

МІКОЛА КОЛІСНИК

Вінницький національний аграрний університет

<https://orcid.org/0000-0001-5502-6556>e-mail: kolisnik30@gmail.com

СТРУКТУРИЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ПІДСУМОВУВАННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ ПЛАСТИЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ: ВІД СКАЛЯРНИХ ДО ТЕНЗОРНИХ ПІДХОДІВ

У даній роботі проведено системне дослідження підходів до моделювання граничного стану металевих матеріалів в умовах холодного пластичного деформування на основі теорії підсумовування пошкоджень. Наголошено на актуальності проблеми передчасного руйнування конструкційних матеріалів, спричиненого накопиченням пошкоджень при інтенсивних деформаційних навантаженнях. Встановлено, що більшість існуючих моделей мають фрагментарний характер і не забезпечують цілісного уявлення про механізми формування граничного стану при нестационарному навантаженні. У зв'язку з цим запропоновано концепцію багаторівневої моделі, яка включає три ключові компоненти: модель підсумовування пошкоджень, поверхню (криву) граничних деформацій та модель траєкторії деформування макророб'ємної частинки матеріалу.

Проведено класифікацію моделей за математичним типом опису (скалярні, векторні, тензорні) та принципом підсумовування (лінійні, нелінійні), зокрема детально проаналізовано скалярні моделі на основі класичних підходів Пальмгрена-Майнера. Показано, що подібні моделі дозволяють ефективно описувати граничну деформацію матеріалів у плоскому напруженому стані та є зручними для інженерної реалізації, проте мають обмежену чутливість до впливу зміцнення та складних форм навантаження. Особливу увагу приділено аналізу критеріїв граничного стану, серед яких: моделі Кокрофта-Латама, Броза, Райса-Трейсі, Макклінтока, Кліфта та інші. Доведено, що більшість із них можуть бути інтерпретовані як часткові випадки загальної теорії підсумовування пошкоджень, що відкриває можливість побудови уніфікованої моделі на основі єдиної методології.

У роботі показано вплив залишкових пружних деформацій, температури, швидкості деформації та напружено-деформованого стану на процес накопичення пошкоджень. Запропоновано адаптацію безрозмірних інваріантних показників для опису схеми напруження, що підвищує універсальність та точність моделей. Додатково обґрунтовано доцільність використання спрощених математичних виразів, які легко реалізуються в інженерних розрахунках та чисельному моделюванні, за умови мінімізації кількості емпіричних параметрів. Це дозволяє зменшити обсяг необхідних експериментальних даних для калібрування моделей і підвищити їх прикладну ефективність.

Зроблено висновок про перспективність подальшого розвитку моделей пошкоджуваності шляхом їх уніфікації та інтеграції нових фізичних факторів, зокрема механізмів зміцнення та локалізації деформацій. Результати дослідження можуть бути використані для підвищення точності оцінки залишкового ресурсу матеріалів у критичних вузлах машин і конструкцій, а також у суміжних міждисциплінарних галузях - біомеханіці, медичному матеріалознавстві та спортивній фізіології. Робота є внеском у розвиток теоретичних засад механіки руйнування та слугує основою для побудови сучасних моделей поведінки матеріалів у складних умовах експлуатації.

Ключові слова: пластичне деформування, граничний стан, накопичення пошкоджень, теорія підсумовування пошкоджень, напружено-деформований стан, модель руйнування, поверхня граничних деформацій, зміцнення матеріалу, критерії руйнування, холодна обробка тиском, чисельне моделювання, залишкові напруження.

MYKOLA KOLISNYK

Vinnitsia National Agrarian University

STRUCTURIZATION OF DAMAGE SUMMARISATION MODELS UNDER LOCAL PLASTIC DEFORMATION: FROM SCALAR TO TENSOR APPROACHES

This paper presents a systematic study of approaches to modeling the limit state of metallic materials under cold plastic deformation conditions based on the theory of damage summation. The relevance of the problem of premature failure of structural materials caused by the accumulation of damage under intense deformation loads is emphasized. It is established that most existing models are fragmentary in nature and do not provide a holistic view of the mechanisms of limit state formation under unsteady loading. In this regard, the concept of a multilevel model is proposed, which includes three key components: a damage summation model, a surface (curve) of limit deformations, and a model of the deformation trajectory of a macrovolume particle of material. The models are classified by the mathematical type of description (scalar, vector, tensor) and the principle of summation (linear, nonlinear), in particular, scalar models based on the classical Palmgren-Miner approaches are analyzed in detail. It is shown that such models allow to effectively describe the ultimate deformation of materials in a plane stressed state and are convenient for engineering implementation, but have limited sensitivity to the effect of strengthening and complex loading forms. Particular attention is paid to the analysis of the criteria of the ultimate state, including: the models of Cockcroft-Latham, Brozo, Rice-Tracy, McClintock, Clift and others. It is proved that most of them can be interpreted as partial cases of the general theory of damage summation, which opens up the possibility of building a unified model based on a single methodology.

The paper shows the influence of residual elastic deformations, temperature, strain rate and stress-strain state on the process of damage accumulation. The adaptation of dimensionless invariant indices to describe the stress scheme is proposed, which increases the universality and accuracy of the models. Additionally, the feasibility of using simplified mathematical expressions that are easily implemented in engineering calculations and numerical modeling is substantiated, provided that the number of empirical parameters is minimized. This allows reducing the amount of experimental data required for model calibration and increasing their applied effectiveness.

The conclusion is made about the prospects for further development of damage models by unifying them and integrating new physical factors, in particular, strengthening mechanisms and deformation localization. The results of the study can be used to increase the accuracy of estimating the residual resource of materials in critical components of machines and structures, as well as in related interdisciplinary fields - biomechanics, medical materials science and sports physiology. The work is a contribution to the development of theoretical foundations of fracture mechanics and serves as the basis for building modern models of material behavior in difficult operating conditions.

Keywords: plastic deformation, limit state, damage accumulation, damage summation theory, stress-strain state, fracture model, limit strain surface, material strengthening, fracture criteria, cold working by pressure, numerical modeling, residual stresses.

Постановка проблеми

Під час інтенсивного пластичного деформування металевих заготовок виникає ризик накопичення критичного рівня пошкоджень у матеріалі, що може призвести до передчасного руйнування або втрати працездатності готового виробу. Як зазначають І. С. Алієв, О. В. Грушко, С. П. Гожій, В. А. Матвійчук, В. М. Михалевич, В. А. Тітов та інші дослідники, однією з ключових проблем при локальному формоутворенні є обмежена пластичність матеріалу, яка істотно впливає на стабільність процесів штампування обкочуванням (ШО) та визначає межі їх технологічного застосування.

Це обумовлює потребу у впровадженні ефективних підходів до кількісної оцінки розвитку пошкоджень у процесі пластичного формозмінення. Одним із найбільш обґрунтованих методів у цьому напрямі є теорія підсумовування пошкоджень, яка передбачає використання як лінійних, так і нелінійних моделей для прогнозування моменту руйнування матеріалу з урахуванням зміни напружено-деформованого стану та температури.

Незважаючи на значну кількість наукових праць, присвячених проблематиці пластичного руйнування, існує фрагментарність у підходах до побудови моделей: окремі дослідження розглядають лише окремі аспекти теорії підсумовування пошкоджень, не інтегруючи їх у єдину цілісну концепцію. Це ускладнює розвиток теорії як в теоретичному, так і в прикладному напрямках.

Систематизація та критичний аналіз наявних моделей і підходів у контексті теорії підсумовування пошкоджень є актуальним завданням. Це дозволить не лише глибше зрозуміти механізми руйнування при пластичному деформуванні, але й підвищити ефективність прогнозування ресурсу матеріалу в інженерних і нетрадиційних застосуваннях, зокрема у біомеханіці та спортивній фізіології.

У світлі стрімкого зростання інтересу до проблематики пластичного руйнування в ХХІ столітті, що відображено у працях Т. Вержбицького, Г. Деля, Х. Альтенбаха та інших, особливої уваги потребує аналіз сучасного стану розвитку критеріїв руйнування. При цьому бракує узагальнюючих досліджень, які б розглядали сучасні підходи з позиції саме теорії підсумовування пошкоджень, що і становить наукову проблему даного дослідження.

Мета і задачі дослідження

Метою статті є розробка та обґрунтування уніфікованої моделі прогнозування граничного стану матеріалів при холодному пластичному деформуванні на основі теорії підсумовування пошкоджень з урахуванням напружено-деформованого стану, температури, траєкторії деформування та параметрів зміцнення.

Матеріал і результати дослідження

У результаті проведеного аналізу встановлено, що теорія підсумовування пошкоджень при холодному пластичному деформуванні може бути структурована у вигляді трьох взаємопов'язаних компонентів:

1. Модель підсумовування пошкоджень, яка визначає спосіб накопичення пошкоджень у матеріалі в процесі деформування;
2. Крива (або поверхня) граничних деформацій при стаціонарному деформуванні, яка відображає залежність між допустимими значеннями деформації та напруженого стану;
3. Модель траєкторії деформування макрочастинки матеріалу, що враховує зміну параметрів деформації у часі та просторі.

Розглянуту структуру можна інтерпретувати як багаторівневу модель, у якій модель підсумовування пошкоджень виконує роль «контейнера», до якого вбудовуються дві інші складові - модель граничних деформацій та модель траєкторії деформування. Такий підхід дозволяє формалізувати оцінку граничних станів матеріалу при нестаціонарному деформуванні, що є характерним для більшості реальних процесів обробки тиском.

У межах дослідження виконано класифікацію моделей підсумовування пошкоджень за критерієм типу математичного опису: скалярні, векторні та тензорні. Залежно від характеру підсумовування пошкоджень ці моделі також поділяються на лінійні та нелінійні.

Найпростішим і найбільш поширеним варіантом є скалярна модель з лінійним принципом підсумовування пошкоджень, яка широко використовується для прогнозування граничних деформацій $\bar{\varepsilon}_f$ при плоскому напруженому стані. У загальному вигляді така модель дозволяє визначати критичні значення пластичної деформації, за досягнення яких імовірно руйнування матеріалу. Конкретне математичне формулювання такої моделі надає можливість реалізувати її в чисельних розрахунках складних технологічних процесів, зокрема штампування обкочуванням.

$$\psi(\bar{\varepsilon}_i) = \int_0^{\bar{\varepsilon}_i} \frac{d\bar{\varepsilon}_i}{e_{fs}[\eta(\bar{\varepsilon}_i)]},$$
$$0 \leq \psi(\bar{\varepsilon}_i) < 1, \bar{\varepsilon}_i \in [0, \bar{\varepsilon}_f], \psi(\bar{\varepsilon}_f) = 1, \quad (1)$$

Тут ψ - рівень пошкоджень макрочастинки; $\bar{\varepsilon}_i$ - накопичена пластична деформація; η - показник напруженого стану; $\eta(\bar{\varepsilon}_i)$ - траєкторія деформування; $e_{fs}(\eta)$ - крива граничних деформацій при стаціонарному деформуванні.

Вперше скалярні моделі, що базуються на лінійному принципі підсумовування пошкоджень, були запропоновані у працях Пальмгрена та Майнера, які заклали фундамент для кількісного опису втомного руйнування матеріалів. Надалі подібні моделі знайшли широке застосування в різних галузях механіки руйнування та матеріалознавства, зокрема для:

- прогнозування тривалої міцності матеріалів у межах процесів повзучості;
- аналізу малоциклової та багатоциклової втоми;
- оцінки зношування матеріалів в умовах тертя та контактного навантаження;
- прогнозування корозійної стійкості в агресивних середовищах;
- моделювання накопичення пошкоджень у біоматеріалах та інших міждисциплінарних сферах.

У межах даного дослідження показано, що для задач прогнозування часу до руйнування при повзучості в умовах плоского напруженого стану, модель, аналогічна класичній моделі Пальмгрена-Майнера, може бути записана у вигляді:

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{t_{fs}[\eta(\tau), \sigma_i(\tau)]},$$

$$0 \leq \psi(t) < 1, \quad t \in [0, t_f], \quad \psi(t_f) = 1., \quad (2)$$

Для опису тривалої міцності матеріалу в умовах простого розтягу за змінного у часі осьового напруження, модель, аналогічна (2), традиційно записується у формі інтеграла Бейлі, що узагальнює підхід до оцінки залишкового ресурсу матеріалу при повзучості:

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{t_{fs}[\sigma_i(\tau)]}, \quad (3)$$

де $t_{fs} = t_{fs}[\sigma_i(\tau)]$ - крива тривалої міцності при розтязі.

Моделі (1) та (2) наведено з метою демонстрації єдності теоретичного підходу до прогнозування граничного стану об'єкта дослідження, що є спільним для широкого класу прикладних задач у різних галузях техніки та науки, зокрема в металознавстві, механіці руйнування, трибології, а також біомеханіці та матеріалознавстві конструкційних і функціональних матеріалів.

Незалежно від фізичної природи процесу пошкодження - чи то повзучість, втома, пластичне деформування або фреттинг - загальний підхід до оцінки ресурсу базується на принципі інтегрального накопичення пошкоджень до досягнення критичного рівня.

У цьому контексті призначення моделі (3) полягає у визначенні часу до руйнування t_f на основі такого узагальненого співвідношення:

$$\int_0^{t_f} \frac{d\tau}{t_{fs}[\sigma_i(\tau)]} = 1, \quad (4)$$

І заданого закону зміни у часі інтенсивності напружень $\sigma = \sigma_i(t)$.

При цьому, вихідною інформацією, яка характеризує властивості конкретного матеріалу в умовах тривалого навантаження, слугує крива тривалої міцності. Ця крива встановлює залежність між граничним значенням напруження, яке матеріал може витримувати без руйнування, та тривалістю дії цього напруження:

$$t_{fs} = t_{fs}[\sigma_i(\tau)], \quad (5)$$

В класичних працях цю залежність часто подають у вигляді степеневій функції:

$$t_{fs} = A\sigma_i^\alpha, \quad (6)$$

де A , α - матеріальні сталі.

Аналогічне представлення залежності (5), тобто функціонального зв'язку між рівнем напруження та часом до руйнування, як правило, визначають емпіричним шляхом на основі експериментальних досліджень до моменту руйнування серії зразків одного й того самого матеріалу при постійній температурі. Кожен зразок або група зразків піддається навантаженню унікальною сталою величиною σ_i напруження, яка не змінюється протягом усього часу випробування до руйнування.

На підставі отриманих даних будується залежність вигляду:

$$\bar{e}_{fs} = \bar{e}_{fs}(\eta), \quad (7)$$

Для моделі (1), яка базується на лінійному принципі підсумовування пошкоджень, функціональна залежність між параметрами навантаження та граничним станом може бути отримана на основі певних теоретичних міркувань, зокрема виходячи з гіпотези про адитивність пошкоджень та припущень щодо характеру напружено-деформованого стану. Водночас, калібрування подібних залежностей, тобто визначення числових значень параметрів моделей, обов'язково здійснюється на основі експериментальних даних.

При отриманні аналітичного представлення моделі - як на основі емпіричного, так і на основі теоретичного підходу - доцільно дотримуватись таких принципів:

1. Спрощення математичних виразів: необхідно прагнути до побудови моделей у вигляді якомога простіших аналітичних формул, які легко інтерпретуються, реалізуються в обчисленнях та не перевантажені другорядними членами.

2. Універсальність моделей: аналітичні залежності повинні забезпечувати адекватний опис поведінки широкого спектру конструкційних матеріалів (метали, сплави, композиційні матеріали тощо) у широкому діапазоні змін аргументів - наприклад, рівня навантаження, температури, швидкості деформації тощо.

3. Мінімізація числа емпіричних параметрів: слід прагнути до моделей, які містять мінімальну кількість матеріальних сталих, що мають бути визначені з експериментів, що дозволяє зменшити обсяг необхідних випробувань і спростити процедуру впровадження моделі у практику.

Дотримання цих принципів сприяє підвищенню загальної ефективності моделі - як з точки зору точності прогнозування, так і з точки зору зручності її використання в інженерних розрахунках та комп'ютерному моделюванні.

З огляду на велику кількість наукових праць, присвячених проблематиці руйнування матеріалів, а також різноманіття підходів до побудови відповідних моделей, доцільним є зосередження уваги на тих підходах, які отримали найбільше визнання або мають значний потенціал для подальшого розвитку. У цьому дослідженні зроблено акцент на підходах, що детально розглянуті в оглядових працях [1,3, 4, 5, 6, 7], з метою виявлення методологічної спільності та можливості їх інтеграції в загальну структуру теорії підсумовування пошкоджень.

Попри відмінності у фізичній інтерпретації й математичній формі, більшість із них можуть бути інтерпретовані як окремі реалізації загальної схеми підсумовування пошкоджень, за умови відповідної адаптації структури моделі. Це свідчить про універсальність концепції підсумовування пошкоджень як базового підходу до прогнозування граничних станів у різноманітних задачах механіки матеріалів.

1. Модель граничного стану Кокрофта-Латама:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \sigma_1 d\bar{\epsilon}_i = C, \quad (8)$$

2. Модель граничного стану Кокрофта-Латама-Оха:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{\sigma_1}{\sigma_i} \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (9)$$

3. Критерій гідростатичного напруження:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{\sigma_m}{\sigma_i} \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (10)$$

4. Критерій Кліффа:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \sigma_i \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (11)$$

5. Критерій Брзо:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - \sigma)} \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (12)$$

6. Загальний критерій Райса-Трейсі:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \left(0.558 \sinh\left(\frac{3\sigma}{2\sigma_i}\right) + 0.008v \cosh\left(\frac{3\sigma}{2\sigma_i}\right) \right) \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (13)$$

7. Спрощений критерій Райса-Трейсі:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \exp\left(\frac{3\sigma}{2\sigma_i}\right) \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (14)$$

8. Критерій Макклінтока:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_i}\right) + \frac{3}{4} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_i} \right) \cdot d\bar{\epsilon} = C, \quad (15)$$

9. Критерій перелому Джонсона-Кука:

$$\bar{\epsilon}_{fs} = C_1 + C_2 \exp(C_3 \eta), \quad (16)$$

10. Критерій Сюе-Вежбіцького:

$$\bar{\epsilon}_{fs} = C_1 \exp(-C_2 \eta) - (C_1 \exp(-C_2 \eta) - C_3 \exp(-C_4 \eta)) \left(1 - \xi^{\frac{1}{n}}\right)^n, \quad (17)$$

де ξ - безрозмірний інваріантний параметр,

$$\xi = \frac{27}{2} \frac{s_1 s_2 s_3}{\sigma_i^3}, \quad (18)$$

s_1, s_2, s_3 - головні компоненти девіатора напружень.

Очевидно, що зовнішньо численні критерії руйнування та моделі, розглянуті в науковій літературі, можуть виглядати як окремі теорії, кожна з яких має власну фізичну інтерпретацію та математичне підґрунтя. Проте важливою науковою задачею є глибокий аналіз цих критеріїв і встановлення їхніх взаємозв'язків з теорією підсумовування пошкоджень, що дозволить сформувати уніфіковану модель, придатну для практичного застосування в інженерних розрахунках.

У багатьох моделях ці пружні деформації або ігноруються, або вводяться спрощено, що може бути джерелом похибок при чисельному моделюванні напруженого стану, зокрема при побудові траєкторій деформування макрооб'ємних частинок матеріалу. Наявність залишкових пружних напружень може також впливати на накопичення пошкоджень, особливо у випадках циклічного або комбінованого навантаження.

Таким чином, врахування пружних деформацій у рамках теорії підсумовування пошкоджень, а також їх взаємодії з пластичними деформаціями, становить перспективний напрям подальших досліджень, що дозволить підвищити точність прогнозування граничного стану матеріалів при складному навантаженні в процесах обробки тиском.

Саме тому під час вибору координат для відображення залежності (1.10) було обрано показник η , який представляє відношення першого інваріанта тензора напружень до інтенсивності напружень, що використовується різними авторами з різними масштабними коефіцієнтами.

Саме ця версія показника η традиційно використовується вчислених працях Н. Dell, зокрема, [7]. В працях Вержбіцького та його багатьох послідовників [1, 2, 3, **Помилка! Джерело посилання не знайдено.**4, 5] цей показник звичайно позначають так само (ми позначатимемо через $\bar{\eta}$) і визначають як:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \eta, \quad (19)$$

В таблиці 1 наведено значення різних версій показника граничних деформацій для найбільш розповсюджених схем плоского напруженого стану. Ці дані ілюструють варіативність критичних параметрів залежно від типу напруженого стану, що є важливим фактором для коректного застосування моделей підсумовування пошкоджень.

Таблиця 1

Порівняння числових значень показників η і $\bar{\eta}$

	Двоосовий рівномірний стиск $\sigma_2 = \sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = 0$	Рівномірний стиск $\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	Чистий зсув $\sigma_1 = -\sigma_3$ < 0 , $\sigma_2 = 0$	Рівномірний розтяг $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$	Чистий згин $\sigma_1 = -\sigma_3$ < 0 , $\sigma_2 = 0$	Двоосовий рівномірний розтяг $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$
η	-2	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$\bar{\eta}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{3}$

Саме тому, що для цих схем версія показника η , на відміну від версії показника $\bar{\eta}$, набуває цілих значень, ми вважаємо цю версію показника більш зручною. Зазначимо, що тут не йдеться про жодні принципові відмінності, а лише про уподобання різних авторів.

Зауважимо, що в роботі [3] наведено узагальнене представлення всіх моделей типу (2), що суттєво розширює можливості їх застосування. Зокрема, автори [8] запропонували єдину формалізацію кривих або поверхонь граничних деформацій при стаціонарному деформуванні, яка враховує вплив різних параметрів напруженого стану, температури та швидкості деформування.

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}^f} f(\bar{\eta}) d\bar{\varepsilon}_i = C, \quad (20)$$

де функцію f названо ваговою, що цілком відображає її сутність.

Під це представлення, а головне, під представлення (2), не підпадають аналітичні представлення моделей Кліффа:

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}^f} \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon} = C, \quad (21)$$

та Лероя:

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}^f} (\sigma_1 - \sigma) d\bar{\varepsilon}_i = C, \quad (22)$$

а також перша версія моделі Кокрофта:

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}^f} \sigma_1 d\bar{\varepsilon}_i = C, \quad (23)$$

На рис. 1 представлені результати порівнянні обчислень за двома моделями, що калібрували на основі деформації до руйнування при $\eta = 0$. Модель Брозо не тільки так само, як і модель Кокрофта-Летема-Оха відображає нескінченну пластичність матеріалу при $\eta \leq -1$, а й з цього рисунку видно, що спостерігається практично збіг результатів обчислення за цими моделями на проміжку $-1 < \eta \leq 0$. Згідно моделі Брозо, при $\eta > 1$ пластичність матеріалу має різко зменшуватися і стає рівною нулю при $\eta \approx 1.96$.

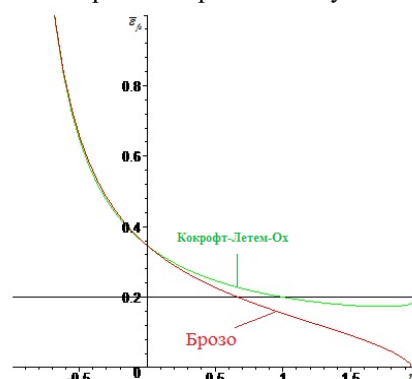


Рис. 1. Граничні криві деформацій при стаціонарному деформуванні за моделями Кокрофта-Летема-Оха та Брозо

З використанням методики, що запропонована авторами [9], стосовно плоского напруженого стану показник ν може бути представлений через показник η

$$\nu = \sqrt{3} \cot \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1}{2} \eta (3 - \eta^2) \right) + \frac{\pi}{3} \right), \quad (24)$$

На рис. 2 показано графіки залежності різних інваріантних безрозмірних показників напруженого та деформованого стану від показника η , що характеризує напружений стан за умов

плоскої деформації. Ці графіки є важливим елементом для аналізу закономірностей розподілу напружень і деформацій у заготовці під час обробки тиском.

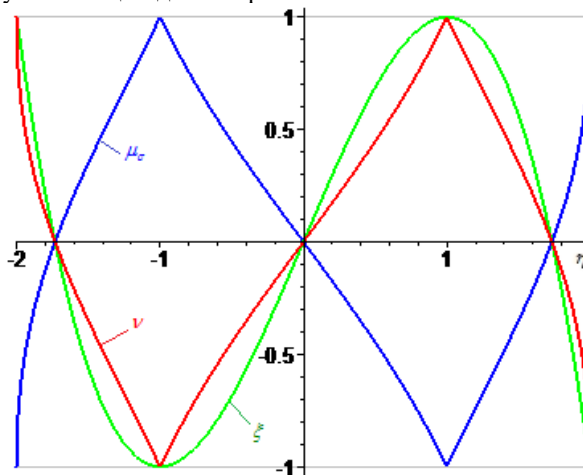


Рис. 2. Безрозмірні показники напруженого стану

Модель Макклінтока, так само, як і модель Кокрофта-Летема-Оха, описує необмежену пластичність матеріалів при рівномірному стиску, тобто при $\eta \rightarrow -1 + 0$. Модель Макклінтока відображає спробу пов'язати властивості граничних деформацій в залежності від напруженого стану з коефіцієнтом зміцнення n того самого матеріалу. Це є важливою особливістю даної моделі, оскільки встановлення функціональних зв'язків між матеріальними сталими, що характеризують різні властивості матеріалу, дозволяє зменшити кількість незалежних параметрів, необхідних для калібрування моделі. Такий підхід не лише спрощує процедуру практичного застосування моделі, але й сприяє її більш глибокій фізичній інтерпретації.

В праці [8] розглядається крива течії матеріалу у вигляді:

$$\sigma_i = \sigma_1 \bar{\varepsilon}^n, \quad (25)$$

де $\sigma_1 = \sigma_i(\bar{\varepsilon} = 1)$.

Варто звернути увагу, що в указаній праці припущено редакторську помилку, внаслідок чого замість правильного виразу (25) було наведено помилковий аналітичний запис, який не відповідає фізичному змісту моделі $\sigma_i = \sigma_1 \varepsilon^{-n}$. Це може ввести в оману дослідників, які намагаються відтворити або використати запропонований підхід у власних розрахунках [9].

Коефіцієнт зміцнення n Макклінток пропонує визначати на основі експериментальної кривої течії за співвідношенням:

$$n = \frac{\sigma_i(\bar{\varepsilon}_{max})}{\sigma_{avg}}, \quad (26)$$

Продемонструємо сутність та деталі отримання цього співвідношення, що впливає з означення середнього значення функції $\sigma_i(\bar{\varepsilon})$ на відрізьку $[0; \bar{\varepsilon}_{max}]$:

$$\sigma_{avg} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{max} \int_0^{\bar{\varepsilon}_{max}} \frac{1}{\sigma_1 \bar{\varepsilon}^n dx} \sigma_i(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}}, \quad (27)$$

або

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_i(\bar{\varepsilon}_{max})}{n+1}, \quad (28)$$

звідки і впливає співвідношення (26).

На рисунку 3 наведено графік типової кривої течії.

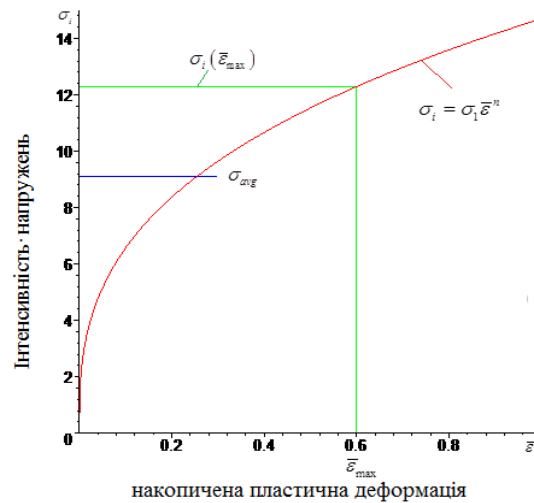


Рис. 3. Типова крива течії матеріалу

Для незміцнюваного матеріалу $n = 0$ і співвідношення (27) дещо спрощується

$$\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{2\sqrt{3}c}{3 \left(\sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(\eta + \cos(\alpha))\right) - \sin(\alpha) \right)} - 1, \quad 1 < \eta \leq 2, \quad n \geq 0, \quad n \neq 1, \quad (29)$$

Співвідношення (27) не існує при $n \neq 1$, але існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{c}{\frac{1}{(1-n)} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1-n)(\eta + \cos(\alpha))\right) - \sin(\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{3}(\eta + \cos(\alpha)) - 3 \sin(\alpha)}, \quad (30)$$

На рисунку 4 наведено криві, з порівняння яких можна зробити висновок, що при зміні значень параметра зміцнення n у широкому діапазоні, його вплив на величину граничних деформацій при стаціонарному деформуванні залишається незначним [10]. Така поведінка може інтерпретуватись двояко:

1. Або як відсутність тісного фізичного зв'язку між мірою зміцнення матеріалу (яка визначає його здатність опиратись подальшій деформації) та залежністю граничних деформацій від показника напруженого стану;
2. Або як свідчення недосконалості математичної форми моделі Макклінтока, яка, можливо, неадекватно враховує вплив зміцнення на межу пластичності при складному напруженому стані.

У будь-якому разі така низька чутливість моделі до одного з ключових фізичних параметрів матеріалу викликає необхідність:

- переосмислення структури моделі з метою підвищення її чутливості до фізичних властивостей матеріалу;
- проведення додаткових експериментальних досліджень, які дозволять з'ясувати реальний вплив зміцнення на граничні деформації;
- перевірки альтернативних підходів, в яких механізм зміцнення інтегрується в модель через інші параметри (наприклад, через поверхні текучості або критерії локалізації деформацій).

Таким чином, результати, наведені на рис. 4, дозволяють поставити під сумнів універсальність моделі Макклінтока в її класичному вигляді та підкреслюють необхідність подальшої роботи над удосконаленням моделей, що описують граничний стан матеріалу з урахуванням впливу зміцнення [11].

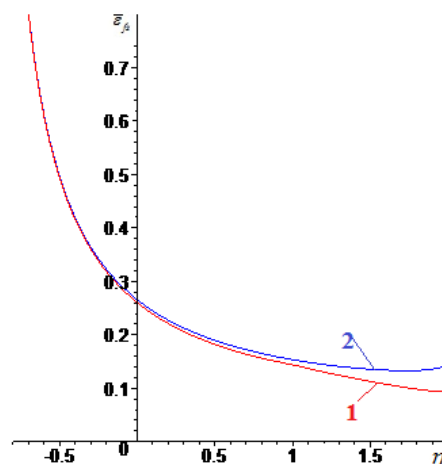


Рис. 4. Криві граничних деформацій при стаціонарному деформуванні, що розраховані за моделлю Макклінтока при різних значеннях параметра зміцнення: 1 - розрахунок за (27), (28) при $n=0$; 2 - розрахунок за (30).

Варто звернути увагу, що зазначене суттєве збільшення граничної деформації при рівномірному стиску справляє нехтовно малий вплив на розрахункові значення кривої граничних деформацій при стаціонарному деформуванні в інтервалі $\eta \in (0,1)$, що ілюструється кривими 1 на рис. 5.

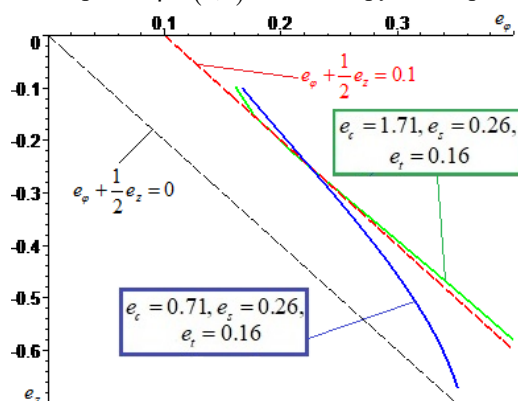


Рис. 5. Траскторія деформацій при рівномірному стиску та криві граничних деформацій торцевого стиснення з бочкоутворенням

Таким чином, одним з головних факторів, що впливають на пластичність металів в умовах холодного деформування, є схема напруженого стану [12]. Залежність пластичності від показників, що характеризують схему напруженого стану, називають поверхнею граничних деформацій.

Висновки

У ході дослідження встановлено, що теорія підсумовування пошкоджень є ефективним підходом для прогнозування граничного стану матеріалів при холодному пластичному деформуванні. Ця теорія дозволяє кількісно оцінювати накопичення пошкоджень у матеріалі в умовах складного напружено-деформованого стану та змінної температури, що є типовими для процесів обробки тиском.

Запропонована структура моделі у вигляді тривірневої схеми, яка включає модель підсумовування пошкоджень, поверхню граничних деформацій і модель траскторії деформування макрочастинки, забезпечує цілісний підхід до аналізу руйнування матеріалів. Така побудова дозволяє врахувати як локальні характеристики процесу деформації, так і зміну стану матеріалу у часі та просторі.

Виконано класифікацію існуючих моделей пошкоджень залежно від типу математичного опису (скалярні, векторні, тензорні) та характеру підсумовування (лінійні й нелінійні). Показано, що лінійні скалярні моделі, зокрема моделі типу Пальмгрена-Майнера, є зручними для інженерного використання, але мають обмежену чутливість до параметрів зміцнення та геометрії напруженого стану.

Проаналізовано широкий спектр критеріїв граничного стану, серед яких моделі Кокрофта-Латама, Брозо, Райса-Трейсі, Макклінтока та інші. Встановлено, що попри їх зовнішню різноманітність, більшість з них можуть бути інтерпретовані як часткові випадки загального підходу до підсумовування пошкоджень. Це дозволяє інтегрувати їх у єдину уніфіковану модель прогнозування граничного стану.

Показано, що вплив коефіцієнта зміцнення матеріалу на граничні деформації є менш вираженим у деяких класичних моделях, зокрема у моделі Макклінтока. Це свідчить про необхідність удосконалення математичного опису впливу зміцнення та перегляду структури моделі для підвищення її фізичної достовірності.

Окрему увагу приділено впливу залишкових пружних деформацій на точність прогнозування граничного стану. Наявність пружних напружень, які не враховуються або вводяться спрощено у більшості моделей, може бути джерелом похибок, особливо у випадках циклічного або комбінованого навантаження. Це обумовлює необхідність подальших досліджень у цьому напрямі.

Запропоновано принципи побудови ефективних моделей підсумовування пошкоджень: спрощення аналітичних виразів, універсальність щодо типу матеріалу та умов деформування, мінімізація кількості емпіричних параметрів. Дотримання цих принципів дозволяє створювати моделі, зручні для практичного використання у чисельному моделюванні та інженерних розрахунках.

Таким чином, результати дослідження свідчать про високий потенціал теорії підсумовування пошкоджень для побудови універсальних, адаптивних моделей прогнозування граничного стану матеріалів. Подальший розвиток цієї теорії має бути спрямований на інтеграцію сучасних експериментальних даних, розширення області застосування.

Література

1. Shtuts A., Kolisnyk M., Vydmysh A., Voznyak O., Baraban S., Kulakov P. Improvement of stamping by rolling processes of pipe and cylindrical blades on experimental research. *Key Engineering Materials*. 2020. Vol. 844. P. 168-181.
2. Bai Y., Wierzbicki T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity*. № 24. 2007. P. 1071-1096.
3. Bao Y., Wierzbicki T. A comparative study on various ductile crack formation criteria. *J Eng Mater*

Technol. 126. 2004. 314-324.

4. Bao Y., Wierzbicki T.: A comparative study on various ductile crack formation criteria. *J Eng Mater Technol.* 126. 2004. P. 314-324.

5. Bao Y., Wierzbicki T.: On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences.* №1 (46). 2004. P. 81-98.

6. Hooputra H., Gese H., Dell H., Werner H. A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminum extrusions. *International Journal of Crashworthiness.* 2004. 9(5). P. 49-63.

7. Lebedev A. A., Mikhalevich V. M. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics. *Strength of Materials, Plenum Publishing Corporation.* №35 (3). 2003. P. 217-224.

8. McClintock F.A. A criterion of ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics.* Vol. 3(35). 1968. P. 63-71.

9. Matvijchuk V., Shtuts A., Kolisnyk M., Kupchuk I., Derevenko I. Investigation of the Tubular and Cylindrical Billets Stamping by Rolling Process with the Use of Computer Simulation. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering.* 2022. № 66 (1). P. 51-58.

10. V.M. Mykhalevych, M.A. Kolisnyk, A.A. Shtuts. Study of the Stress-Strain State of the Material of the Blanks during Plastic Stamping by Rolling. *Metallophysics and Advanced Technologies.* 2025, vol. 47, No. 1, pp. 57-81.

11. Матвійчук В.А., Колісник М.А., Штутц А.А. Побудова кривих граничних деформацій матеріалів. *Вібрації в техніці та технологіях.* 2022. № 2 (105). С. 84-90.

12. Михалевич В.М., Штутц А.А., Колісник М.А. Дослідження процесів штампування обкочуванням за рахунок аналізу моделювання деформовності матеріалу заготовок. *Техніка, енергетика, транспорт АПК.* 2023. № 3 (122). С. 22-34.

References

1. Shtuts A., Kolisnyk M., Vydmysh A., Voznyak O., Baraban S., Kulakov P. (2020). Improvement of stamping by rolling processes of pipe and cylindrical blades on experimental research. *Key Engineering Materials.* Vol. 844. P. 168-181. [in Switzerland].

2. Bai Y., Wierzbicki T. (2007). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity.* № 24. P. 1071-1096. [in United Kingdom].

3. Bao Y., Wierzbicki T. (2004). A comparative study on various ductile crack formation criteria. *Journal of Engineering Materials and Technology.* Vol. 126. P. 314-324. [in United States].

4. Bao Y., Wierzbicki T. (2005). On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics.* Vol. 72. P. 1049-1069. [in United Kingdom].

5. Bao Y., Wierzbicki T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences.* № 1 (46). P. 81-98. [in United Kingdom].

6. Hooputra H., Gese H., Dell H., Werner H. (2004). A comprehensive failure model for crashworthiness simulation of aluminum extrusions. *International Journal of Crashworthiness.* Vol. 9(5). P. 49-63. [in United Kingdom].

7. Lebedev A.A., Mikhalevich V.M. (2003). On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics. *Strength of Materials.* № 35 (3). P. 217-224. [in United States].

8. McClintock F.A. (1968). A criterion of ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics.* Vol. 35(3). P. 63-71. [in United States].

9. Matvijchuk V., Shtuts A., Kolisnyk M., Kupchuk I., Derevenko I. (2022). Investigation of the Tubular and Cylindrical Billets Stamping by Rolling Process with the Use of Computer Simulation. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering.* Vol. 66 (1). P. 51-58. [in Hungary].

10. Mykhalevych V.M., Kolisnyk M.A., Shtuts A.A. (2025). Study of the Stress-Strain State of the Material of the Blanks during Plastic Stamping by Rolling. *Metallophysics and Advanced Technologies.* Vol. 47, No. 1. P. 57-81. [in Ukraine].

11. Matvijchuk V.A., Kolisnyk M.A., Shtuts A.A. (2022). Pobudova kryvykh hranichnykh deformatsii materialiv. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiiakh.* № 2 (105). P. 84-90. [in Ukrainian].

12. Mykhalevych V.M., Shtuts A.A., Kolisnyk M.A. (2023). Doslidzhennia protsesiv shtampuvannia obkochuvanniam za rakhunok analizu modeliuvannia deformovnosti materialu zahotovok. *Tekhnika, enerhetyka, transport APK.* № 3 (122). P. 22-34. [in Ukrainian].