

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-359-99>

УДК 519.6+517.977+519.85+510.5

ЛУКАНЬ ОЛЕКСАНДР

Івано-Франківський національний

технічний університет нафти і газу

<https://orcid.org/0009-0001-3376-554X>e-mail: lukan.alexander@gmail.com

АЛГОРИТМІЧНІ ПІДХОДИ ДО ВІДШУКАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ З ОПТИМІЗАЦІЙНОЮ СКЛАДОВОЮ

У статті розглянуто стохастично-параметричну постановку транспортної задачі як спеціального класу задач лінійного програмування, зокрема випадки з параметром у цільовій функції та в обмеженнях, а також стохастичні модифікації з умовою цілочисельності. Відповідна постановка обумовлена необхідністю враховувати у оптимізаційних задачах невизначеність різної природи, породжену як випадковими явищами, так і детермінованими, що мають певні параметри керування. Запропоновано та описано підходи до післяоптимізаційного аналізу та оцінки стійкості розв'язків, наведено узагальнений алгоритм побудови оптимальних планів на основі послідовного звуження діапазону виділеного параметра із застосуванням відтинань Гоморі та двоїстого симплекс-методу. Досліджено зв'язок параметричних і стохастичних транспортних моделей та окреслено практичні аспекти застосування.

Дане дослідження присвячено побудові множини допустимих планів у випадках, коли параметри задачі мають імовірнісну природу та впливають на стійкість базису. Показано, що комбінування стохастичного підходу з параметричним дозволяє не лише підвищити надійність отриманих результатів, а й формалізувати процедуру визначення меж інтервалів оптимальності. У випадку, коли досліджуваний відрізок параметра повністю належить робочому діапазону, можна вважати, що побудовано повний опис множини оптимальних розв'язків задачі. Запропонований підхід забезпечує можливість локалізації областей, де оптимальний план зберігає свою структуру при зміні значення параметра, а також дає змогу переходити між суміжними планами за допомогою двоїстого симплекс-методу.

Отримані результати мають прикладне значення для оптимізації транспортних і виробничо-логістичних процесів в умовах невизначеності. Запропоновані алгоритмічні рішення дають змогу проводити аналіз чутливості, прогнозувати зміну оптимального плану при варіюванні параметрів і забезпечують основу для побудови адаптивних моделей у системах підтримки прийняття рішень.

Ключові слова: транспортна задача; параметричне програмування; стохастична модель; цілочислова задача лінійного програмування; відтинання Гоморі; стійкість.

LUKAN OLEKSANDR

Ivano-Frankivsk National Technical
University of Oil and Gas

ALGORITHMIC APPROACHES TO SOLVING STOCHASTIC-PARAMETRIC TRANSPORTATION PROBLEMS WITH AN OPTIMIZATION COMPONENT

The article examines stochastic-parametric formulations of the transportation problem as a special class of linear programming problems, in particular cases with a parameter in the objective function and in the constraints, as well as stochastic modifications with an integer constraints. This formulation is driven by the necessity to account for uncertainties of various origins in optimization problems, arising from both random phenomena and deterministic factors characterized by specific control parameters. Approaches to post-optimality analysis and assessment of solution stability are proposed and described. A generalized algorithm for constructing optimal plans based on the sequential narrowing of the selected parameter range using Gomory cuts and the dual simplex method is presented. The relationship between parametric and stochastic transportation models is explored, and practical aspects of their application are outlined.

This paper is devoted to constructing the feasible set of solutions when problem parameters have a probabilistic nature and affect the stability of the basis. It is shown that combining stochastic and parametric approaches allows not only improving the reliability of the results but also formalizing the procedure for determining the boundaries of optimality intervals. In the case where the investigated segment of the parameter lies entirely within the working range, it can be considered that the complete set of optimal solutions has been described. The proposed approach provides the ability to localize regions where the optimal plan preserves its structure as the parameter varies and enables smooth transition between adjacent plans via the dual simplex method.

The obtained results have applied significance for the optimization of transportation and production-logistics systems under uncertainty. The proposed algorithmic framework allows sensitivity analysis, prediction of optimal plan variations with changing parameters, and the creation of adaptive decision-support models for complex optimization systems.

Keywords: transportation problem; parametric programming; stochastic model; integer linear programming problem; Gomory cuts; stability.

Стаття надійшла до редакції / Received 22.10.2025

Прийнята до друку / Accepted 15.11.2025

Постановка проблеми

За умов обмеженості ресурсів і необхідності оптимального використання енергії, матеріалів та часу, значна частина прикладних задач управління виробничими та економічними процесами зводиться до оптимізації відповідних лінійних моделей. В представлених дослідженнях транспортна задача сформульована як класична задача дослідження операцій, що відкриває можливість її застосування у виробничому процесі плануванні та логістиці цементного виробництва. Хоча відомими є параметричні й стохастичні варіації, де коефіцієнти цільової функції або системи обмежень залежать від детермінованого параметра або є випадковими

величинами, втім на практиці можуть зустрітися задачі, частина коефіцієнтів яких мають детерміновану параметричну природу, а інші – стохастичну природу, тобто залежать від випадкової величини. Зокрема, в задачі оптимального планування перевезень, де вартість перевезення одиниці прямо залежить від ціни на паливо та від відстані. Але якщо відстані між обома пунктами перевезення детермінована величина, то ціни на паливо за своєю природою мають тенденцію коливатися, тому цільова функція, що задаватиме найдешевші перевезення, у такому випадку міститиме як детерміновані, так і випадковлені параметри. До того ж така транспортна задача містить обмеження, які описують місткість складів, тобто попит та пропозицію. Вони також можуть мати сезонні коливання, які легко описати детермінованим параметром, але поза тим як попит, так і пропозиція залежать від багатьох інших чинників, які заховані у стохастичний параметр – політичні рішення, урожайність, дохід населення, кліматичні умови, катаклізми і т.п. Тому наявність у правій частині системи обмежень виразів, що містять як детермінований параметр (відповідальний за сезонний характер), так і випадкові величини (відповідальні за стохастичні чинники) цілком природна та логічна. Окреме виділення цілочислових стохастично-параметричних задач також має обґрунтовану підставу, адже доволі часто перевозиться штучний товар або пакетований товар. Зрозуміло, що у такому випадку контейнерні перевезення природно вимагають умови цілочисельності. Однак врахування наведених вище міркувань про випадкову природу ціноутворення приводить до стохастично-параметричної задачі цілочислового програмування.

У таких мішаних стохастично-параметричних випадках спрощення моделі та відкидання однієї складової (наприклад, параметричної) та оптимізація тільки стохастичної складової, тобто задачі стохастичного програмування, призведе до того, що частина змінних параметрів будуть знехтувані, тобто до надмірного спрощення та неврахування усіх важливих чинників. Подібна (та навіть інтуїтивно гірша) ситуація трапляється у разі відкидання стохастичних параметрів при побудові математичних моделей виробничих задач.

Аналіз досліджень і формулювання цілей статті

Перша строга постановка цієї задачі виконана ще в 1941 році та відома, як проблема Хітчкока. Параметричні транспортні задачі докладно досліджувалися у працях В. Срінівасана та Г. Л. Томпсона, в яких розроблено операторний підхід до таких задач та запропоновано алгоритми для застосування операторів межі та вартості, які впливають на перетворення оптимального розв'язку, пов'язаного зі змінами умов межі та одиничних витрат, а також описано вигляд таких операторів, що зберігають розв'язки, тобто для яких зміни в даних є такими, що оптимальні розв'язки залишаються тими самими [1-5]. Дослідження обчислювальної складності таких задач здійснено у [6].

Транспортна задача, з моменту її першої класичної постановки залишається актуальною й донині. Багатьма дослідниками розглядалися також різні її модифікації та узагальнення: транспортна задача із заборонами, транспортна задача з обмеженнями на пропускну здатність комунікацій, транспортна задача за критерієм часу (довжини маршрутів), транспортна задача з проміжними пунктами, розподільча задача, транспортна задача для висотних робіт, транспортна задача з нечіткими змінними [7-9]. Крім задач транспортного типу, до таких спеціальних задач також відносяться задачі параметричного програмування. Одна з перших постановок стохастичних транспортних задач розглядалася у [10], де несепарабельна цільова функція описувала мінімізацію витрат на доставку плюс очікувані витрати на зберігання та дефіцит у точках попиту з урахуванням обмежень на постачання. Згодом в роботах [11, 12, 13] розроблені метод декомпозиції для розв'язування стохастичної транспортної задачі з нелінійною цільовою функцією.

Останні часто виникають на виробництві, коли в умовах виробничого планування доводиться враховувати залежність коефіцієнтів виробничо-математичної моделі від деяких параметрів (час, використовувана технологія, місткість складів тощо). Якщо зафіксувати їхні значення, то отримаємо деякий умовно оптимальний розв'язок, що змінюватиметься при зміні початкових параметрів такої задачі. Тому в загальному випадку цей оптимальний розв'язок залежить від них, а це породжує проблему дослідження вкладу кожного початкового параметрів стосовно кінцевого розв'язку. Це спонукає проводити аналіз моделі на стійкість [14, 15] для відшукування замкненого представлення діапазону зміни параметризованих величин без суттєвих ймовірно-параметричних відхилень оптимуму та базису. Звичайно, змінюватись можуть коефіцієнти цільової функції, вільні члени (праві частини системи обмежень), коефіцієнти при невідомих у системі обмежень. До того ж зміна може стосуватися як деяких, так і всіх зазначених числових параметрів. Для розв'язування таких задач розроблено чимало модифікацій відомих методів - діагоналізований метод Ньютона [16, 17], модифікована функція Лагранжа для дискретних та неперервних запитів [18, 19], метод ітерації лісу [20], метод Кумара [21], метод матриці Дуїба [22].

У всіх транспортних задачах головною метою є пошук оптимального плану перевезень. Водночас з точки зору якісного аналізу та розробки рекомендацій важливим етапом також є постоптимізаційний аналіз компонент вектора розв'язку, адже умови функціонування виробничих систем постійно змінюються. Такий аналіз дозволяє визначити, для якої множини допустимих значень параметрів числові значення оптимального плану залишаються незмінними, а коли ці зміни (наприклад, змін запасів товару, потреб у товарі і/або транспортних тарифів) структура призводять до суттєвих відхилень або втрати оптимальності. Це, у свою чергу, дозволяє визначати напрямки розвитку досліджуваної виробничої системи.

Якщо, наприклад, в задачі планування виробництва вироблений підприємством товар підлягає зберіганню, то вартість продукції буде складатися з двох частин: сталої (вартості продукції на момент виготовлення) та змінної (що має сезонний характер і залежить лінійно від терміну зберігання продукції - часу t). У такій задачі підлягають можливій зміні числові параметри лінійного неперервного функціоналу, що задає

цільову функцію, елементи тензора першого рангу, яким визначається вектор обмежень, елементи матриці, що задає ліву частину системи обмежень. Ця зміна може охоплювати усі наведені числові параметри або тільки частину з них.

Метою роботи є розгляд цілочислових (чи й навіть взагалі дискретних) задач стохастичного лінійного планування у різні модифікаціях параметризації та увипадковлення: з параметризованою цільовою функцією, з параметром у правій частині системи обмежень та дослідження стохастичної параметричної транспортної моделі, де відповідні детерміновані числові коефіцієнти замінені на випадкові величини як у цільовій функції, так і у системі обмежень. Такий підхід дозволить гнучкіше описувати як стохастичну складову оптимізаційних задач, так і враховувати вплив параметрів на різних діапазонах значень. Описано основні етапи відшукування оптимальних планів таких задач на основі послідовного звуження початкового проміжку зміни параметра. В загальному, параметричний підхід до планування транспортних перевезень дозволяє не тільки отримувати оптимальний план перевезень, але й виконувати післяоптимізаційний аналіз залежно від діапазону змін значень параметра.

Основний матеріал дослідження

При дослідженні цілочислових задач лінійного планування (ЗЛП) з параметром важливим етапом є побудова оптимального плану такої задачі при фіксованому значенні параметра, тобто знаходження розв'язку звичайної (без параметра) задачі цілочислового лінійного планування. При цьому умова цілочисловості може стосуватися усіх або тільки частини змінних вихідної задачі. В обох випадках побудову правильних відтинів для відшукування цілочислових оптимальних планів можна виконувати на основі другого алгоритму методу Гоморі [23].

Задача цілочислового стохастичного лінійного планування з параметричною цільовою функцією
Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - ймовірнісний простір, який є ймовірнісною моделлю деякого експерименту (де Ω - простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ - σ -алгебра, P - ймовірнісна міра). Розглянемо на даному ймовірнісному просторі деяку математичну модель задачі стохастичного лінійного параметричного програмування в симетричній формі:

$$L_t(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) = \sum_{j=1}^n c_j(t, \omega)x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(t, \omega)x_j \leq b_i(t, \omega), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомі, $c_j(t, \omega) = c_j(\omega) + tc_{j'}(\omega)$, $a_{ij}(t, \omega) = a_{ij}(\omega) + ta_{ij}'(\omega)$, $b_i(t, \omega) = b_i(\omega) + tb_{i'}(\omega)$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) - задані випадкові лінійні функції від параметра $t \in [T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$, $a_{ij}(\omega)$, $a_{ij}'(\omega)$, $b_i(\omega)$, $b_{i'}(\omega)$, $c_j(\omega)$, $c_{j'}(\omega)$ - дискретні випадкові величини, $\omega \in \Omega$.

Далі, приєднуючи до цієї задачі умову цілочисловості

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4)$$

отримаємо параметричну модель цілочислової ЗЛП. При $J \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$ маємо частково цілочислову задачу стохастичного лінійного параметричного планування, інакше ($J = \{1, 2, \dots, n\}$) - повністю цілочислову задачу.

Розглянемо спершу задачу цілочислового лінійного параметрично-стохастичного програмування з параметром та стохастичністю в цільовій функції

$$L_t(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) = \sum_{j=1}^n (c_j(\omega) + tc_{j'}(\omega))x_j \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}. \quad (8)$$

Вона отримується із задачі (1)-(4) при таких значеннях сталих $a_{ij}' = b_{i'} = 0$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). З погляду кінцевого результату потрібно розглянути задачу скінченного розбиття відрізка $[T_1, T_2]$ проміжками такими, для яких екстремум функції (5) зберігає своє значення при всіх значень параметра t та досягається в незмінній вершині її n -вимірного багатогранника розв'язків, причому під максимумом цільової функції насправді розуміємо її математичне сподівання, тобто

$$EL_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n (Ec_j(\omega) + tEc_{j'}(\omega))x_j \rightarrow \max$$

Відповідно до універсального піходу методів відтинання спершу беремося за розв'язування неперервної параметричної задачі лінійного програмування з параметризованою цільовою функцією (5)-(7) без умови цілочисловості (8). Зрозуміло, що у n -вимірному просторі система обмежень (6), (7) визначає деякий опуклий багатогранник $\mathcal{D}$, а рівняння $EL_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ задає пучок n -вимірних гіперплощин, що міняють початок координат. Зафіксувавши значення параметра t рівним t_0 , можна з такого пучка гіперплощин вибрати гіперплощину $EL_{t_0}(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) = 0$ та здійснити паралельне перенесення за напрямом нормального вектора $\vec{n}_0 = (Ec_1(\omega) + t_0Ec_{1'}(\omega), Ec_2(\omega) + t_0Ec_{2'}(\omega), \dots, Ec_n(\omega) + t_0Ec_{n'}(\omega))$. Таким чином, знайдемо вершину B багатогранника $\mathcal{D}$, в якій досліджувана функція EL_t при значенні параметра $t = t_0$ набуває екстремального значення $\max EL_{t_0}$, в даному випадку максимуму. Позаяк тільки цільова функція містить цей параметр t , то його модифікації породжують n -вимірний оберн нормального вектора $\vec{n}_0$ відносно точки $(0, 0, \dots, 0)$ і відповідно поверхні рівня l_0 щодо точки B . Водночас n -вимірний поворот зручно задавати квадратною матрицею $n \times n$, що буде явним зображенням оператора повороту у n -вимірному лінійному векторному просторі. При дії оператора повороту на вектор $\vec{n}_0$ відповідна пряма l_0 відносно точки B збігатиметься з прямими AB ($t = \underline{t_0}$) і BC ($t = \overline{t_0}$; для визначеності припустимо $\underline{t_0} < \overline{t_0}$). Тоді екстремум у точці B збережеться як у максимальній

точки досліджуваної функції EL_t (стійкість оптимального плану забезпечена при $\underline{t}_0 \leq t \leq \overline{t}_0$, а його неєдиність при $t = \underline{t}_0$ та $t = \overline{t}_0$). У разі перевищення значення параметра t за $\overline{t}_0$, точка C задаватиме оптимальний план на багатограннику. Їй буде відповідати свій відкритий проміжок зміни параметра t .

Продовжимо виклад способу відшукування оптимального розв'язку задачі (5)-(7). Для цього фіксуємо значення параметра $t = t_0 \in [T_1, T_2]$ та розв'язуємо отриману цією фіксацією задачу цілочислового стохастичного лінійного програмування методом відтинань Гоморі. Як наслідок, отримаємо одну з трьох можливих ситуацій:

1. умови задачі суперечать між собою (несумісні), тоді відповідна множина планів $\mathcal{D}$ задається порожньою множиною.
2. досліджувана цільова функція зростає до плюс нескінченності, тобто необмежена згори для $x_1, x_2, \dots, x_n$, значення яких пробігають множину планів $\mathcal{D}$;
3. існує цілочисельний оптимальний план $x^{(0)}$ з відповідним йому базисом $\mathcal{B}^{(0)}$ (умова цілочисловості тут може виконуватися як повністю, так і частково).

Позаяк множина планів задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування з параметризованою цільовою функцією не містить параметра t , аналіз випадку 1 приводить до висновку, що задача (5)-(8) має порожню множину розв'язків при всіх значення параметра t , що належать відріzkу $[T_1, T_2]$.

Аналіз другого випадку породжує інші висновки: певній змінній x_{j_0} , що не належить базису, відповідає симплекс-різниця $\Delta_{j_0}(t)$, що є лінійним функціоналом відносно параметра t . Цей функціонал при $t = t_0$ досягає найменшого значення серед від'ємних. Крім того, у базисному розкладі вектора a_{j_0} відповідні координати усі недодатні. Нарешті при $\Delta'_{j_0} = 0$ робимо висновок, що наведені нижче умови

$$\Delta_{j_0}(t) = \Delta_{j_0} + t\Delta'_{j_0} < 0 \text{ при } a_{ij_0} \leq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (9)$$

справджуються для довільного t . Це автоматично означає прямування до нескінченності досліджуваної функції L_t при фіксованих значення параметра взятих з проміжка $[T_1, T_2]$. У випадку від'ємної симплексної різниці $\Delta'_{j_0} < 0$, умови (9) будуть справедливими для всіх $t > -\frac{\Delta_{j_0}}{\Delta'_{j_0}} = \hat{t}_0$, а тому задача (5)-(8) матиме порожню множину розв'язків справа від $\hat{t}_0$. Якщо ж відповідна параметризована симплексна різниця додатна $\Delta'_{j_0} > 0$, то аналогічна ситуація виникає зліва від $\hat{t}_0$ – там також відсутні розв'язки. Ці проміжки виключаємо з подальшого розгляду.

Нарешті, у третій ситуації знайдений при $t = t_0$ цілочисловий оптимальний план $x^{(0)}$ задачі (5)-(8) залишатиметься оптимальним планом цієї задачі також для тих значень параметра t , для яких симплекс-різниці

$$\Delta_j(t) = \Delta_j + t\Delta'_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є проміжок $[t_{\min}, t_{\max}]$, де

$$t_{\min} = \begin{cases} \max_{j: \Delta'_j > 0} \left(-\frac{\Delta_j}{\Delta'_j} \right), & \text{якщо існують } \Delta'_j > 0; \\ -\infty, & \text{якщо всі } \Delta'_j \leq 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$t_{\max} = \begin{cases} \min_{j: \Delta'_j < 0} \left(-\frac{\Delta_j}{\Delta'_j} \right), & \text{якщо існують } \Delta'_j < 0; \\ +\infty, & \text{якщо всі } \Delta'_j \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

У випадку, коли досліджуваний відрізок $[T_1, T_2]$ повністю міститься у $[t_{\min}, t_{\max}]$, можна вважати, що отримано повний опис розв'язків задачі (5)-(8). У протилежному випадку доведеться продовжити пошук та дослідження наявності розв'язків поставленої задачі на двох менших підпроміжках $[T_1, t_{\min}]$ або $[t_{\max}, T_2]$.

Приймемо, що $t \in [T_1; t_{\min}]$, при $t_{\min} = -\frac{\Delta_{j_0}}{\Delta'_{j_0}}$ та $\Delta'_{j_0} > 0$ ($1 \leq j_0 \leq n$). У цьому випадку симплекс-різниця $\Delta_{j_0}(t)$ набуває від'ємного значення раніше, ніж інші, тому змінну x_{j_0} доцільно включити до складу базису. Якщо серед коефіцієнтів a_{ij_0} ($i = \overline{1, m}$) відсутні додатні елементи, маємо другу з описаних раніше ситуацій — тобто задача не має допустимого розв'язку на відріzkу $T_1 \leq t \leq t_{\min}$. В іншому випадку виконується симплекс-перетворення, у результаті якого отримуємо новий базис $\mathcal{B}^{(1)}$ та відповідний оптимальний план $x^{(1)}$, який далі перевіряється на виконання умови цілочисловості. Потім, користуючись виразами (11), (12), обчислюють інтервал $[t_{\min}, t_{\max}]$, на якому цей план зберігає оптимальність, після чого зазначений проміжок вилучається з подальшого розгляду. Подальший аналіз на решті підінтервалів здійснюється за аналогічною схемою.

Таким чином, процедура відшукування розв'язку задачі стохастично-параметричного лінійного програмування з параметризованою цільовою функцією містить в собі такі етапи:

1. Замість значення параметра t підставляють деяке число t_0 приналежне замкненій множині $[T_1, T_2]$ та шукають точку оптимуму $x^{(0)}$, нехтуючи умовою цілочисловості, або обґрунтовують що ця задача володіє порожньою множиною розв'язку;
2. Коли виявиться, що обчислили цілочисловий оптимальний план, можна здійснити перехід до наступного пункту. У протилежному випадку виникає необхідність ввести додаткове обмеження та продовжити обчислення, поки не дістанемо нову точку оптимуму $x^{(1)}$. Якщо цей план не міститиме лишень цілі числа, як компоненти, то це породжує необхідність ввести ще одне обмеження, врахування якого дасть цілочисельність

по «поганих» елементах, тобто нецілочислових. Ітераційний розрахунковий процес продовжують, аж поки не отримаємо цілочисловий оптимальний план, або доведемо його неіснування;

3. Відшукуємо такі значення параметра t , що потрапляють у $[T_1, T_2]$ та володіють властивістю збереження оптимальності знайденого раніше оптимального плану у точці $t = t_0$ або властивістю збереження нерозв'язності задачі;

4. Із тієї частини проміжку $[T_1, T_2]$, що залишилася після попереднього аналізу, обирають нове значення параметра t та перевіряють можливість побудови чергового оптимального плану. Якщо отримане рішення не задовольняє умову цілочисельності, його перетворюють до цілочислової форми або доводять, що для даного значення параметра задача не має цілочислового оптимального розв'язку;

5. Розрахунки здійснюються до вичерпання усіх значень параметра t , приналежних відрізка $[T_1, T_2]$.

Коли задача стохастично-параметричного лінійного програмування з параметризованою цільовою функцією є задачею на мінімум цільової функції (а не максимум), для побудови розв'язку відсутня потреба у переході до задачі пошуку максимуму. Насправді вище описана схема досліджень застосовна у цьому випадку також з невеличкою модифікацією - у рівнянні (10) заміняють бінарне відношення критерію оптимальності для опорного плану на протилежне

$$\Delta_j(t) = \Delta_j + t\Delta'_j \leq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

а в (9) заміняють умову верхньої необмеженості цільової функції на умову її нижньої необмеженості

$$\Delta_{j_0}(t) = \Delta_{j_0} + t\Delta'_{j_0} > 0, \quad a_{ij_0} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Зрозуміло, що при цьому зазнають відповідних змін проміжки для параметра t .

Задача цілочислового стохастично-параметричного лінійного програмування з параметризованими обмеженнями

Розглянемо тепер така задачу, де праві частини обмежень містять параметр

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i(\omega) + tb'_i(\omega), \quad i = \overline{1, m}, \quad (14)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}. \quad (16)$$

Задача (13)-(16) отримується зі задачі (1)-(4) при зануленні сталих c_j , $a_{ij}' = 0$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). А під виконанням (14) слід розуміти справедливості відповідної нерівності для всіх $\omega \in \Omega$. Хоча можна також розглядати слабшу вимогу виконання для математичного сподівання.

Для неперервної задачі з параметризованими обмеженнями (13)-(15) без умови цілочисловості (16) з точки зору геометрії лінійних векторних просторів неперервна зміна значень параметра t спричиняє паралельне перенесення крайових n -вимірних гіперплощин. Тоді множина планів задачі при $t = t_0$ є опуклим багатокутником, а одна з його з його вершин - оптимальним планом задачі. Зрозуміло, що така дія на значення параметра t також спричиняє зміну вигляду множини планів задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування з параметризованими обмеженнями. А це породжує модифікацію структури її цілочислового оптимального плану.

Алгоритм розв'язування задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування з параметризованими обмеженнями досить подібний до вище наведеного алгоритму дослідження задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування з параметризованою цільовою функцією. Спочатку для фіксованого значення параметра $t = t_0$ розв'язуємо задачу (13)-(16) методом відтинань Гоморі. В ситуації, коли при $t = t_0$ цільова функція $L(x)$ не має глобального максимуму на множині допустимих планів, керуючись геометричними міркуваннями, робимо висновок, що ЗЛП, як зрештою і ЗЦЛП, з параметризованими обмеженнями володіють порожньою множиною розв'язків при $t \in [T_1, T_2]$. Інакше знаходимо при $t = t_0$ цілочисловий оптимальний план задачі $x^{(0)}$ або виявляємо несумісність її умов ($\mathcal{D} = \emptyset$). Далі, розв'язуючи систему лінійних відносно параметра t нерівностей

$$b_i(t, \omega) = b_i(\omega) + tb'_i(\omega) \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (17)$$

визначаємо проміжок $[t_{\min}, t_{\max}]$ з кінцями

$$t_{\min} = \begin{cases} \max_{j: b'_i(\omega) > 0, \omega \in \Omega} \left(-\frac{b_i(\omega)}{b'_i(\omega)} \right), & \text{якщо є хоча б одне } b'_i(\omega) > 0; \\ -\infty, & \text{якщо всі } b'_i \leq 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$t_{\max} = \begin{cases} \min_{j: b'_i(\omega) < 0, \omega \in \Omega} \left(-\frac{b_i(\omega)}{b'_i(\omega)} \right), & \text{якщо є хоча б одне } b'_i(\omega) < 0; \\ +\infty, & \text{якщо всі } b'_i(\omega) \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

на якому зазначені умови виявляються несумісними, або план $x^{(0)}$ зберігає свою оптимальність для всіх значень t_k ($k = \overline{1, r}$) параметра t з того самого проміжку, які володіють властивістю цілочислової дискретності

$$b_i(t_k, \omega) = b_i(\omega) + t_k b'_i(\omega) \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, m}, k = \overline{1, r}. \quad (20)$$

Щодо решти значень параметра t ($t \neq t_k$), приналежних тому самому проміжку, виникає потреба продовження аналізу поставленої задачі стосовно існування цілочислового оптимального плану. Створюють правильні відтини та вивчають розв'язність отриманих розширених задачі лінійного стохастично-

параметричного програмування з параметризованими обмеженнями. Після завершення дослідження задачі (13)-(16) межах інтервалу $[t_{\min}, t_{\max}]$ подальший аналіз її розв'язку буде здійснюватися на підпроміжках $[T_1, t_{\min}]$ або $[t_{\max}, T_2]$. Для переходу між оптимальними планами використовується алгоритм двоїстого симплекс-методу. При цьому ключовий рядок визначається за умовою найбільшого відхилення на досліджуваній множині нерівності (17).

Відзначимо, що в разі, коли пряма задача є задачею стохастично-параметричного лінійного програмування з параметризованою цільовою функцією, то двоїстою для неї виступає задача стохастично-параметричного лінійного програмування з параметризованим вектором вільних членів (тобто вектор з коефіцієнтів правих частинах обмежень) і навпаки. Відтак при потребі завжди можна перейти від одного типу задачі лінійного параметричного планування до іншого. Обидва попередньо розглянуті алгоритми для розв'язання задачі цілочислового лінійного параметричного планування дозволяють побудувати розв'язок задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування, для якої коефіцієнти цільової функції та компоненти вектора обмежень є лінійно-параметризованими залежностями відносно параметра

$$\begin{aligned} L_t(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n (c_j(\omega) + tc'_j(\omega))x_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i(\omega) + tb'_i(\omega), \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що відшукування розв'язку такої задачі ускладнюється тим, що від параметра t залежатиме виконання 3-х умов: умови допустимості $b_i(t, \omega) \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), умови оптимальності $\Delta_j(t) \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) і умови цілочисловості $b_{ij}(t, \omega) \in \mathbb{Z}$ ($j_i \in J, i = \overline{1, m}$).

Дослідження на стійкість задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування з параметризованими коефіцієнтами у системі обмежень і, тим більше, задачі цілочислового лінійного стохастично-параметричного програмування (1)-(4) у загальній постановці – це складна обчислювальна задача для розв'язування. Варто зазначити, що відповідна задача є NP-повною навіть у детермінованому непараметризованому випадку [25].

Висновки

Таким чином, в моделях транспортного типу побудова оптимальних планів перевезень не є єдиною кінцевою метою. Оскільки умови функціонування транспортних систем за своєю природою є змінними, оскільки транспортні витрати, як правило, мають сезонний характер або можуть залежати від завантаженості доріг; пропозиція товару і попит на товар також можуть змінюватися залежно від часу або місткості складських приміщень, що зумовлює необхідність проведення післяоптимізаційного аналізу.

У представленій статті узагальнено підхід до параметричної транспортної задачі: розглянуто випадки, коли параметр входить у цільову функцію та у правій частині системи обмежень, а також стохастичні й цілочислові модифікації. Комбінуючи повторну оптимізацію (прямий/двоїстий симплекс) із правильними відтинаннями Гоморі, ми отримали практичну процедуру, що розбиває діапазон параметра на інтервали стійкості й задає оптимальний план для кожного інтервалу.

Проведене узагальнення класичних методів оптимізації дало можливість використовувати єдиний апарат для задач, у яких параметр впливає одночасно на цільову функцію чи в обмеженнях, або матрицю коефіцієнтів. Пропонований підхід є універсальним і придатним для подальшої адаптації в задачах з великими розмірностями, що характерно для сучасних виробничих та транспортних систем.

Отримані результати дослідження розширюють поняття параметричного програмування, поєднуючи його зі стохастичними методами. З прикладної точки зору, розроблені алгоритмічні підходи можуть бути використані для аналізу стійкості оптимальних рішень, прогнозування впливу змін у транспортних тарифах, запасах або попиті, а також для розроблення адаптивних систем підтримки прийняття рішень у логістиці й плануванні виробництва, що є темою дисертаційного дослідження аспіранта.

References

1. Ekanayake, E. M. U. S. B., Daundasekara, W. B., & Perera, S. P. C. (2022). An examination of different types of transportation problems and mathematical models. *American Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 7(3), 37-48. DOI: 10.11648/j.ajmcm.20220703.11
2. Guo, H., Wang, X., & Zhou, S. (2015). A transportation problem with uncertain costs and random supplies. *International Journal of e-Navigation and Maritime Economy*, 2, 1-11. URL: <https://doi.org/10.1016/j.enavi.2015.06.001>
3. Schwinn, J., & Werner, R. (2019). On the effectiveness of primal and dual heuristics for the transportation problem. *IMA Journal of Management Mathematics*, 30(3), 281-303. URL: <https://doi.org/10.1093/imaman/dpy011>
4. Maity, G., Roy, S. K., & Verdegay, J. L. (2016). Multi-objective transportation problem with cost reliability under uncertain environment. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9(5), 839-849. URL: <https://doi.org/10.1080/18756891.2016.1237184>
5. Pourfoghgi, F., & Darvishi Salokolaei, D. (2024). Sensitivity Analysis of Costs in Grey Transportation Problems. *International Journal of Applied Operational Research*, 12(1), 63-75. URL: <http://ijorlu.liau.ac.ir/article-1-662-en.html>

6. Balachandran, V., Srinivasan, V., & Thompson, G. L. (2009). Applications of the operator theory of parametric programming for the transportation and generalized transportation problems. *Network Models and Associated Applications*, 58-85. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0120938>
7. Buvaneshwari, T. K., & Anuradha, D. (2022). Solving stochastic fuzzy transportation problem with mixed constraints using the Weibull distribution. *Journal of Mathematics*, 2022(1), 6892342. URL: <https://doi.org/10.1155/2022/6892342>
8. Khurana, A. (2015). Variants of transshipment problem. *European Transport Research Review*, 7(2), 11. DOI: 10.1007/s12544-015-0154-8
9. Baidya, A., Bera, U. K., & Maiti, M. (2022). A restricted multi-objective solid transportation problem with budget constraint involving stochastic variable and interval type-2 fuzzy number. *New Mathematics and Natural Computation*, 18(03), 747-773. URL: <https://doi.org/10.1142/S1793005722500363>
10. Maggioni, F., Potra, F. A., & Bertocchi, M. (2017). A scenario-based framework for supply planning under uncertainty: stochastic programming versus robust optimization approaches. *Computational Management Science*, 14(1), 5-44. DOI: 10.1007/s10287-016-0272-3
11. Sharif Azadeh, S., Paneque, M. P., & Bierlaire, M. (2024). Decomposition Methods for Choice-Based Optimization Models. In *Combinatorial Optimization and Applications: A Tribute to Bernard Gendron* (pp. 277-307). Cham: Springer Nature Switzerland. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-57603-4_13
12. Romeijn, H. E., & Sargut, F. Z. (2011). The stochastic transportation problem with single sourcing. *European Journal of Operational Research*, 214(2), 262-272. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.040>
13. Kacher, Y., & Singh, P. (2021). A comprehensive literature review on transportation problems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7(5), 206. URL: <https://doi.org/10.1007/s40819-021-01134-y>
14. Wang, Y. (2025). Stochastic Programming Model for Household Waste Transportation based on Benders Decomposition Algorithm. *Frontiers in Sustainable Development*, 5(3), 304-316. URL: <https://doi.org/10.54691/0f83ag27>
15. Boyles, S. D. (2012). Bush-based sensitivity analysis for approximating subnetwork diversion. *Transportation Research Part B: Methodological*, 46(1), 139-155. URL: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2011.09.004>
16. Kaur, S., Jain, E., & Dahiya, K. (2025). Two-level solid transportation problem. *Opsearch*, 62(1), 423-447. DOI: 10.1007/s12597-024-00799-5
17. Daneva, M., Larsson, T., Patriksson, M., & Rydergren, C. (2010). A comparison of feasible direction methods for the stochastic transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, 46(3), 451-466. URL: <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9199-0>
18. Diamandis, T., & Angeris, G. (2024, December). Solving the Convex Flow Problem. In *2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control (CDC)* (pp. 3936-3941). IEEE. DOI: 10.1109/CDC56724.2024.10886306
19. Kuiri, A., Das, B., & Mahato, S. K. (2021). An optimization of solid transportation problem with stochastic demand by Lagrangian function and KKT conditions. *RAIRO-Operations Research*, 55, S2969-S2982. URL: <https://doi.org/10.1051/ro/2020136>
20. Tan, X., & Touzi, N. (2013). Optimal transportation under controlled stochastic dynamics. *Ann. Probab.* 41 (5) 3201 - 3240, September 2013. URL: <https://doi.org/10.1214/12-AOP797>
21. Qi, L. (2009). Forest iteration method for stochastic transportation problem. In *Mathematical programming essays in honor of George B. Dantzig Part II* (pp. 142-163). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0121081>
22. Kumar, P. S. (2023). The theory and applications of the software-based PSK method for solving intuitionistic fuzzy solid transportation problems. In *Perspectives and considerations on the evolution of smart systems* (pp. 137-186). IGI Global. DOI: 10.4018/978-1-6684-7684-0.ch007
23. Dhouib, S., Kammoun, M., Dhouib, S., & Loukil, T. (2025). Supply Chain Networks Optimization under Uncertain Environment with Dhouib-Matrix-TP1 heuristic. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 13(4), 1505-1521. URL: <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-2282>
24. Gomory, R. E. Source: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 72, No. 2, Part 2: Computers and Computing (Feb., 1965), pp. 99-110. URL: <https://doi.org/10.2307/2313316>
25. Gade, D., Küçükyavuz, S., & Sen, S. (2014). Decomposition algorithms with parametric Gomory cuts for two-stage stochastic integer programs. *Mathematical Programming*, 144(1), 39-64. URL: <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0615-y>