

**СТРЕЛКОВСЬКА ІРИНА**

Міжнародний гуманітарний університет

<https://orcid.org/0000-0002-1813-0554>e-mail: [i.strelkovskaya@mgu.edu.ua](mailto:i.strelkovskaya@mgu.edu.ua)**СОЛОВСЬКА ІРИНА**

Міжнародний гуманітарний університет

<https://orcid.org/0000-0002-9904-5692>e-mail: [i.solovskaya@mgu.edu.ua](mailto:i.solovskaya@mgu.edu.ua)**СТРЕЛКОВСЬКА ЮЛІЯ**

Worthing college

<https://orcid.org/0000-0002-9835-0222>e-mail: [4800632s@gmail.com](mailto:4800632s@gmail.com)

## ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ В МОДЕЛЮВАННІ

Сучасний підхід до моделювання 2D та 3D об'єктів у комп'ютерній графіці, Web-дизайні та 3D-моделюванні базується на кривих та поверхнях, які можуть формуватися сплайн-функціями. Запропоновано використання параметричних сплайнів для 2D та 3D-моделювання кривих та поверхонь. Наведено принципи побудови інтерполяційних кривих з використанням параметричних лінійних сплайнів. Визначено похибки інтерполяції при побудові кривих та поверхонь параметричними сплайнами. Встановлено, що підвищення точності інтерполяції кривих та поверхонь при моделюванні 2D та 3D об'єктів може бути досягнуто за рахунок підбору виду сплайн-функції.

*Ключові слова:* 3D-моделювання, Web-дизайн, криві та поверхні, параметричні сплайн-функції, лінійні параметричні сплайн-функції, похибка.

STRELKOVSKAYA IRINA, SOLOVSKAYA IRINA

International Humanitarian University

STRELKOVSKA JULIA

Worthing college

## USING PARAMETRIC SPLINE FUNCTIONS IN MODELING

The modern approach to 2D and 3D modelling in computer graphics, web design and 3D modelling is constantly evolving due to new technologies and needs of game and audiovisual content developers, visualisation and architectural design, industry and medicine. These conditions often lead to a growing complexity of 2D and 3D modelling tasks, with increased input data and requirements for accuracy and speed. 2D and 3D modelling requires software environments to use efficient mathematical solutions that will achieve scalability of the obtained solutions, improve interpolation accuracy and reduce visualisation and rendering time. The use of parametric spline functions to generate curves and surfaces is proposed. Such curves and surfaces allow to obtain smooth, flexible shapes with a certain number of interpolation nodes, whereas spline curves are used in 3D modelling to create the shape of the modelled object, and spline surfaces can approximate its three-dimensional shape. Interpolation parametric splines will reduce computational complexity, provide scalability of solutions and significantly simplify the modelling process. The paper shows the principles of determining interpolation curves using local linear spline functions and provides an example of constructing an interpolation curve of a parametric linear spline. To determine the interpolation error by parametric linear spline functions, two theorems are proposed to determine the interpolation errors in the construction of curves and surfaces by parametric splines. It is proposed to use parametric splines of higher orders, such as parametric quadratic or parametric cubic splines, or parametric cubic B-splines, to reduce the interpolation error of curves and surfaces in modelling 2D and 3D objects. The direction of further research is to consider parametric cubic and cubic B-spline splines and perform a comparative analysis of the results obtained in order to improve the accuracy of building curves and surfaces in 2D and 3D modelling.

*Keywords:* 2D and 3D modelling, Web design, curves and surfaces, parametric spline functions, linear parametric splines, error.

## Постановка проблеми

Сучасні технології тривимірного моделювання сьогодні використовуються у сфері дизайну, промисловості, медицині при розробці ігор та ігрового контенту, візуалізації та виробництві для 3D-принтерів. Програмними середовищами для виконання 2D та 3D-моделювання є Blender, Autodesk 3D MAX, Maya, SketchUp, Cinema 4D, Unity VR та інші, які надають можливості створення 3D-моделей різної складності та призначення. З цієї точки зору, особливої уваги заслуговує сплайнове NURBS (Non-uniform rational B-spline) 3D-моделювання, яке виконується на базі дійсних сплайн-функцій – B-сплайнів [1]. Кожна лінія сплайну задається набором точок у просторі, які визначають гладкість кривої. При сплайновому NURBS-моделюванні створюється сплайновий каркас, на базі якого моделюється огинаюча тривимірною поверхню [1-3].

Сплайновий каркас формується при NURBS-моделюванні на базі сплайн-кривих, таких як, CV (Control Vertex)-крива та P (Point)-крива. Такі інтерполяційні криві дозволяють представляти плавні, гнучкі форми об'єктів з визначеною кількістю точок, формування поверхні виконується за рахунок полігонів (Polygon), які можуть наближати тривимірну форму об'єкту. Таким прикладом може бути 3D-моделювання в програмному середовищі Blender 4.0, показане на рис. 1.

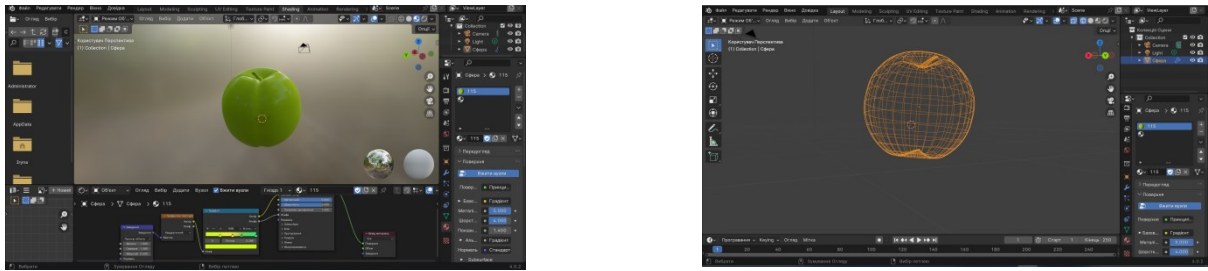


Рис. 1. Слайнове моделювання в програмному середовищі Blender 4.0

Однак, стрімкий розвиток технологій зумовлює постійне ускладнення завдань моделювання, що спричиняє підвищення обсягу вихідних даних моделювання та вимагає пошуку нових математичних рішень, які будуть використані для формування кривих та поверхонь. Особливо важливими є такі завдання в анімації, відеоіграх та інтерактивних додатках, адже під час розробки траєкторії руху під час формування плавних та природних рухів, процесів деформації, які відбуваються у відповідь на дії або зміни у навколишньому середовищі є складним та ресурсовитратним процесом. Крім того, при 2D та 3D-моделюванні кривих та поверхонь слід приймати до уваги наступні вимоги, а саме, невелика кількість параметрів опису кривої, можливості гладкості з'єднання та диференційності кривої, низька осциляція та інше. Тому доцільним є проведення дослідження щодо використання різних видів сплайн-функцій в слайновому моделюванні з метою підвищення точності формування 3D-моделі. Відомо [4–8], що обчислення сплайнів є досить простим, а сплайн-функції володіють доброю збіжністю та локальними властивостями, у додаток, сплайни можуть масштабуватися та за рахунок зміни на окремих ділянках, можуть забезпечувати необхідну точність.

#### Аналіз досліджень та публікацій

Для слайнового моделювання можуть бути використані різні сплайн-функції (лінійні, квадратичні, кубічні, кубічні В-сплайни і кубічні сплайни Ерміта) [9, 10]. Авторами в роботах [4–8] використано низку сплайн-функцій, серед яких дійсні та комплексні сплайни. Вирішення різних завдань за допомогою сплайн-функцій дозволило:

- забезпечити підвищення точності сплайн-апроксимації або сплайн-екстраполяції при рішенні задач відновлення та прогнозування характеристик мережного самоподібного трафіку,
- визначити та підтримувати нормативні значення характеристик якості обслуговування QoS (Quality of Service) в інформаційно-комунікаційній мережі,
- збільшити точність позиціонування користувача в мережах Wi-Fi/Indoor та багато інших.

Однак, існує великий клас задач в IT-технологіях, рішення яких може бути отримано за допомогою сплайнів. Це задачі [ ]:

- 3D-моделювання, вирішення яких потребує використання гладких кривих та поверхонь та наближення цих кривих до форми модельованого 3D-об'єкту.
- комп'ютерної графіки (Adobe Photoshop, CorelDraw), побудови кривих та поверхонь у двомірному та тримірному вимірах з мінімізацією похибок наближення;
- Web-дизайну (Figma, Adobe Illustrator, Adobe After Effects), рішення яких полягає у моделюванні кривих та поверхонь з різними структурами складності та взаємодії;
- анімації та рендерінгу, які виконують апроксимації поверхні та окремих ліній з наперед заданими умовами плавності переходів, відсутність перегинів.

При рішенні вищезазначених завдань можуть бути використані різні сплайн-функції, які надають можливості спрощення процесу моделювання та підвищення точності наближення.

Такими сплайн-функціями можуть бути параметричні сплайни, які будуть використані для побудови кривих та поверхонь. В якості параметричних сплайнів можливо використовувати різні сплайн-функції, як лінійні, так і кубічні та В-сплайни.

**Метою даної роботи** є моделювання кривих та поверхонь на базі параметричних сплайнів з метою підвищення точності інтерполяції.

#### Виклад основного матеріалу

Раніше авторами було розв'язано низку телекомунікаційних задач за допомогою дійсних та комплексних сплайнів [4–8]. Задачі моделювання кривих та поверхонь за допомогою сплайн-функцій не було розглянуто. Тому розглянемо інтерполяцію кривих та поверхонь за допомогою лінійних параметричних сплайнів.

Для деяких видів кривих доцільно розглядати їх в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = x(u); \\ y = y(u), \end{cases} \quad (1)$$

де  $u$  – деякий параметр кривої.

Тому доцільно апроксимувати ці криві параметричними сплайн-функціями. При інтерполяції кривої, яку задано параметрично виразом вигляду (3), розіб'ємо проміжок зміни параметру  $u$ , таким чином  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$ . Знайдемо значення функції у точках розбиття  $u_i, i = \overline{0, N}$ , причому

$$\begin{cases} x_i = x(u_i); \\ y_i = y(u_i). \end{cases} \quad (2)$$

Інтерполяційний параметричний лінійний сплайн на проміжку між точками  $P_i$  та  $P_{i+1}$  заданий співвідношеннями [9]:

$$\begin{cases} S_1(x; s) = (1-t)x_i + tx_{i+1}; \\ S_1(y; s) = (1-t)y_i + ty_{i+1}. \end{cases} \quad (3)$$

де  $t = (s - s_i) / l_i, l_i = s_{i+1} - s_i, i = \overline{0, 1, \dots, N-1}$ .

Сукупність сплайнів  $S_1(x; u)$  та  $S_1(y; u)$ , для яких виконується властивість

$$S_1(x; u_i) = x_i, S_1(y; u_i) = y_i, i = \overline{0, 1, \dots, N},$$

називаються *інтерполяційними параметричними лінійними сплайнами*.

Розглянемо інтерполяцію кривих параметричними лінійними сплайн-функціями. Нехай на деякій кривій  $L$  задано послідовність точок  $P_i = (x_i; y_i), i = \overline{0, 1, \dots, N}$ . Введемо параметризацію кривої  $L$ :

$$\begin{cases} x = x(s); \\ y = y(s), \end{cases} \quad (4)$$

де  $s$  – параметр довжини дуги кривої  $L$ .

Вузлу  $P_i = P(x_i, y_i)$ , де

$$\begin{cases} x_i = x(s_i); \\ y_i = y(s_i), \end{cases} i = \overline{0, N} \quad (5)$$

відповідає значення параметру  $s_i$ .

Побудована крива  $L$ , для якої задано послідовність точок  $P_0 = (x_0; y_0), P_i = (x_i; y_i), P_{i+1} = (x_{i+1}; y_{i+1})$  та  $P_N = (x_N; y_N)$  показана на рис. 2.

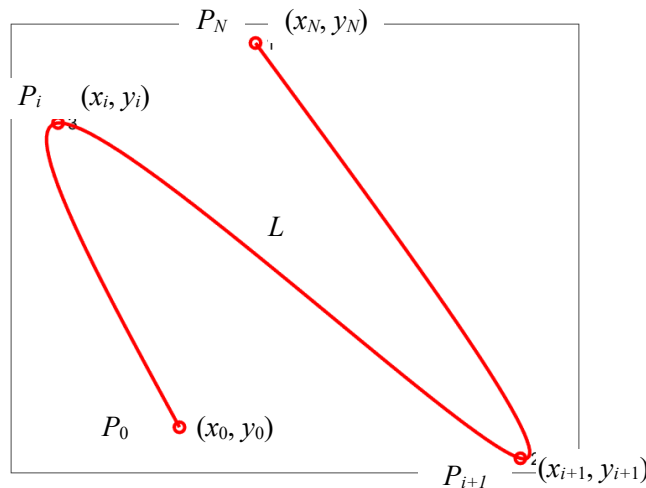


Рис. 2. Крива  $L$

Геометрично параметричний лінійний сплайн є ламаною, що складається з відрізків прямих, які з'єднують точки  $P_i, i = \overline{0, 1, \dots, N}$ . Згідно (3) отримуємо рівність [9]:

$$\frac{S'_1(y; s)}{S'_1(x; s)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, x_i \neq x_{i+1}, i = \overline{0, 1, \dots, N-1}. \quad (6)$$

За допомогою рівності (6) можна наближено розрахувати нахил дотичної до кривої  $L$  між точками  $P_i$  та  $P_{i+1}$ .

Для розрахунку похибки наближення кривої параметричною лінійною сплайн-функцією використаємо наступні теореми. Для цього позначимо через  $R_1(s)$  похибку інтерполяції параметричним лінійним сплайном:

$$R_1(S) = \sqrt{|S_1(x;s) - x(s)|^2 + |S_1(y;s) - y(s)|^2}. \quad (7)$$

Теорема 1 [9]. Якщо  $x(s), y(s) \in W_\infty^1[s_0, s_N]$ , то

$$\|R_1(s)\|_C \leq \sqrt{2\bar{l}}/2, \quad (8)$$

де  $\bar{l} = \max_i l_i$ ,  $W_\infty^1[s_0, s_N]$  – клас функцій, в якому в якості екстремальної функції може бути обраний многочлен другого ступеню.

Теорема 2 [9]. Якщо  $x(s), y(s) \in CW_{\Delta, \infty}^1[s_0, s_N]$ , то

$$\|R_1(s)\|_C \leq \frac{\sqrt{2}}{8} \bar{l}^2 \|K(s)\|_\infty. \quad (9)$$

де  $K(s)$  – кривизна кривої  $L$ , яка в точці  $(x(s), y(s))$  визначається як:

$$K(s) = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2},$$

вочевидь, що  $\|x''(s)\|_\infty \leq \|K(s)\|_\infty$ ,  $\|y''(s)\|_\infty \leq \|K(s)\|_\infty$ .

Побудова параметричного лінійного сплайна зводиться до побудови двох лінійних сплайнів однієї змінної  $S_1(x;s)$  та  $S_1(y;s)$ .

Розглянемо побудову параметричного лінійного сплайна для заданої кривої  $L$  із заданими точками  $P_0 = (x_0; y_0)$ ,  $P_i = (x_i; y_i)$ ,  $P_{i+1} = (x_{i+1}; y_{i+1})$  та  $P_N = (x_N; y_N)$ . Інтерполяційну криву параметричного лінійного сплайну вигляду (3) показано пунктирною лінією (рис. 2).

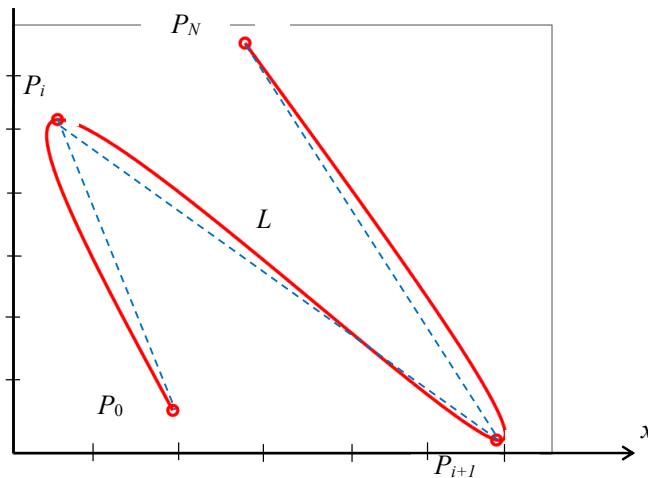


Рис. 2. Інтерполяційна крива параметричного лінійного сплайну

Неважко бачити, що така крива має значні похибки до 25 %, зниження яких може бути досягнуто за рахунок зменшення кроку інтерполяції. В цілому, для зменшення похибки можливо використати сплайни вищих порядків, такі як квадратичні або кубічні сплайни, або кубічні В-сплайни [11].

### Висновки

1. Запропоновано використання параметричних сплайнів для 2D та 3D-моделювання кривих та поверхонь у комп'ютерній графіці, Web-дизайні та 3D-моделюванні. Встановлено, що інтерполяційні параметричні сплайни дозволяють зменшити обчислювальну складність, забезпечити масштабованість рішень та значно спростити процес моделювання.

2. Розглянуто принципи побудови інтерполяційних кривих за допомогою параметричних лінійних сплайн-функцій. Наведено приклад побудови інтерполяційної кривої параметричного лінійного сплайну.

3. Визначено похибки інтерполяції при побудові кривих та поверхонь параметричними сплайнами для 2D та 3D-моделювання. Встановлено, що підвищення точності інтерполяції кривих та поверхонь при моделюванні 2D та 3D-об'єктів може бути досягнуто за рахунок підбору виду сплайн-функції.

4. Напрямок подальших досліджень є розгляд параметричних кубічних та параметричних кубічних B-сплайнів та виконання порівняльного аналізу отриманих результатів для підвищення точності побудови кривих та поверхонь в 2D та 3D-моделюванні.

### Література

1. Design and Model. <https://www.blender.org/features/modeling/>
2. Стрелковська І.В. Сплайн-апроксимація в 3D-моделюванні / І.В. Стрелковська, І.М. Соловська // Матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих учених «Гуманітарний і інноваційний ракурс професійної майстерності: Пошуки молодих вчених», м. Одеса, 18 листопада 2022 р. – С. 390-394. – <https://doi.org/10.36059/978966-397-266-4/116>
3. Стрелковська І.В. Сплайн-апроксимація в 3D-моделюванні / І.В. Стрелковська, І.М. Соловська, Н. Снігур, В. Малуґа // Матеріали міжнародної конференції «Передові технології в інформаційно-комунікаційній інженерії», м. Одеса, 17-20 липня 2023 р. – С. 22-26.
4. Стрелковська І.В. Застосування дійсних та комплексних сплайнів в задачах інфокомунікацій / І.В. Стрелковська, І.М. Соловська, Ю.О. Стрелковська // Проблеми телекомунікацій. – 2021. – № 01 (28). – С. 3-19.
5. Strelkovskaya I.V., Solovskaya I.N., Severin N.V., Paskalenko S.O. Approximation of self-similar traffic by spline-functions. Proceedings of the XIII<sup>th</sup> International Conference «Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science» (TSET'2016), Slavske, Ukraine, February 23–26, 2016. P. 132-135. <https://doi.org/10.1109/tcset.2016.7451991>
6. Strelkovskaya I.V., Solovskaya I.N., Severin N.V. Modeling of self-similar traffic. Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Applied Innovations in IT (ICAIIIT-2016), Vol. 1, Is. 5, Koethen, Germany, March, 10, 2016. P. 61-64. <https://doi.org/10.13142/KT10004.23>
7. Strelkovskaya I., Solovskaya I., Severin N., Paskalenko S. Spline approximation based restoration for self-similar traffic. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. (2017). № 3/4 (87). P. 45-50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.102999>
8. Strelkovskaya I., Solovskaya I., Strelkovska J. Spline-approximation and spline-extrapolation methods in telecommunication. Current Trends in Communication and Information Technologies. Lecture Notes in Networks and Systems, Vol. 212. Springer, Chap № 1. P. 3-20. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-76343-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76343-5_1).
9. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press, New York, 1967.
10. Larry L., Schumaker S. Spline Functions: Basic Theory. Cambridge University Press, New York, 2007.
11. Дизайн та моделювання [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://rocketmen.com.ua/>

### References

1. Design and Model. <https://www.blender.org/features/modeling/>
2. Strelkovska I.V. Splain-aproksymatsiia v 3D-modeliuvanni / I.V. Strelkovska, I.M. Solovska // Materialy VIII Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii studentiv, aspirantiv ta molodykh uchenykh «Humanitarni i innovatsiyni rakurs profesiinoi maisternosti: Poshuky molodykh vchenykh», m. Odesa, 18 lystopada 2022 r. □ S. 390-394. – <https://doi.org/10.36059/978966-397-266-4/116>
3. Strelkovska I.V. Splain-aproksymatsiia v 3D-modeliuvanni / I.V. Strelkovska, I.M. Solovska, N. Snihur, V. Maliuha // Materialy mizhnarodnoi konferentsii «Peredovi tekhnolohii v informatsiino-komunikatsiini inzhenerii», m. Odesa, 17-20 lypnia 2023 r. □ S. 22-26.
4. Strelkovska I.V. Zastosuvannia diisnykh ta kompleksnykh splainiv v zadachakh infokomunikatsii / I.V. Strelkovska, I.M. Solovska, Yu.O. Strelkovska // Problemy telekomunikatsii. – 2021. – № 01 (28). – S. 3-19.
5. Strelkovskaya I.V., Solovskaya I.N., Severin N.V., Paskalenko S.O. Approximation of self-similar traffic by spline-functions. Proceedings of the XIII<sup>th</sup> International Conference «Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science» (TSET2016), Slavske, Ukraine, February 23–26, 2016. P. 132-135. <https://doi.org/10.1109/tcset.2016.7451991>
6. Strelkovskaya I.V., Solovskaya I.N., Severin N.V. Modeling of self-similar traffic. Proceedings of the 4<sup>rd</sup> International Conference on Applied Innovations in IT (ICAIIIT-2016), Vol. 1, Is. 5, Koethen, Germany, March, 10, 2016. P. 61-64. <https://doi.org/10.13142/KT10004.23>
7. Strelkovskaya I., Solovskaya I., Severin N., Paskalenko S. Spline approximation based restoration for self-similar traffic. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. (2017). № 3/4 (87). R. 45-50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.102999>
8. Strelkovskaya I., Solovskaya I., Strelkovska J. Spline-approximation and spline-extrapolation methods in telecommunication. Current Trends in Communication and Information Technologies. Lecture Notes in Networks and Systems, Vol. 212. Springer, Chap № 1. R. 3-20. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-76343-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76343-5_1).
9. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press, New York, 1967.
10. Larry L., Schumaker S. Spline Functions: Basic Theory. Cambridge University Press, New York, 2007.
11. Dydzain ta modeliuvannia [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu : <https://rocketmen.com.ua/>