

ШАПОВАЛОВ КИРИЛО

Український державний університет науки й технологій ННІ УДХТУ

e-mail: shapovalov.lit@gmail.com

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ПРОЄКТУВАННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ ІЗ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ДИСТАНЦІЙНОМУ ФОРМАТІ

Пропонується новий підхід до проєктування систем контролю знань здобувачів освіти з дисципліни «Інтегральне числення». На відміну від більшості сучасних систем контролю знань, запропонована розробка не містить фіксованих баз завдань та відповідей. Умови формуються автоматично на основі визначених правил із використанням випадкових чисел. Згенерована задача (функція, інтеграл, від якої необхідно обчислити) перевіряється на коректність, після чого пропонується користувачу. Відповідь на завдання очікується у вигляді аналітичної первісної функції з подальшим обчисленням визначеного інтеграла, що є однією з ключових відмінностей цієї системи.

Ключові слова: дистанційне навчання, система контролю знань, інтегральне числення, правила генерації завдань, алгоритм оцінки відповідей.

SHAPOVALOV KYRYLO

Educational and Scientific Institute of Ukrainian State Chemical-Technological University

CONCEPTUAL FOUNDATIONS OF DESIGNING INTELLIGENT KNOWLEDGE ASSESSMENT SYSTEMS FOR MATHEMATICAL DISCIPLINES IN DISTANCE FORMAT

This paper proposes a novel approach to designing intelligent knowledge assessment systems for students in the discipline of «Integral Calculus» within a distance learning framework. Unlike the majority of existing knowledge control systems, which rely on static databases of predefined tasks and answers, the developed system eliminates such fixed repositories to enhance flexibility, personalization, and objectivity in evaluation. Instead, task conditions are dynamically generated based on predefined rules incorporating random numbers, ensuring each assignment is unique and tailored to individual learner needs. The generation process begins with selecting from four main categories of integrals: basic integration formulas, substitution methods, integration by parts, and integrals involving quadratic trinomials. Each category includes subclasses or templates where parameters—such as coefficients, exponents, and integration limits—are randomly assigned within specified constraints. The generated function undergoes correctness checks before presentation to the user via a web-based interface. A key distinguishing feature is the response format: users provide the analytical antiderivative rather than a numerical result. The system evaluates answers by computing the definite integral using numerical (Simpson's method) and analytical (Newton-Leibniz theorem) approaches. Simpson's rule approximates the integral using step size and function values. The Newton-Leibniz method uses the antiderivative to compute the difference at limits, ignoring the constant. The student's input is parsed, and its value is compared to the etalon. Implemented as a scalable web application, the system offers real-time feedback and analytics. It addresses limitations of traditional tools like Moodle or Khan Academy by providing unlimited variability and objective grading.

Keywords: distance learning, knowledge assessment system, integral calculus, task generation rules, answer evaluation algorithm.

Стаття надійшла до редакції / Received 03.10.2025

Прийнята до друку / Accepted 15.11.2025

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

У роботі пропонується новий підхід до проєктування систем контролю знань для здобувачів освіти з дисципліни «Інтегральне числення», що враховує сучасні виклики дистанційного навчання та потребу в персоналізованому підході. Традиційні системи контролю знань, як правило, базуються на статичних наборах завдань і відповідей, що істотно обмежує їхню гнучкість та можливості індивідуалізації. На відміну від них, запропонована система ґрунтується на динамічному підході: завдання генеруються автоматично за визначеними правилами з використанням випадкових чисел, що гарантує унікальність кожного прикладу та адаптацію до індивідуальних можливостей користувача.

Згенеровані завдання являють собою функції, для яких необхідно знайти невизначений інтеграл. Важливим етапом є перевірка коректності сформованої задачі перед її поданням користувачеві, що дає змогу уникнути методичних помилок та підвищує надійність контролю. Особливістю підходу є форма представлення відповіді: користувача подає її не у вигляді числа, а у вигляді аналітичної первісної функції. Це дає змогу оцінювати не тільки правильність результату, але й рівень розуміння методів інтегрування та глибину опанування принципів інтегрального числення.

Аналіз досліджень та публікацій

Сучасні методи обробки символьних виразів, чисельних алгоритмів і машинного навчання дають змогу створювати інтелектуальні системи для перевірки знань з інтегрального числення, з адаптацією до користувача та зворотним зв'язком [1]. Розвиток платформ для тестів, як Moodle [2], Khan Academy [3], ALEKS [4], Proctorio [5] та ExamSoft [6], показує переваги, але й обмеження: фіксованість завдань, відсутність динамічної генерації, залежність від бази даних. Недоліки — обмежена варіативність, слабка адаптація, ручна підготовка завдань. Програмне забезпечення як MATLAB та Maple сприяє засвоєнню математики через обчислення та візуалізацію.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є: полягає в розробленні та тестуванні алгоритмів генерації задач, обчислення її розв'язку, порівнянні його з розв'язком, одержаним здобувачем, та висновку про вірну (або невірну) відповідь.

Виклад основного матеріалу

Сформулюємо основні вимоги, яким, на думку автора, має задовольняти сучасна система контролю знань.

1. Важливою вимогою до сучасної системи контролю знань є відсутність статичної бази завдань. Традиційні підходи передбачають використання заздалегідь підготовлених колекцій задач та відповідей, що із часом обмежує варіативність та знижує ефективність перевірки знань. Така структура створює ризик механічного запам'ятовування рішень замість формування глибокого розуміння матеріалу. На відміну від цього, інноваційні системи мають ґрунтуватися на автоматичній генерації завдань відповідно до заданих правил і використання випадкових чисел, що забезпечує унікальність кожного прикладу та підвищує рівень об'єктивності контролю.

На основі визначених критеріїв було прийнято рішення розробляти систему у вигляді вебдодатка. Сучасна система контролю знань не мусить містити статичних баз завдань та відповідей, адже це знижує варіативність та обмежує індивідуалізацію навчального процесу. Завдання мають генеруватися динамічно на основі певних правил із використанням випадкових чисел, що дає нам змогу забезпечити унікальність кожного прикладу та запобігти механічному запам'ятовуванню рішень. Важливою вимогою є універсальний доступ. Система має бути доступною з будь-якого пристрою (комп'ютер, планшет, смартфон) та не залежати від операційної системи. Саме вебархітектура дає змогу реалізувати цей підхід, адже робота відбувається через браузер без потреби у встановленні додаткового програмного забезпечення. Система має забезпечувати можливість інтеграції з іншими освітніми платформами та сервісами дистанційного навчання. Це дає змогу органічно включати її в чинні освітні середовища та автоматично збирати результати для подальшого аналізу успішності студентів.

Ще одним критерієм є масштабованість та простота оновлення. Використання вебтехнологій дає можливість швидко вносити зміни, розширювати функціонал, виправляти помилки без потреби втручання зі сторони користувача. Отже, вебдодаток є оптимальною формою реалізації інтелектуальної системи контролю знань, що поєднує динамічність, гнучкість та зручність використання.

2. Оскільки йдеться про математичні дисципліни, то відповідь на завдання може бути не лише у вигляді числа, як це реалізовано в більшості традиційних систем, а й у вигляді формули. Це є надзвичайно важливим аспектом, адже в процесі навчання математики значну роль відіграє не просто отримання кінцевого числового результату, а саме формулювання аналітичного виразу, який відображає хід міркувань та розуміння теоретичного матеріалу. Наприклад, під час обчислення невизначених інтегралів студент може подати результат у вигляді різних, але еквівалентних формул, які з математичного погляду є правильними. Отже, система контролю знань мусить бути достатньо гнучкою, щоб коректно інтерпретувати різні варіанти подання формули, а перевірка має ґрунтуватися не на буквальному збігу з «еталонною відповіддю», а на зіставленні математичного змісту. Це створює умови для глибшого й об'єктивнішого контролю знань студентів, сприяє розвитку математичного мислення та запобігає формальному підходу до навчання. Це створює умови для більш глибокого та об'єктивного контролю знань студентів, стимулює розвиток математичного мислення та виключає формальний підхід до навчання. Для цього були використані такі бібліотеки, як MathJax [7].

MathJax — це бібліотека для відображення математичних формул на вебсторінках. Вона дає змогу автоматично перетворювати математичні формули, написані в різних форматах, у графічний вигляд, який можна відображати на сторінці. Вона дає змогу відображати формули у звичному виді, що полегшує сприйняття математичного контенту користувачами.

Резюмуючи вищевикладене, сучасна інтерактивна система контролю знань із математичних дисциплін має задовольняти таким вимогам:

- генерація завдань відбувається на підставі правил із використанням випадкових чисел;
- відбувається оцінювання відповіді, яка задається формулою;
- висновок про відповідь є об'єктивним та не залежить від способу запису формули.

Генерація завдань. Запропонований підхід орієнтований на автоматизовану генерацію задач із невизначених інтегралів та їхню подальшу перевірку в межах системи дистанційного контролю знань. Формування умов задач базується на використанні випадкових чисел у межах заданих обмежень, що дає змогу створити велику кількість унікальних варіантів для різних студентів. Такий підхід підвищує ефективність навчального процесу, а також сприяє розвитку аналітичного мислення, адже студенти змушені розв'язувати завдання з різними типами підінтегральних функцій.

Для створення умов задач використовується генератор випадкових чисел, що забезпечує вибір структури завдання відповідно до чотирьох основних тематичних категорій (позначаються як n), кожна з яких має підкласи або шаблони (позначаються як m). Таким чином, загальний вигляд підінтегральної функції, що генерується, можна подати як:

$$f(x) = \int A_{nm} dx, \quad (1)$$

де A_{nm} — функція, побудований за певною формулою залежно від обраної теми n та підкласу m .

Перелік тем та відповідних форматів виглядає так:

Тема 1. Основні формули інтегрування:

- (a) $f(x) = a * b^x + \frac{c}{x} + d * q(x)$, де
 $-q(x) \in \{\sin(x), \cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x), \frac{1}{\sin^2(x)}, \frac{1}{\cos^2(x)}\}$
 $-b \in \{2, 3, e\}$
 $-a, c, d \in [-5, 5] \cap \mathbb{Z}$.
- (b) $f(x) = x * (x + a) * (x + b)$, де $a, b \in [-5, 5]$
- (c) $f(x) = (a\sqrt{x} + b) * (c\sqrt{x} + d)$, де $a, b, c, d \in [-5, 5]$.
- (d) $f(x) = (ax)^{\frac{1-c}{b}}$, де $a, b, c \in [-4, 4], b \neq 0, c \neq 1$

Тема 2. Інтегрування за допомогою заміни змінної:

- (a) $f(x) = \frac{x^{m-1}}{\sqrt{x^{m+k}}}$, де $m \in [2, 6], k \in [-2, 6]$
- (b) $f(x) = a * x^{m-1} * \sqrt{x^m + b}$, де $m \in [2, 6], a, b \in [-4, 4]$
- (c) $f(x) = a^{b-cx}$, де $a \in [1, 4], c, b \in [1, 5]$

Тема 3. Інтегрування частинами:

- (a) $f(x) = (a * x + b) * q(cx)$, де
 $-q(x) \in \{\sin, \cos, \arcsin, \arccos, \arctg, \operatorname{arcctg}, \ln, \exp, 2x, 3x\}$
 $-a, b, c \in [-5, 5]$

Тема 4. Інтеграли, що містять квадратний тричлен:

- (a) $f(x) = \frac{1}{a * x^2 + b * x + c}$, де $a, b, c \in [-10, 10], c = a + b$
- (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a * x^2 + b * x + c}}$, де $a, b, c \in [-10, 10], c = a + b$
- (c) $f(x) = \frac{x+d}{a * x^2 + b * x - c}$, де $a, b, c, d \in [-10, 10], c = a + b$.

Кожна функція представляється у вигляді параметризованого шаблону, де значення коефіцієнтів генеруються окремо і зберігаються разом із формулою в структурованому вигляді (наприклад, JSON), що дає змогу, як створення LaTeX-виразів, так і обчислення в системі.

У процесі формування одного завдання система генерує шість або сім випадкових чисел, які задають тип інтеграла, структурну форму підінтегральної функції, значення параметрів та межі інтегрування. До прикладу, комбінація чисел 2; 1; 3; -2; 1 відповідає такому варіанту умови:

$$\int \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 4}} \quad (2)$$

Алгоритм перевірки відповідей. У запропонованій системі контролю знань із математичного аналізу перевірка правильності розв'язання завдання не ґрунтується на прямому порівнянні із заздалегідь збереженою відповіддю, як це реалізовано в традиційних системах. Замість того, щоб зберігати та порівнювати аналітичну формулу інтеграла, система виконує чисельне обчислення значення визначеного інтеграла від згенерованої підінтегральної функції на заданому відрізку інтегрування. Після цього система обробляє відповідь студента, чисельно обчислює його значення на тому ж проміжку та порівнює результати.

Центральною ідеєю є те, що відповідь вважається правильною не тоді, коли вона точно збігається з «еталонною формулою», а тоді, коли її числове значення достатньо близьке до точного значення інтеграла, отриманого чисельним методом. Це дає змогу враховувати різні аналітичні форми однієї і тієї самої функції, забезпечуючи гнучкість та коректність перевірки. Для обчислення інтегралу система використовує **метод Сімпсона**, формула має вигляд:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (3)$$

У цьому підході правильність відповіді визначається не за формальним збігом із наперед заданою формулою первісної функції, а на основі результату її застосування під час обчислення визначеного інтеграла. Це означає, що система допускає використання різних аналітичних форм запису первісної — зі змінним порядком доданків, винесеними множниками або іншими рівносильними перетвореннями — за умови, що обчислене значення інтеграла на заданому проміжку буде правильним. Такий підхід виключає необхідність синтаксичного порівняння виразів, фокусуючись виключно на математичній сутності відповіді, і забезпечує гнучкість та об'єктивність перевірки. Для обчислення визначеного інтеграла система застосовує **метод Ньютона–Лейбніца**, який ґрунтується на аналітичному знаходженні приросту первісної функції. Зокрема, якщо $f(x)$ — підінтегральна функція, а $F(x)$ — одна з її первісних, то значення інтеграла на відрізку $[a; b]$ обчислюється за класичною формулою:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Таким чином, система спочатку формує еталонну (правильну) первісну функцію для згенерованої умови, обчислює відповідне значення інтеграла, а потім — аналогічно — значення для первісної, поданої студентом. Після цього обидва значення порівнюються: якщо абсолютне відхилення між ними не перевищує

допустиму похибку ε , відповідь визнається правильною. Стандартне значення похибки в системі становить 10^{-5} , що дає змогу враховувати незначні похибки округлення або арифметичні неточності у відповідях. Такий підхід дає змогу враховувати незначні похибки округлення або арифметичні неточності, які можуть виникати під час обчислення, і гарантує коректність оцінювання, навіть за умови нестандартного подання правильної первісної. Отже, перевірка здійснюється аналітичним методом із числовим підтвердженням точності, що поєднує математичну строгість, інтерпретаційну гнучкість і високу об'єктивність оцінювання знань здобувачів освіти. З огляду на наведену структуру, можна сформулювати концептуальну модель системи автоматизованої генерації та перевірки знань, яку візуалізовано у вигляді UML-діаграми (рис. 1).

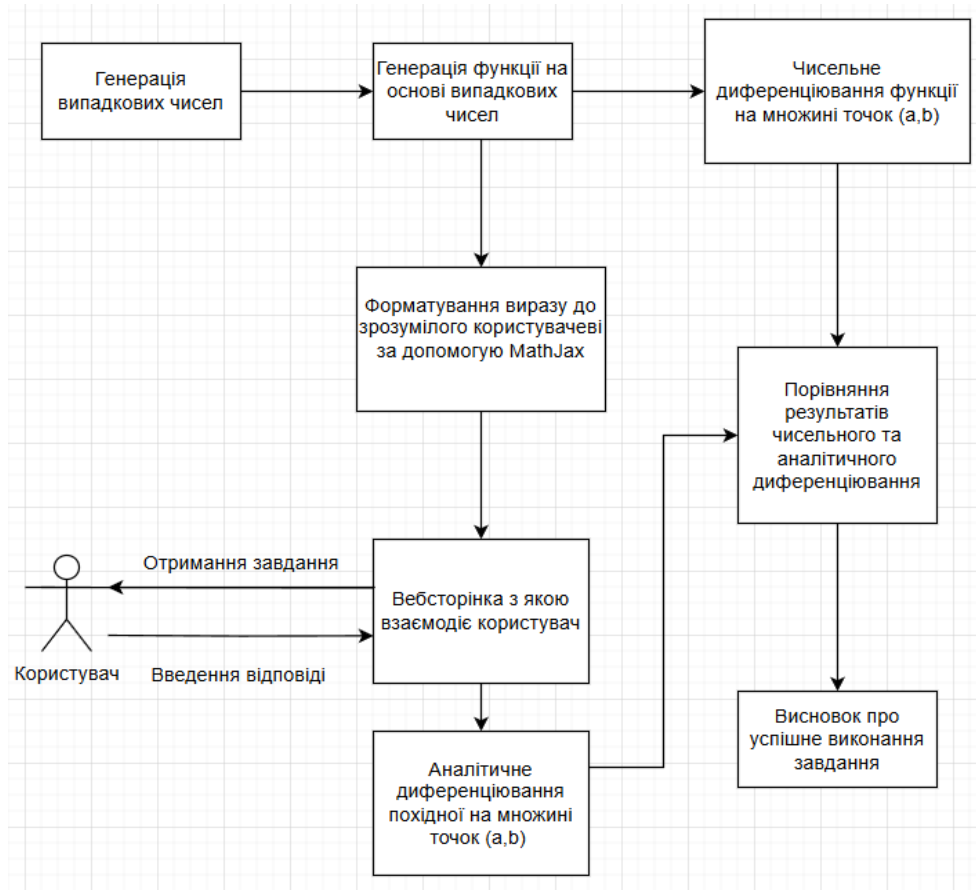


Рис. 1. UML діаграма системи

— генерація випадкових чисел — на початковому етапі система формує набір випадкових чисел, які визначають тип завдання, формат підінтегральної функції, її коефіцієнти та межі інтегрування;

— генерація математичної функції — відповідно до згенерованих чисел створюється підінтегральна функція за одним із шаблонів, що охоплюють основні методи інтегрування;

— форматування виразу з допомогою MathJax — побудована функція перетворюється у LaTeX-вираз і виводиться в зручному для сприйняття форматі з допомогою бібліотеки MathJax у вебінтерфейсі;

— вебсторінка — після відображення інтеграла користувач взаємодіє з вебінтерфейсом: отримує завдання, вводить відповідь у вигляді первісної функції в поле введення. Для зручності доступна панель із готовими функціями та математичними символами.

Перед надсиланням відповідь автоматично відображається нижче поля, що дає змогу перевірити правильність запису. Після введення відповіді користувач надсилає свою відповідь до системи для перевірки. Крім того, нижче відображається відповідь, яка введена користувачем для того, щоб перевірки коректності свого запису перед надсиланням (рис. 2);

— чисельне диференціювання функції — для кожної згенерованої функції обчислюється чисельна похідна методом скінченних різниць на множині точок;

— обчислення аналітичної похідної — використовуючи аналітичні методи, обчислюється точне значення похідної на множині точок;

— порівняння результатів — порівняння результатів чисельного та аналітичного диференціювання за формулою (7);

— висновок про успішне виконання — на основі порівняння система визначає, чи є відповідь користувача правильною або неправильною, і відображає результат у бінарному виді, або записує його.

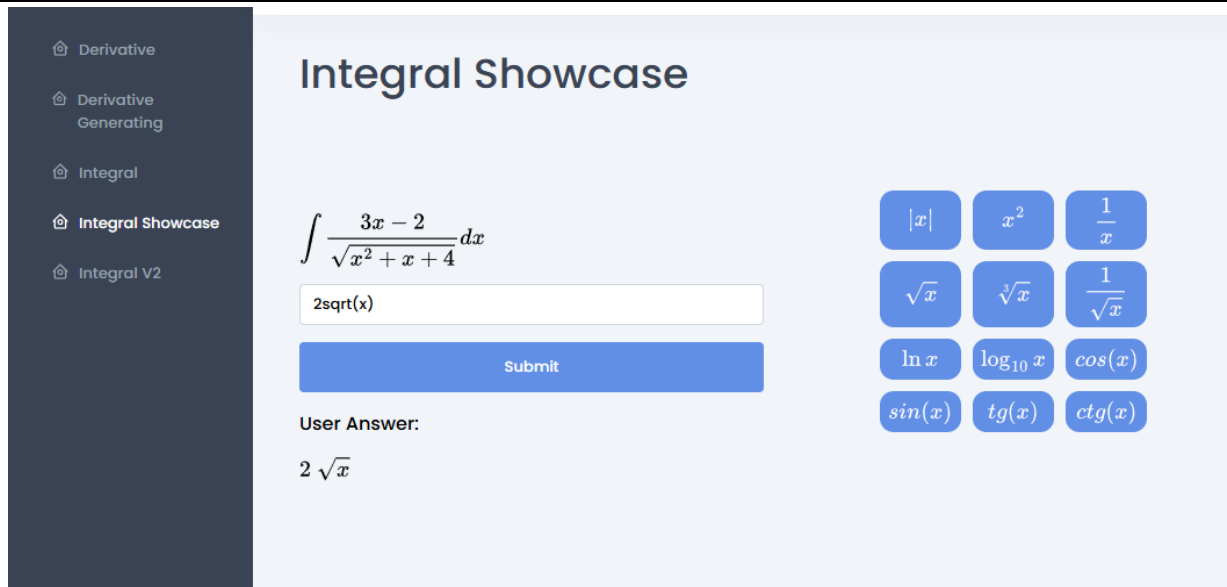


Рис. 2. Прототип системи

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Аналіз результатів чисельних експериментів підтверджує доцільність розвитку систем контролю знань із динамічною генерацією завдань на основі правил і випадкових чисел. Це забезпечує необмежену варіативність, запобігає механічному запам'ятовуванню та сприяє глибокому розумінню математики, особливо в дистанційному навчанні. Алгоритм перевірки аналітичних формул дає змогу об'єктивно оцінювати знання, аналізуючи математичний зміст, а не формальний запис.

Переваги: більша кількість унікальних завдань, персоналізований зворотний зв'язок, економія ресурсів. Недолік: обмеження на складність формул через ризик помилок під час введення відповіді, що виключає «задачі із зірочкою». Для вдосконалення варто інтегрувати інструменти для полегшення вводу. Загалом, концепція трансформує контроль знань, адаптуючись до цифрової освіти, з потенціалом для розширення функціональності.

Література

1. Філатов Г. В., Радуть О. А. Реалізація форм дистанційного навчання в освітньому процесі інженерних дисциплін / Н. V. Filatov, O. A. Radul // Education and Management. — 2009. — Т. 12, № 3–4. — С. 118—125.
2. Moodle Course: Junior Mathematics | Mount Orange School [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://school.moodledemo.net/course/view.php?id=46> (дата звернення: 06.09.2024). — Назва з екрана.
3. Khan Academy. Derivatives course [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.khanacademy.org/math/calculus-1/cs1-derivatives-definition-and-basic-rules> (дата звернення: 09.09.2024). — Назва з екрана.
4. ALEKS. Adaptive mathematics courses [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://www.aleks.com/about_aleks/course_products?cmscache=detailed&detailed=ghighedmath16_colalgebra#ghighedmath16_colalgebra (дата звернення: 12.10.2024). — Назва з екрана.
5. Proctorio [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://proctorio.com/> (дата звернення: 12.10.2024). — Назва з екрана.
6. ExamSoft [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://examsoft.com/> (дата звернення: 02.11.2024). — Назва з екрана.
7. MathJax Documentation [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://docs.mathjax.org/en/latest/> (дата звернення: 02.11.2024). — Назва з екрана.

References

1. Filatov H. V., Radul O. A. Realizatsiia form dystantsiinoho navchannia v osvitnomu protsesi inzhenernykh dysyplin / H. V. Filatov, O. A. Radul // Education and Management. — 2009. — Т. 12, № 3–4. — S. 118—125.
2. Moodle Course: Junior Mathematics | Mount Orange School [Elektronnyi resurs]. — Rezhym dostupu: <https://school.moodledemo.net/course/view.php?id=46> (data zvernennia: 06.09.2024). — Nazva z ekrana.
3. Khan Academy. Derivatives course [Elektronnyi resurs]. — Rezhym dostupu: <https://www.khanacademy.org/math/calculus-1/cs1-derivatives-definition-and-basic-rules> (data zvernennia: 09.09.2024). — Nazva z ekrana.
4. ALEKS. Adaptive mathematics courses [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://www.aleks.com/about_aleks/course_products?cmscache=detailed&detailed=ghighedmath16_colalgebra#ghighedmath16_colalgebra (дата звернення: 12.10.2024). — Назва з екрана.
5. Proctorio [Elektronnyi resurs]. — Rezhym dostupu: <https://proctorio.com/> (data zvernennia: 12.10.2024). — Nazva z ekrana.
6. ExamSoft [Elektronnyi resurs]. — Rezhym dostupu: <https://examsoft.com/> (data zvernennia: 02.11.2024). — Nazva z ekrana.
7. MathJax Documentation [Elektronnyi resurs]. — Rezhym dostupu: <https://docs.mathjax.org/en/latest/> (data zvernennia: 02.11.2024). — Nazva z ekrana.