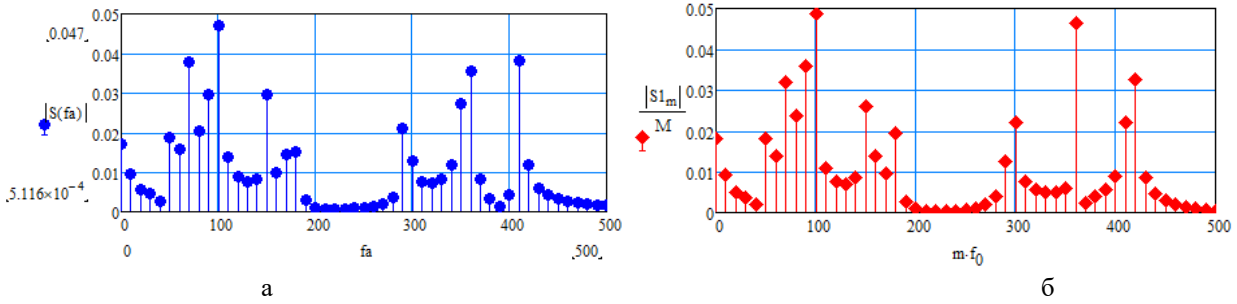


Рис. 4. Частотні спектри сигналу: а) неперервного; б) дискретизованого

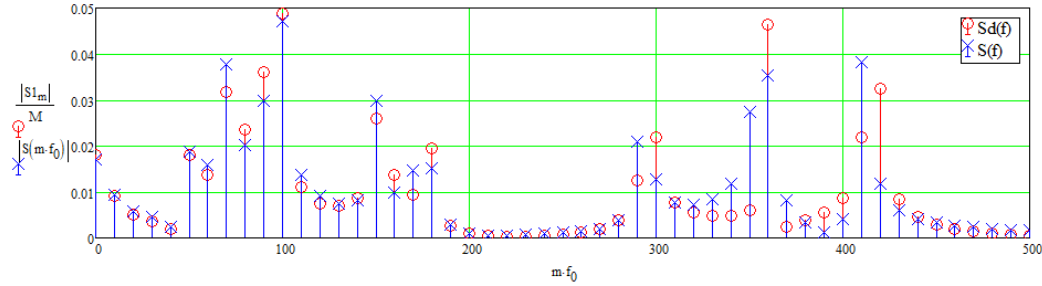


Рис. 5. Порівняльна оцінка спектрів сигналу S(f) та його дискретної вибірки Sd(f)

Процес і точність відтворення сигналу  $s(t)$  за дискретною вибіркою його миттєвих значень з періодом  $T_D = 1/2f_{max}$  і застосуванням (1) приведено на рис. 6 (відновлений сигнал на рис. 6, б додатково зміщений вгору для наочності).

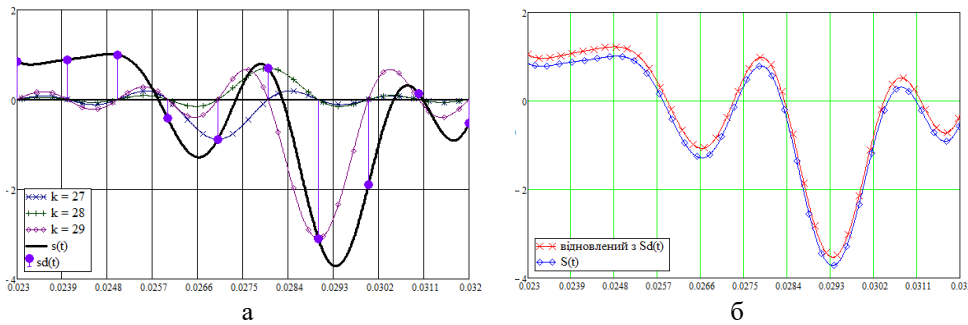


Рис. 6. Процес відновлення сигналу (а) і точність відновлення сигналу (б)

Розглянутий приклад сигналу на практиці зустрічається не часто, оскільки реальні сигнали завжди мають обмежену тривалість, а отже, містять частоти вище  $f_{max}$  або займають смугу частот з  $f_{min} \neq 0$  і тому задача дискретизації безперервної функції, в дійсності, є значно складнішою.

Розглянемо ще один випадок – вузькосмуговий сигнал  $s(t)$  зміщений на  $f_0$  по осі частот (рис. 7), що відповідає простому перетворенню частот на величину  $f_0 = 4f_{max}$ .

$$s(t) = \sum_{i=0}^M S_i \sin(2\pi(f_i + f_0)t + \varphi_i). \tag{5}$$

Порівнюючи процес дискретизації до (рис. 6) і після зміщення частоти (рис. 7), можна прийти висновку, що за сталої частоти дискретизації, яка визначається максимальною частотою сигналу (у випадку  $f_{min} = 0$ ), або шириною спектру сигналу (у випадку  $f_{min} \neq 0$ ) незалежно від частотного зміщення спектру сигналу по осі частот результат буде однаковий (рис. 8) (на рисунку до графіків відновлених сигналів додано постійну складову для наочності). Однак, цей висновок є хибним. Якщо збільшити частоту дискретизації, то це жодним чином не вплине на точність відновлення сигналу у випадку  $f_{min} = 0$  (лише утвориться надмірність вибірки), проте, значно спотвориться результат у випадку  $f_{min} \neq 0$  (рис. 9).

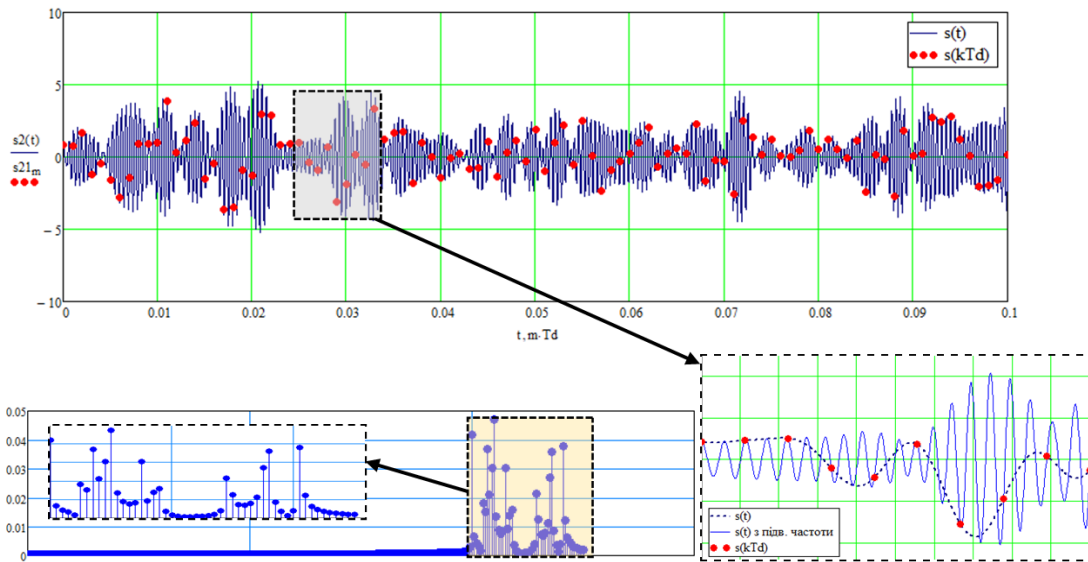


Рис. 7. Дискретизація зміщеного на  $f_0$  по осі частот  $s(t)$  частотою дискретизації  $2\Omega_{\max}$

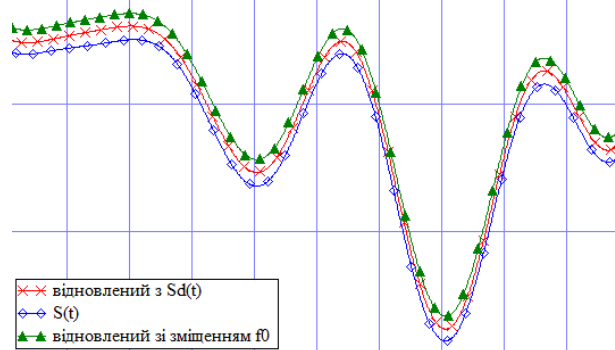


Рис. 8. Відновлення сигналу за дискретною вибіркою

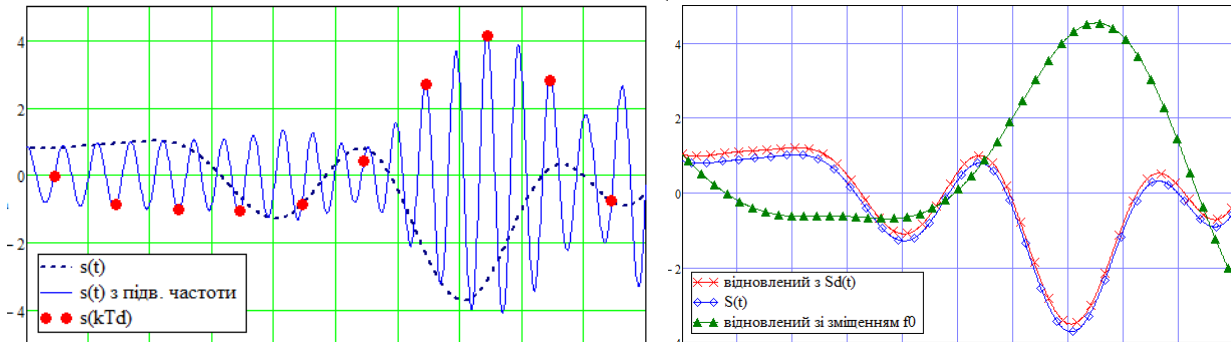


Рис. 9. Дискретизація сигналу зі збільшеною частотою вибірки

Причиною цьому, є ефект розмноження спектру при дискретизації, який детально описаний в [3] і широко використовується при смуговій дискретизації, описаній в [2]. В роботі [5] досліджено вплив ефекту розмноження спектру при інтерполяції, децимації і вузькосмугової фільтрації дискретної вибірки.

Слід зазначити, що розглядаючи частоту  $f_{\min} + \Delta f$  як нову частоту  $f_{\max}$  можна добитись точного відтворення сигналу після дискретизації за допомогою (1), вважаючи при цьому що сигнал займає смугу частот від  $f'_{\min} = 0$  до  $f_{\max} = f_{\min} + \Delta f$ . Проте, це не раціональний підхід, оскільки частота дискретизації значно перевищує  $2f_{\max}$  і хоча сигнал можна точно відтворити, дискретна вибірка буде надмірною. Як було показано на рис. 8, процес дискретизації можна здійснити більш ефективно (досягнути статистичної незалежності відліків і зменшити об'єм вибірки) за рахунок зменшення частоти дискретизації практично до  $2f_{\max}$ . Хоча, даний підхід є давно відомим (смугова дискретизація [3] або субдискретизація [4]), вибір оптимальної частоти дискретизації в практичних задачах завжди є неоднозначним, а тому вимагає вироблення певного алгоритму, що ґрунтується на інтуїтивно зрозумілих моделях та звужує неоднозначність вибору до прийнятних меж.

Основою формування єдиного підходу оптимального вибору частоти дискретизації смугових сигналів є інтерполяційна формула запропонована в [1] і уточнена в [2]:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ s\left(\frac{n}{\Delta f}\right) F\left[t - \frac{n}{\Delta f}\right] + s\left(\frac{n}{\Delta f} + c\right) F\left[\frac{n}{\Delta f} + c - t\right] \right] \tag{6}$$

де функціонал  $F[..]$  має вигляд

$$F[x] = \frac{\cos(2\pi(f_{\min} + \Delta f)x - (l+1)\pi\Delta f\tau) - (2\pi(l\Delta f - f_{\min})x - (l+1)\pi\Delta f\tau)}{2\pi\Delta f x \sin((l+1)\pi\Delta f\tau)} + \frac{\cos(2\pi(l\Delta f - f_{\min})x - l\pi\Delta f\tau) - \cos(2\pi f_{\min}x - l\pi\Delta f\tau)}{2\pi\Delta f x \sin(l\pi\Delta f\tau)} \tag{7}$$

коефіцієнти  $l$  і  $\tau$  – визначаються з наступних умов. Коефіцієнт  $\tau$  має розмірність часу і визначається з наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} (l+1)\Delta f\tau &\neq k, \quad k \in Z \\ l\Delta f\tau &\neq k, \quad k \in Z \end{aligned} \tag{8}$$

Коефіцієнт  $l$  – ціле число, в межах  $2f_{\min} / \Delta f \leq l < 2f_{\min} / \Delta f + 1$ .

Якщо вибір коефіцієнта  $l$  може бути зроблений однозначно виходячи з конкретних умов (швидкодія доступної елементної бази, місткість пам'яті, тощо), то вибір значення  $\tau$  здійснюється з масиву доступних діапазонів значень і завжди є неоднозначним.

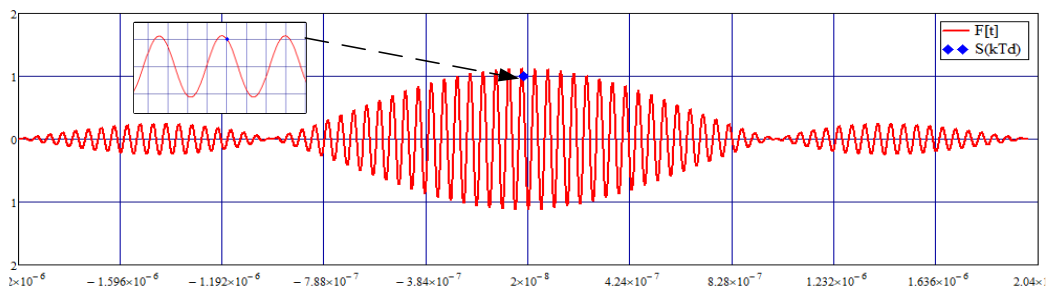


Рис. 10. Функція  $F[t]$  для фіксованих значень  $l$  і  $\tau$

Ключовим етапом застосування формули (6), є вибір коефіцієнтів  $l$  і  $\tau$ , які мають взаємно залежні діапазони допустимих значень для різних співвідношень  $f_{\min} / \Delta f$ . Яскравою ілюстрацією цього є рис. 11 [2], на якому зображено графік залежності мінімальної частоти дискретизації від співвідношення  $f_{\max} / \Delta f$ . Фактично, мінімальною частотою дискретизації, при кратних співвідношеннях  $f_{\max} / \Delta f$  (або  $f_{\min} / \Delta f$ ), є частота  $2\Delta f$  при цьому  $l \in Z$   $\tau = 1 / \Delta f$  ( $Z$  – множина цілих чисел) і вираз (6) стає еквівалентним виразу (1), а (7) перетворюється в (2).

Поряд із обмеженнями на мінімальну частоту дискретизації існують обмеження і на максимальну частоту, що залежать від співвідношення  $f_{\min} / \Delta f$  (рис. 12).

Приведені на рис. 12 діапазони дозволених значень частоти дискретизації забезпечують мінімальну надлишковість дискретної вибірки і для (6) і (7) відповідають випадку  $2f_{\min} / \Delta f \leq l < 2f_{\min} / \Delta f + 1$ , тобто максимальному зниженню частоти дискретизації. При цьому, обмеження мінімальної і максимальної частоти дискретизації в діапазоні допустимих значень обумовлюються обмеженнями (8) на значення  $\tau$ .

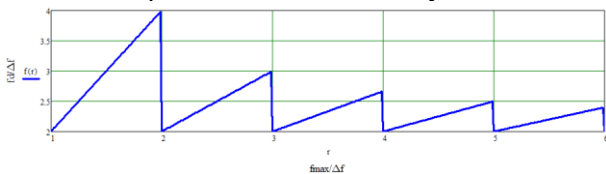


Рис. 11. Нормована мінімальна частота дискретизації смугового сигналу

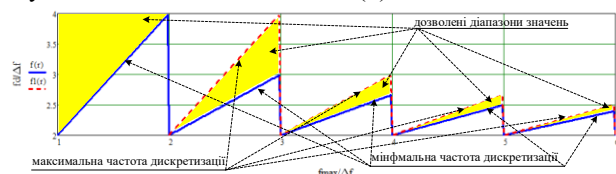


Рис. 12. Діапазони дозволених значень частоти дискретизації

Геометрична демонстрація оптимальності вибору частоти дискретизації смугових сигналів приведена на рис. 13.

Як видно з рисунку 13, оптимальному (за об'ємом вибірки) значенню частоти дискретизації відповідають значення цілочисельного співвідношення між максимальною частотою і шириною спектру сигналу, незалежно від того сигнал є низькочастотним, чи смуговим. Для низькочастотного сигналу оптимальне співвідношення дорівнює 2, а для смугових сигналів таких співвідношень багато (8). Зважаючи на те, що реальні сигнали мають безкінечний частотний спектр, а реальні фільтри, що обмежують спектр сигналу для запобігання аліасингу мають недосконалі амплітудно-частотні характеристики (АЧХ), вибір частоти дискретизації на практиці роблять з певним запасом в дозволених діапазонах (рис. 14).

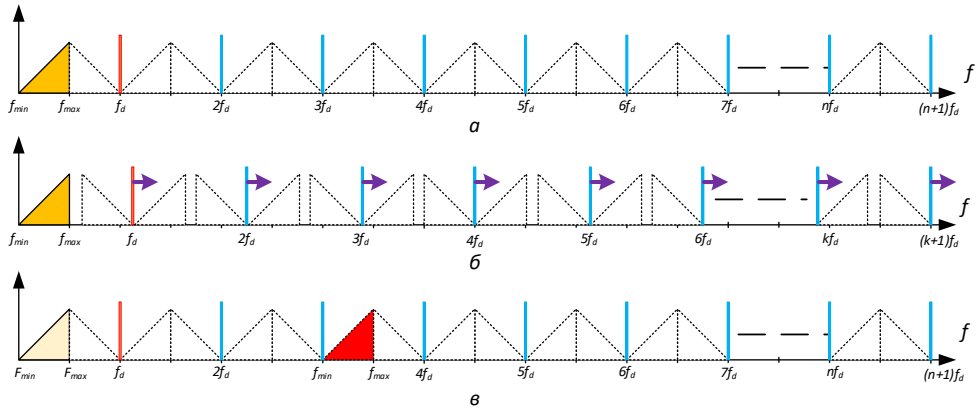


Рис. 13. Дискретизація смугового сигналу: а) оптимальна низькочастотна; б) неоптимальна (надлишкова вибірка) низькочастотного сигналу; в) оптимальна вузькосмугового сигналу

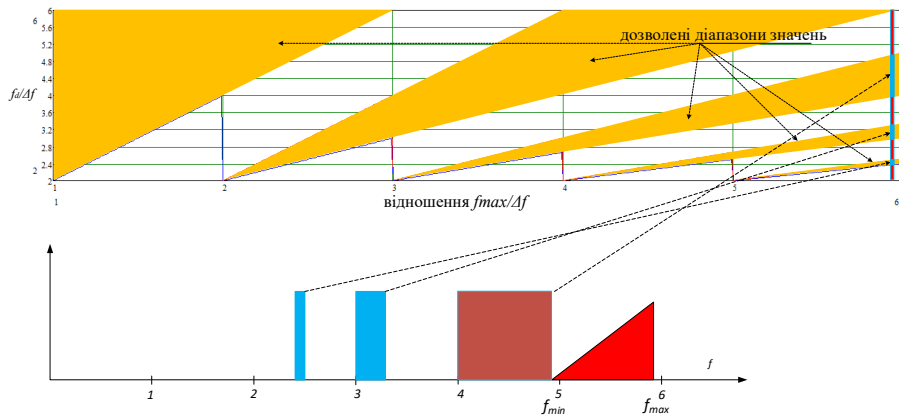


Рис. 14. Дозволені діапазони значень частоти дискретизації

З рис. 14 проглядається чітка суперечність між намаганням мінімізації об'єму вибірки і підвищенням вимог до якості вузлів схеми дискретизації. Так, зі збільшенням відношення  $f_{max} / \Delta f$  кількість дозволених діапазонів дорівнює 1, що відкриває потенційні можливості кратного зниження частоти дискретизації, але ширина кожного інтервалу зі зростанням  $l$  звужується, що підвищує вимоги до елементної бази.

Вибір частоти дискретизації в межах «дозволених» діапазонів можна інтерпретувати у вигляді графіків зміни функції (7) ряду (6) для фіксованого відліку модулюючої низькочастотної функції (4) (рис. 10). Загальний підхід вибору частоти дискретизації в межах дозволеного інтервалу детально розглянуто в [2] і демонструється на рис. 14. Напрямки переміщення точки  $(f_{max} / \Delta f, f_d / \Delta f)$  визначають окремі захисні інтервали по аліасингу і нестабільності. Оптимальний вибір положення точки в середині інтервалу, як і номер інтервалу є неоднозначним і залежить від низки чинників.



Рис. 15. Вибір частоти дискретизації з урахуванням захисних інтервалів

На рис. 15 показано можливі напрямки варіації частоти дискретизації в межах одного з дозволених діапазонів. Враховуючи, що точність відтворення сигналу при смуговій дискретизації безпосередньо залежить від масштабу додаткового частотного зміщення в спектрі низькочастотного сигналу (рис. 15, рис. 16,а), зміщення в горизонтальному напрямку (рис. 15), за умови точного відтворення сигналу, є не бажаним. З іншої сторони, для застосування захисного інтервалу для компенсації нестабільності елементів схеми, необхідно вносити зміщення «вправо». При цьому, чим ширшим є захисний інтервал, тим зміщення має бути більшим.

Очевидно, що застосування смугової дискретизації з великими значеннями  $l$  практично не можливе без використання захисних інтервалів [1, 2], що обумовлює більш глибокого дослідження цієї проблеми. З підвищенням  $l$  недосконалість АЧХ антиаліасингово фільтру вносить більше спотворень, оскільки, при фіксованій «похилості» АЧХ в смузі переходу сама ширина смуги звужується (рис. 17) по мірі збільшення  $l$ .

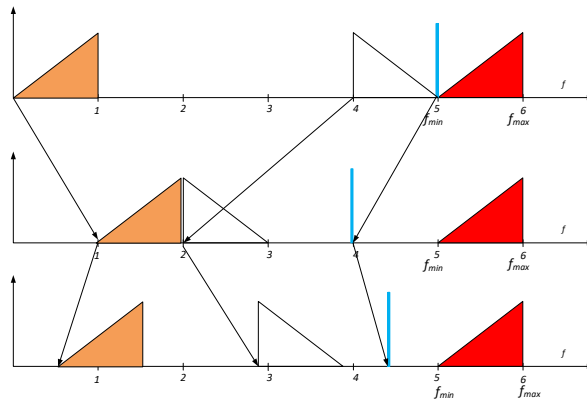


Рис. 16. Формування додаткового частотного зміщення в низькочастотному сигналі при застосуванні захисного інтервалу за рахунок зміщення частоти дискретизації

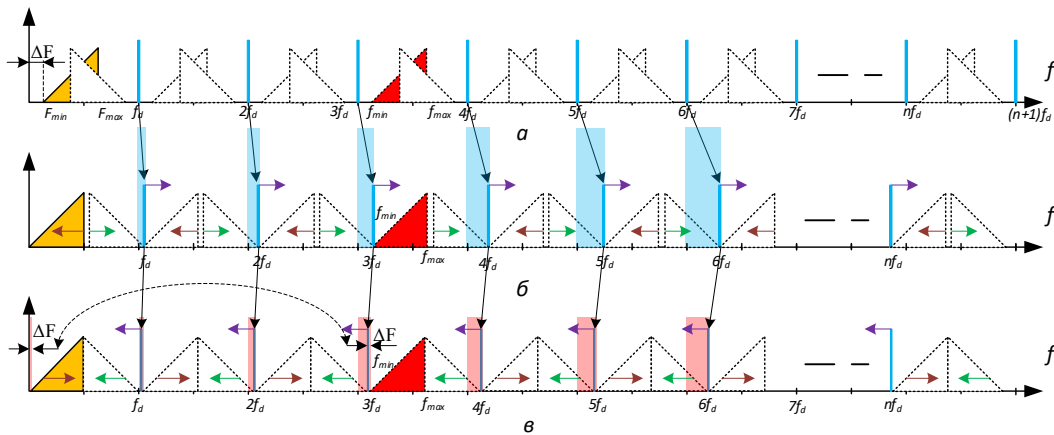


Рис. 17. Зміна ширини дозволених діапазонів частоти дискретизації при смуговій дискретизації

Окремої уваги заслуговує проблема вибору частоти дискретизації, коли критерієм якості слугує точність відтворення сигналу. При смуговій дискретизації, аналіз потребує додаткових даних у вигляді характеристики шумів і завад, енергетичних співвідношень на вході дискретизатора, тощо. Як і у випадку вибору значень  $l$  і  $\tau$  однозначного оптимального розв'язку цієї задачі немає. Проте, оцінити потенційні розв'язки можна на прикладі низькочастотного сигналу поширивши їх на випадок смугової дискретизації. У випадку здійснення дискретизації сигналу з максимальною частотою спектру  $f_{max}$ , що отримується за рахунок застосування фільтра низьких частот, оцінка похибки відтворення сигналу після дискретизації можна оцінити, як

$$\epsilon = \left| \frac{s(t) - s_1(t)}{s(t)} \right|, \tag{9}$$

де  $s(t)$  – сигнал до дискретизації;  $s_1(t)$  – сигнал, відтворений після дискретизації.

В роботі [1] показано, що при застосуванні типових фільтруючих схем (фільтрів з неідеальною АЧХ) для досягнення похибки відтворення в 1% частота дискретизації має перевищувати максимальну частоту сигналу в 22 рази, тобто, більш ніж в 10 разів вищою за частоту Найквіста. При цьому, використовуючи інтерполюючий фільтр з більш досконалою частотною характеристикою, співвідношення між частотою дискретизації і максимальною частотою сигналу складає  $f_d \geq f_{max}(2.2\alpha\sqrt{\epsilon})$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт крутості АЧХ інтерполяційного фільтра. У випадку  $\alpha = 0.1$  і заданій похибці відтворення  $\epsilon = 0.01$  співвідношення буде складати  $f_d \geq 2.2f_{max}$ , що практично відповідає частоті Найквіста. Це наочно підтверджується графіками, приведеними на рис. 18. На графіку (рис. 18, а) зображено залежність SNR від частоти дискретизації в дозволених діапазонах для різних значень  $l$ , з якого видно, що зі збільшенням частоти дискретизації SNR знижується для кожного значення  $l$ . Це зниження більш виражене для більших значень  $l$ , оскільки зменшення інтервалу між вибірками збільшує вплив аліасінгу, що виникає в наслідок недосконалості фільтра, особливо на краях смуги частот. Також з графіку видно, що для нижчих значень  $l$  SNR вищий при тій самій частоті дискретизації, що відображає менший вплив аліасінгу та краще придушення шуму фільтром.



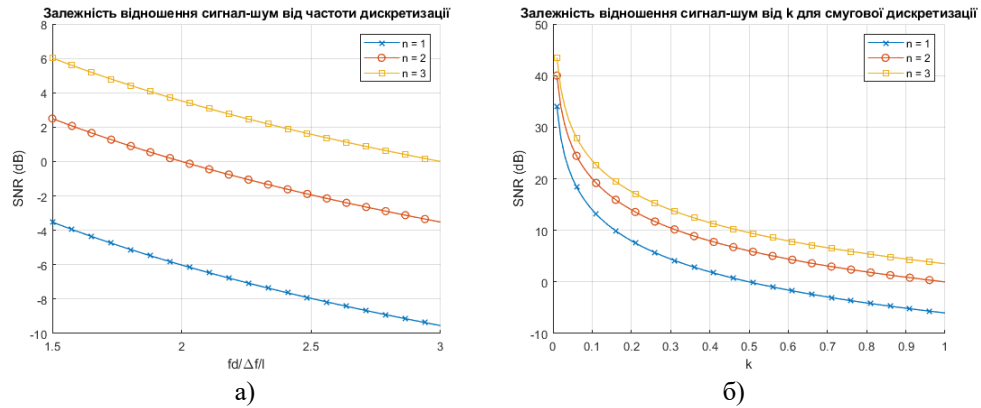


Рис. 18. Залежність SNR від параметрів смугової дискретизації

На графіку (рис. 15, б) показано залежність SNR від параметра  $\tau$  для трьох різних значень  $l$  при використанні фільтру з неідеальною АЧХ. З графіка можна бачити, що зі збільшенням  $\tau$  SNR зменшується для кожного значення  $l$ , і цей ефект стає більш вираженим для більших значень  $l$ . Це може бути пояснено тим, що зі збільшенням  $l$  ефективна ширина смуги, яка використовується для дискретизації, стає вузькою (рис. 11), що збільшує вірогідність перекриття смуг, що призведе до аліасінгу. Таким чином, можна зробити ряд висновків, що окреслюють суть невизначеності проблеми вибору частоти дискретизації вузькосмугових сигналів:

а) вибір частоти дискретизації для сигналів з обмеженим спектром при  $f_{\min} = 0$  завжди однозначний ( $l = 1, \tau = 1/\Delta f$ ), але за умови застосування ідеального антиаліасингового фільтру;

б) при застосуванні реальних схем фільтрів для сигналів з обмеженим спектром при  $f_{\min} = 0$  вибір частоти дискретизації робиться виходячи із заданої точності відтворення сигналу та допустимого значення відношення сигнал/шум;

в) для сигналів з  $f_{\min} \neq 0$  частота дискретизації обирається з дозволених діапазонів, при цьому вибір діапазону і значення частоти в самому діапазоні є неоднозначним:

- теоретична мінімальна частота дискретизації  $f_{d \min} = 2\Delta f/l$ , де  $l$  – найбільше ціле число, що не перевищує  $f_{\max}/\Delta f$ ;
- значення  $\tau$  безпосередньо впливає на SNR і має обиратись із виконанням умови (8);
- допустимі діапазони частоти дискретизації

$$\frac{(f_{\max} + f_{\min} - \Delta f)}{l} \geq f_d \geq \frac{(f_{\max} + f_{\min} - \Delta f)}{l+1};$$

- теоретична мінімальна частота дискретизації є «патологічною» у тому сенсі, що будь-яка неточність у реалізації призводить до спотворень через аліасинг (накладання);

- на практиці вибір частоти дискретизації завжди робиться вище теоретичного мінімуму для зменшення ризику спотворень і забезпечення захисних смуг, хоча наслідком цього є частотне зміщення низькочастотного сигналу, що потребує додаткової обробки.

Зважаючи на це, при вирішенні завдання пошуку оптимальної частоти дискретизації важливо враховувати не тільки спектральні характеристики сигналу а і спектральні характеристики завад і шумів, в тому числі обумовлені недосконалістю ключових вузлів схеми. Враховуючи обмежену енергію сигналу і задану його частотну смугу, обираючи різні значення частоти дискретизації із дозволених діапазонів можна досягти різних співвідношень сигнал/шум в дискретній вибірці.

### Висновки

Досліджено актуальну проблему вибору оптимальної частоти дискретизації в цифровій обробці сигналів з обмеженою смугою частот. Шляхом систематизації та аналізу різних підходів до дискретизації смугових сигналів, розроблено практичні рекомендації, що враховують надмірність вибірки, співвідношення сигнал/шум та стабільність дискретизатора. Пропонуються різні підходи та критерії оптимальності процесу дискретизації, спрямовані на забезпечення компактного та точного представлення сигналу.

### Література

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи : в 2 т. Т. 1 ; пер. Б. А. Смирнин ; ред. Б. Р. Левин. М. : Советское радио, 1961. 782 с.
2. Vaughan, Rodney G. Scott, Neil L. White D. Rod. The Theory of Bandpass Sampling. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, No. 9, p.1973-1984, September 1991.
3. Richard G Lyons, Understanding Digital Signal Processing, 3rd Edition, Prentice Hall Publications Inc., New Jersey, November 11, 2010.
4. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях : в 2 томах ; пер. с франц. М. : Мир, 1983. Т. 1. 312 с., с ил.

- 
5. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. М. ; Вильямс, 2004. 992 с.

#### References

1. Myddlton D. Vvedeniye v statystycheskuiu teoryiu sviazy : v 2 t. T. 1 ; per. B. A. Smyrenyn ; red. B. R. Levyn. M. : Sovetskoe radio, 1961. 782 s.
2. Vaughan, Rodney G. Scott, Neil L. White D. Rod. The Theory of Bandpass Sampling. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, No. 9, p.1973-1984, September 1991.
3. Richard G Lyons, Understanding Digital Signal Processing, 3rd Edition, Prentice Hall Publications Inc., New Jersey, November 11, 2010.
4. Maks Zh. Metody y tekhnika obrabotky syhnalov pry fizycheskykh yzmerenyakh : v 2 tomakh ; per. s frants. M. : Myr, 1983. T. 1. 312 s., s yl.
5. Aifycher Э., Dzhervys B. Tsyfrovaia obrabotka syhnalov. Praktycheskyi podkhod. M. ; Vyliams, 2004. 992 s.