

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-359-20>
УДК 621.787.4

ДЗЮРА ВОЛОДИМИР

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
<https://orcid.org/0000-0002-1801-2419>
e-mail: volodymyrdzyura@gmail.com

ДЖИВАК ТАРАС

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
<https://orcid.org/0009-0008-9170-2126>
e-mail: tdzhyvak@gmail.com

ДИНАМІКА ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ РЕГУЛЯРНОГО МІКРОРЕЛЬЄФУ НА РОБОЧИХ ПОВЕРХНЯХ ШАТУННИХ ВКЛАДИШІВ

В статті проведено аналіз роботи інструменту в умовах формування регулярного мікрорельєфу на внутрішній робочій поверхні шатунних вкладишів при їх обробці в обоймі. Розроблено математичну модель динамічної взаємодії деформувальних елементів ротаційного інструменту із мікро нерівностями, що утворені замками шатунних вкладишів при формуванні канавок регулярних мікрорельєфів. Встановлено, що при контакті деформувальних елементів із мікронерівністю, виникають сили, що створюють крутильні коливання інструменту, які впливають на величину глибини канавки сформованого макрорельєфу. Записано диференціальне рівняння руху та описана амплітудно-частотна характеристика нерезонансних коливань інструменту. Побудовано графіки зміни амплітуди крутильних коливань інструменту в часі. Проведений аналіз процесів взаємодії мікронерівностей внутрішніх циліндричних поверхонь шатунних вкладишів із деформувальними елементами інструменту дозволив ставити його динамічні характеристики. На основі теоретичних досліджень виявили закономірності виникнення крутильних коливань інструменту, зокрема умови формування резонансних режимів. У роботі детально описано відмінності між резонансними та нерезонансними випадками, а також кількісно оцінено вплив основних параметрів — кількості та розташування кульок, діаметру, швидкості переходу через резонанс — на амплітуду коливань. Новизна статті полягає у визначенні конкретних умов виникнення резонансних крутильних коливань, а також у кількісному порівнянні амплітудних характеристик інструментів із різною конструкцією. Результати роботи можуть бути застосовані при оптимізації інструментів для зменшення негативного впливу резонансних явищ, що сприятиме підвищенню точності та надійності обробки поверхонь шатунних вкладишів.

Ключові слова: шатунний вкладиш, регулярний мікрорельєф, канавка, формування, інструмент, мікронерівність, деформувальний елемент, робоча поверхня

VOLODYMYR DZYURA

TARAS DZHYVAK

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

DYNAMICS OF THE FORMATION PROCESS OF REGULAR MICRORELIEF ON THE WORKING SURFACES OF CONNECTING ROD BEARINGS

The article presents an analysis of the tool performance under conditions of regular microrelief formation on the inner working surface of connecting rod bearings during their machining in a fixture. A mathematical model of the dynamic interaction between the deforming elements of the rotary tool and the micro-irregularities generated by the locks of the connecting rod bearings during the groove formation of regular microreliefs has been developed. It has been established that when the deforming elements come into contact with micro-irregularities, forces arise that induce torsional vibrations of the tool, which affect the groove depth of the formed macrorelief. A differential equation of motion is derived, and the amplitude-frequency characteristics of non-resonant tool vibrations are described. Graphs of the time-dependent amplitude variations of torsional vibrations have been constructed. The analysis of the interaction processes between the micro-irregularities of the internal cylindrical surfaces of connecting rod bearings and the tool's deforming elements has made it possible to identify its dynamic characteristics. Theoretical investigations have revealed regularities in the occurrence of torsional vibrations of the tool, particularly the conditions for the development of resonant modes. The study provides a detailed comparison between resonant and non-resonant cases and quantitatively assesses the influence of the main parameters — the number and arrangement of balls, diameter, and resonance crossing speed — on vibration amplitude. The novelty of this research lies in identifying specific conditions for the onset of resonant torsional vibrations and in the quantitative comparison of amplitude characteristics of tools with different designs. The findings can be applied to the optimization of tools in order to mitigate the adverse effects of resonance phenomena, thereby improving the accuracy and reliability of machining the surfaces of connecting rod bearings.

Keywords: connecting rod bearing, regular microrelief, groove, formation, tool, micro-irregularity, deforming element, working surface

Стаття надійшла до редакції / Received 24.09.2025

Прийнята до друку / Accepted 15.10.2025

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Останні тенденції розвитку галузі транспорту, зокрема використання в якості рушіїв для транспортних засобів електричних двигунів вказують на те, що цей перехід може відбутися значно пізніше ніж прогнозувалось. На сьогоднішні відмова від продажу нових авто на викопному паливі заплановано на 2035 рік. Автомобільні корпорації розглядають гібридні системи живлення автотранспорту на основі двигунів внутрішнього згорання як альтернативу електричним [1, 2].

Ще більш гостро ця проблема проявляється в галузі вантажних та військових транспортних засобів, а також у генераторних підстанціях як джерело автономного чи альтернативного живлення. Тому використання

двигунів внутрішнього згорання буде актуальним ще у наступному десятилітті. У всіх цих випадках ДВЗ працюють у важких умовах експлуатації – високі навантаження, забрудненість повітря, недостатнє охолодження. Таким чином проблема забезпечення належної надійності і довговічності елементів двигунів внутрішнього згорання досі залишається актуальною.

Одним із простих за будовою елементів двигунів внутрішнього згорання є шатунний вкладиш, який виконує роль підшипника ковзання. Однак від його працездатності залежить справність ДВЗ цілому. Вихід з ладу шатунного вкладиша відноситься до критичних поломок двигуна при якому агрегат потребує довготривалого і дорогого капітального ремонту. Тому проблема забезпечення належних умов експлуатації при яких шатунний вкладиш пропрацює закладений конструктором термін є важливою проблемою для галузі транспорту. Одним із методів забезпечення гарантованої плівки на робочій поверхні шатунного вкладиша є формування на його робочій поверхні частково регулярного мікрорельєфу [3, 4, 5].

Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Високопродуктивні інструментальні комплекси для формування регулярних мікрорельєфів на поверхнях будь-якої складності їх будова та принцип роботи описані в роботах [6, 7]. Також в цих роботах описано розроблене програмне забезпечення для формування РМР із необхідними геометричними характеристиками.

Ротаційний інструмент та технологію пластичного деформування циліндричних поверхонь широко використовують при обробці деталей типу «тіла обертання» [8]. Зазвичай здійснюють розкатування роликми для збільшення площі контакту деформувального елемента із оброблюваною поверхнею.

Однак якщо необхідно сформувати канавки, тоді використовують кульки в якості деформувальних елементів. Такі канавки часто формують при створенні регулярних чи частково регулярних мікрорельєфів. В роботі [9] автором вперше наведено математичні моделі, які описують регулярні мікрорельєфи на торцевих поверхнях тіл обертання. Також проведено класифікацію таких мікрорельєфів та математично описано їх ознаки.

В роботі [10] наведено схему, технологічне оснащення і інструмент для формування регулярного мікрорельєфу на плоских і сферичних поверхнях з використанням тисків 40 МПа на 5-ти координатному фрезерному верстаті з числовим програмним керуванням. Досліджено мікроструктуру поверхні із сформованим мікрорельєфом. В статті проведено порівняння двох підходів до формування регулярних мікрорельєфів на складних профільних поверхнях. Оскільки геометричні параметри регулярного мікрорельєфу досить незначні (всього 1-3 мм) то вплив будь-яких факторів може його спотворити. А саме його регулярність забезпечує стабільні фізико-механічні властивості функціональних поверхонь деталей машин.

В роботі [11] здійснено теоретичні дослідження стосовно динамічних характеристик методу вібраційно-відцентрового зміцнення (ВВЗ) металевих довгомірних циліндричних деталей. Описано методику досліджень, наведено просторову принципову схему вібраційно-відцентрового зміцнювального інструменту з електромагнітним приводом та пружними системами. На підставі досліджень отримано та проаналізовано емпіричні залежності для визначення основних динамічних характеристик методу ВВЗ. Розроблено алгоритм аналізу динамічних характеристик контактної взаємодії робочих органів електромагнітного зміцнювача з пружними системами та оброблюваної поверхні.

Динамічні моделі, що описують процесу формування канавок із використанням осциляційних рухів (коливань) відображено у роботах [12, 13]. В цих роботах розглянуто динаміку процесу формування канавок на поверхні однорідного циліндричного тіла при дії деформувальних елементів у вигляді кульок. Встановлено, що при цьому в інструменті виникають повздовжні та крутильні коливання, величину яких можна визначити за отриманими аналітичними залежностями.

Неспівпадіння країв шатунних вкладишів при їх складанні в корпусі розглянуто в роботі [14]. Ця похибка складання, яка може мати різні причини та може призвести до пошкодження підшипників від зношування. Було досліджено вплив зміщення країв шатунного вкладиша на характеристики їх змащування в процесі експлуатації та ймовірне пошкодження від зносу. Для розрахунку характеристик змащування підшипників, таких як максимальний тиск масляної плівки та мінімальна товщина масляної плівки, було застосовано еластогідродинамічну модель, яка включає алгоритм збереження маси.

Формулювання цілей статті

Таким чином незамкнута форма профілю поверхні, та низька жорсткість шатунних вкладишів потребують використання при формуванні мікрорельєфів оброблення в обоймах, де шатунні вкладиші з'єднуються в кільце утворюючи замкнутий профіль. На такій поверхні значно легше сформувати регулярні мікрорельєфи відомими методами та інструментом. Складність цього процесу полягає лише у формуванні лінії контакту на межі замків шатунних вкладишів, що викликати збурення інструменту та його крутильні коливання, яке потрібно дослідити.

Виклад основного матеріалу.

Використання ротаційного інструменту з деформувальними елементами у вигляді кульок для формування на робочих поверхнях шатунних вкладишів канавок частково регулярного мікрорельєфу має певні особливості. Вони зумовлені утворенням мікронерівностей в площині замка шатунних вкладишів, при їх обробці в обоймі. Ефективність якісного формування канавок мікрорельєфу в обоймі залежить від багатьох чинників [6, 7, 9, 15]: відносної кутової швидкості обертання деформувального елемента, фізико-механічних властивостей його матеріалу, розмірів і твердості матеріалу кульок, а також геометрії розміщення, швидкості переміщення самого інструменту вздовж внутрішньої оброблювальної поверхні та ін. Дослідити всієї множини

вказаних чинників на якість поверхні в процесі оброблення можна на базі співвідношень, які максимально враховують вказані вище фактори, а також механізм взаємодії кульок інструменту та мікронерівностей поверхні вкладишів в зоні замка. Незважаючи на це, що при формуванні канавок мікрорельєфу мікронерівності поверхні в зоні замка діють на інструмент через кульки (рис. 1), досить малий проміжок часу вони спричиняють збурення коливань інструменту [12, 13].

Для отримання основних співвідношень, які описують процес формування сформованої поверхні канавки будемо вважати:

- інструмент з деформувальними елементами у вигляді кульок є пружним однорідним тілом циліндричної форми, яке обертається навколо горизонтальної осі із кутовою швидкістю Ω . Пружні властивості його матеріалу задовольняють нелінійний технічний закон пружності [17];
- деформувальні елементи (кульки) інструменту мають твердість набагато вищу як твердість оброблюваної поверхні заготовки, а отже їх деформаціями в процесі згладжування мікронерівностей будемо нехтувати як і зношуванням кульок в процесі оброблення;
- маса кульок є малою величиною у порівнянні із масою верстату із закріплені у ньому інструментом;
- згинальні переміщення нейтральної осі інструменту є малими у порівнянні переміщеннями точок інструменту, які зумовлені закрученням його нормальних перерізів;
- нижній кінець інструменту незавантажений, а верхній жорстко приєднаний до шпинделя верстату;
- дія деформувального елемента на циліндричну (оброблювальну) поверхню зумовлює утворення двох складових сил: нормальної і тангенціальної;
- вісь інструменту і вісь обертання заготовки співпадають;
- випадки підклинювання інструменту у роботі не розглядається;
- поздовжнім переміщенням інструменту вздовж оброблювальної циліндричної поверхні нехтуємо.

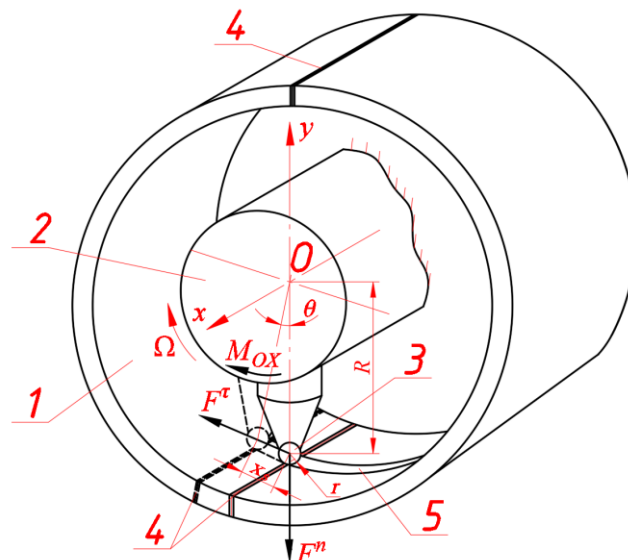


Рис. 1. Схема динамічної взаємодії інструменту із поверхнею шатунного вкладиша при формуванні канавки:
1 – шатунний вкладиш; 2 – тіло інструменту; 3 – деформувальний елемент (кулька);
4 – замковий шов (мікронерівність); 5 – канавка мікрорельєфу.

В такому випадку інструмент здійснює крутильні коливання [18], які зумовлені дією на нього мікронерівностей. Особливістю вказаної дії є те, що вона є дискретною, а отже надає математичній моделі її динаміки якісно нові характеристики у порівнянні із неперервною дією сил.

Диференціальне рівняння руху інструменту із урахуванням дії на нього мікронерівностей

Як було наголошено вище, дії зовнішніх силових чинників (силових чинників зумовлених дією оброблювальної поверхні на інструмент із кульками) на інструмент, останній буде здійснювати крутильні коливання. За умови вказаних вище пружних властивостей матеріалу інструменту (без урахування дії мікронерівностей на кульки інструменту) у випадку постійного його поперечного перерізу диференціальне рівняння його крутильних коливань [18] можна привести до вигляду

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \varepsilon f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \quad (1)$$

де $\phi(t, x)$ – кут закручення пружного тіла інструменту,

$\alpha^2 = \frac{G}{\rho}$ (G, ρ – відповідно модуль пружності другого роду матеріалу пружного тіла та густина матеріалу),

ε – малий параметр, який вказує на те, що максимальне значення правої частини рівняння (1) тобто функції $\varepsilon f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$ є малою величиною у порівнянні із максимальним значенням другого доданку лівої його частини.

Треба відзначити, що права частина рівняння (1) описує суму моментів вязкопружних сил відносно осі обертання OX , яка співпадає із нейтральною лінією інструменту, а початок відліку цієї лінії співпадає із верхнім

кінцем інструменту. Як бudo наголошено раніше дію мікронерівностей оброблювальної поверхні на кульку інструменту можна представити у вигляді двох складових - нормальної - $\vec{F}^n(t)$ та дотичної - $\vec{F}^r(t)$. Саме остання збудує крутильні коливання. Вважаючи, що інтервали часу, в які кулька інструменту контактує із мікронерівністю є дуже малими, то момент дотичної складової дії мікронерівності на інструмент $M_{OX}(\vec{F}^r)$ відносно нейтральної осі інструменту, можна представити у вигляді

$$M_{OX}(\vec{F}^r) = -F^r(R+r)\delta(t-t_i)\delta(x-x_s), \quad (2)$$

де R та r – відповідно радіуси інструменту та його кульки, мм;

$\delta(t-t_i)$ – дельта функція від часової змінної, яка показує на момент контакту мікронерівності і кульки інструменту;

$\delta(x-x_s)$ – дельта функція лінійної змінної [19], яка показує, що абсциса мікронерівності, яка контактує у момент часу t_i рівна x_s .

Наведене у сукупності дозволяє диференціальне рівняння крутильних коливань інструменту подати у вигляді

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \varepsilon f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{\rho \cdot J_0} \sum_i \sum_s F^r(t)(R+r)\delta(t-t_i)\delta(x-x_s), \quad (3)$$

де J_0 – момент інерції перерізу тіла інструменту.

Досягти одночасної обробки мікронерівностей вздовж всієї поверхні одночасно є нездійсненною технологічною, а відтак математичною задачею, тому такий випадок у роботі не розглядається.

Дослідження крутильних коливань інструменту

Частково вирішити вказану проблему дозволить обмеження щодо максимальної величини правої частини рівняння (3), а саме: максимальне значення функції $\varepsilon f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{\rho \cdot J_0} \sum_i \sum_s F^r(t)(R+r)\delta(t-t_i)\delta(x-x_s)$ є значно меншим за максимальне значення доданку $\alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Наведене є підставою для використання асимптотичних методів для побудови розв'язку вказаного рівняння. Перш ніж перейти до його побудови, сформулюємо крайові умови для рівняння (3). Вони повинні узгоджуватись із способом закріплення кінців інструменту. У випадку коли кути закручення верхнього та нижнього кінців рівні нульові, останні приймають вигляд

$$\phi(t, x)|_{x=0} = \phi(t, x|_{x=l}) = 0; \quad (4)$$

у випадку, коли кут закручення верхнього кінця інструменту рівний нулю, а нижній кінець вільний – крайові умови для рівняння (3) трансформуються до вигляду

$$\phi(t, x)|_{x=0} = \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Крайові умови визначають систему власних функцій або форми власних коливань незбуреного руху і вони, для випадку крайових умов (4), приймають вигляд $\Phi_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x$, а для крайових умов (5) відповідно $\Phi_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$.

Нижче зупинимось на випадку одночастотних коливань інструменту у формі близькій до головної (першої) моди крутильних коливань, тобто $k=1$.

Динамічний процес систем із розподіленими параметрами крім силових чинників та крайових умов визначається ще і початковими умовами [18, 19], які частково розглянемо нижче.

Представлення імпульсної дії мікронерівностей замка шатунних вкладишів на інструмент у випадку, одного ряду кульок

Перш ніж перейти до побудови розв'язку диференціального рівняння, яке описує динаміку інструменту у загальному випадку, розглянемо частковий випадок у якому деформуючі елементи – кульки лежать в одній горизонтальній площині ($s=1$). Тоді праву частину рівняння (3) можна дещо спростити, мається на увазі функція $\frac{1}{\rho \cdot J_0} \sum_i (R+r) F_{i1}^r(t) \delta(t-t_i) \delta(x-x_1)$.

Властивості системи функцій, які описують форми крутильних коливань дозволяють $\delta(x-x_1)$ представити у вигляді

$$\delta(x-x_1) = \sum_{s=1} c_s \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x, \quad (6)$$

$$\text{де } c_s = \frac{2}{l} \int_0^l \delta(x-x_1) \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x dx = \frac{2}{l} \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x_1$$

Таким чином

$$\delta(x-x_1) = \frac{2}{l} \sum_{s=1} \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x \cdot \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x_1 \quad (7)$$

Дещо інші перетворення лежать в основі трансформації дельта-функції від часової змінної. Виходячи із фізичного змісту t_i і прийнявши відлік кута повороту інструменту від першої мікронерівності, отримаємо значення кута повороту інструменту до i мікронерівності $\theta_i = \Omega \cdot t_i$, Ω – кутова швидкість обертання інструменту (стала величини). Представляючи величину моменту дії мікронерівності на інструмент у вигляді

$$F_{i1}^r(t)(R+r)\delta(t-t_i) = M_i \cos(\theta) \delta\left(t - \frac{\theta_i}{\Omega}\right)$$

отримаємо

$$F_{i1}^r(t)(R+r)\delta(t-t_i) = M_i \cos(\theta) \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right).$$

Із властивостей дельта функцій випливає, що із достатнім ступенем точності величину $M_i \cos(\theta) \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right)$ можна замінити наступною, $F_{i1}^r(t)(R+r)\delta(t-t_i) = \bar{M}_i \cos(\theta) \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right)$, $\bar{M}_i = \max_{\rho J_0} \frac{1}{\rho J_0} F_{i1}^r(t)(R+r)$.

Таким чином, момент дії сил від мікронерівностей замка шатунних вкладишів на інструмент можна представити у більш зручній, для подальших досліджень, формі

$$\frac{1}{\rho J_0} \sum (R+r) F_{i1}^r(t) \delta(t-t_i) \delta(x-x_i) = \frac{2}{l \cdot \rho J_0} \sum_i \sum_j \bar{M}_i \cos(\theta) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right) \quad (8)$$

Необхідно зауважити, що без особливих труднощів можна узагальнити представлення дії мікронерівностей на інструмент для випадку, коли вони розміщені на різних віддальх від верхньої частини інструменту.

Подання дії мікронерівностей замка шатунних вкладишів на інструмент більш зручне через координати x_s та θ_i адже воно:

- по-перше, враховує розташування мікронерівностей на циліндричній оброблювальній поверхні за допомогою координат x_s та θ_i (аналоги циліндричної системи відліку);
- по-друге, враховує кутову швидкість обертання інструменту.

Методика дослідження впливу мікронерівностей замка шатунних вкладишів на динаміку процесу формування канавок мікрорельєфу

Отримані вище результати дозволяють стверджувати, що дослідження динамічно процесу формування канавок за крайових умов (5) звелось до побудови розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{l \cdot I_0} \sum_{i=1}^n \sum_j \bar{M}_i \cos(\theta) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right) \quad (9)$$

Формально за структурою воно аналогічне до математичних моделей динамічних процесів у пружних тілах, які розглянуті у [18], проте, права його частина має певні особливості пов'язані із імпульсною дією мікронерівностей на інструмент. Нижче не будемо детально звертати увагу на методику побудови його розв'язку, а лише адаптуємо основні співвідношення, які отримані у вказаній роботі, до даного рівняння. Нижче розглядається тільки перше наближення для основних параметрів інструменту, тобто співвідношення, які визначають амплітуду та частоту його коливань. Таким чином, крутильні коливання інструменту у формі близькій до першої форми динамічної рівноваги описуються залежністю

$$\phi(t, x) = a(t) \sin \frac{\pi}{2l} x \cos \psi(t), \quad (10)$$

де $\psi(t) = \omega t + \varphi(t)$ – із змінними в часі амплітудою $a(t)$ та частотою $d\psi/dt$ $\varphi(t)$ коливань.

Саме права частина диференціального рівняння (9) визначає закони зміни вказаних параметрів. Із фізичного змісту доданків, які входять у праву частину вказаного рівняння, а також самого їх вигляду випливає що у інструменті можливі нерезонансні та за певного зв'язку між кутовою швидкістю обертання інструменту, розміщення мікронерівностей – резонансні коливання. Розглянемо спочатку більш прості нерезонансні коливання інструменту. Вони мають місце у випадку, коли частота (період) дії імпульсів на кульки інструменту не зв'язана раціональним співвідношенням із частотою власних коливань. Щодо останньої, то вона визначається співвідношенням $\omega = \pi \cdot \alpha / 2l$, час (період) же дії між імпульсами $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Отже необхідною умовою існування резонансних коливань інструменту є $\tau_i = t_{i+1} - t_i = \text{const}$. Щодо достатньої умови то на ній зупинимось дещо нижче.

Із (9) випливає, що амплітудно-частотна характеристика нерезонансних коливань інструменту описується залежністю

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{\omega} \left\{ \varepsilon \bar{f}(a, x, \psi) - \frac{2}{l \cdot I_0} \sum_j \sum_i \bar{M}_i \cos(\theta_i) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right) \right\} \sin \frac{\pi}{2l} x \sin \psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{1}{\omega a} \left\{ \varepsilon \bar{f}(a, x, \psi) - \frac{2}{l \cdot I_0} \sum_j \sum_i \bar{M}_i \cos(\theta_i) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega}\right) \right\} \sin \frac{\pi}{2l} x \sin \psi \quad (11) \end{aligned}$$

де $\bar{f}(a, x, \psi)$ відповідає значенню функції $f\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)$ за умови похідні функції $\phi(x, t)$ визначаються відповідно до розглядуваного наближення та приймають лише головні значення

$$\bar{f}(a, x, \psi) = f\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a\omega \sin \frac{\pi}{2l} x \sin \psi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = a \frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi}{2l} x \cos \psi \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -a \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2l} x \cos \psi \end{cases}$$

Отримана система диференціальних рівнянь (11), яка описує закони зміни визначальних параметрів одночастотних коливань складна навіть для чисельного дослідження, до того ж, відповідно до основних положень [19] асимптотичного інтегрування вказаного типу рівнянь із частинними похідними амплітудно-частотна характеристика нерезонансних коливань залежить тільки від часу. Це є підставою для усереднення [19] рівнянь (11) за лінійною змінною та фазою коливань:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{\pi l \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \varepsilon \bar{f}(a, x, \psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{l \cdot I_0} \sum_j \sum_i \bar{M}_i \cos(\theta_i) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta \left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega} \right) \right\} \sin \frac{\pi}{2l} x \sin \psi \, dx d\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\pi l a \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \varepsilon \bar{f}(a, x, \psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{l \cdot I_0} \sum_j \sum_i \bar{M}_i \cos(\theta_i) \cdot \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x_1 \sin \frac{(2j+1)\pi}{2l} x \delta \left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{\theta_i}{\Omega} \right) \right\} \sin \frac{\pi}{2l} x \sin \psi \, dx d\psi\end{aligned}$$

Легко переконатись, що останні доданки у наведених вище співвідношеннях не впливають на закони

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{matrix} \right\} d\psi = 0$$

зміни амплітуди та частоти коливань адже, це означає, малі за величиною імпульсні неперіодичні сили зумовлені дією мікронерівностей не впливаю у першому наближенні на крутильні коливання інструменту.

Зокрема у випадку, коли сили в'язкого опору пропорційні відносній кутовій швидкості руху інструменту у степені $\nu+1$ отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon \bar{\beta}_1}{l \omega \pi} (a \omega)^{2\nu_1+1} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon \frac{3}{32} \bar{\beta}_2 a^2\end{aligned}\quad (12)$$

де $\bar{\beta}_1$ і $\bar{\beta}_2$ характеризують, відповідно, силу опору та нелінійно-пружну складову відновлюючої сили.

Значного ні теоретичного, ні практичного інтересу отримані залежності (12) не становлять. Вони, як і для класичних затухаючих коливань показують, що їх амплітуда з часом зникає швидкість затухання її визначається параметрами $\bar{\beta}_1$ та ν_1 .

Набагато складніше описати резонансні крутильні коливання під дією періодичного імпульсного збурення. Перш за все, із загальної умови резонансу для квазілінійних систем маємо $\frac{p}{\omega} \approx \frac{q}{\mu}$ (p, q – взаємно прості числа, μ – частота зовнішнього збурення). Якщо вздовж осі інструменту рівномірно розміщено i кульок, то із умови резонансу випливає, що вказаний процес має місце за частоти обертання інструменту: $\Omega = q \cdot \omega / n \cdot p$. Оскільки власна частота приймає великі значення ($\omega = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$), то реально у інструменті можливі тільки де мультиплікаційні резонанси ($q=1, \Rightarrow \Omega = \omega / n \cdot p$).

Щодо самого процесу проходження через резонанс, то тут в першу чергу треба використати ту його особливість, що він суттєво залежить від різниці фаз власних та вимушених коливань. У розглядуваному випадку це $\vartheta = \psi - \theta$ ($\psi = \vartheta + \theta$). Ввівши вказаний параметр у систему диференціальних рівнянь (7) після усереднення отриманих виразів за фазою вимушених коливань отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi l i p \Omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} s_i i \psi \left\{ F(a, x, \psi) \sin \frac{\pi}{2l} x dx \right\} d\psi + \\ &\quad + \frac{2}{l} \frac{1}{l i p \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n M_i \cos \vartheta \cos \frac{2\pi(i-1)}{\Omega} \sin \frac{\pi}{2l} x_1 \right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\omega}{i p} - \Omega \frac{\varepsilon}{2\pi l i p a \Omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} c a (\vartheta + \psi) \left\{ F(a, x, \psi) \sin \frac{\pi}{2l} x dx \right\} d\psi + \\ &\quad + \frac{2}{l} \frac{1}{l i p \Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n M_i \cos \vartheta \cos \frac{2\pi(i-1)}{\Omega} \sin \frac{\pi}{2l} x_1 \right\},\end{aligned}\quad (13)$$

Відповідно до отриманих вище залежностей на рис. 2 представлено зміну амплітуди крутильних коливань інструменту при переході через резонанс. Для побудови графіків прийнято $l = 100$ мм; матеріал корпусу інструменту – конструкторська сталь 45; кількість деформувальних елементів – 1, $\omega = 2000$ с⁻¹ якщо не вказано інше.

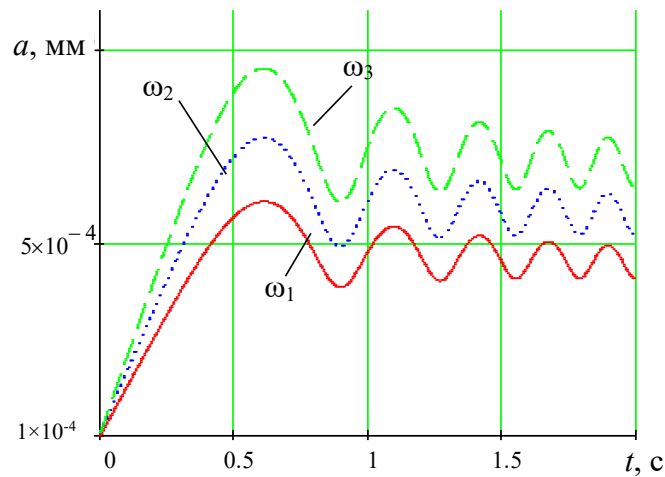


Рис. 2. Зміна амплітуди крутильних коливань інструменту при переході через резонанс при $r = 5$ мм; $\omega_1 = 2000$ с⁻¹; $\omega_2 = 2250$ с⁻¹; $\omega_3 = 2500$ с⁻¹.

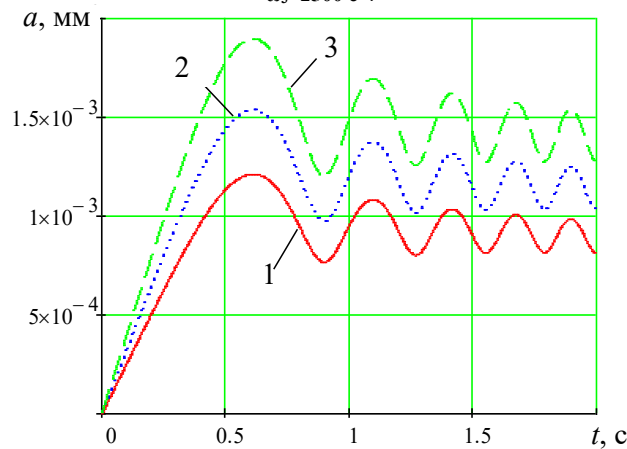


Рис. 3. Зміна амплітуди крутильних коливань інструменту при переході через резонанс при $\omega_1 = 2000$ с⁻¹ та різних радіусах деформувальних елементів:
1 – $r = 5$ мм; 2 – $r = 2.5$ мм; 3 – $r = 1.0$ мм

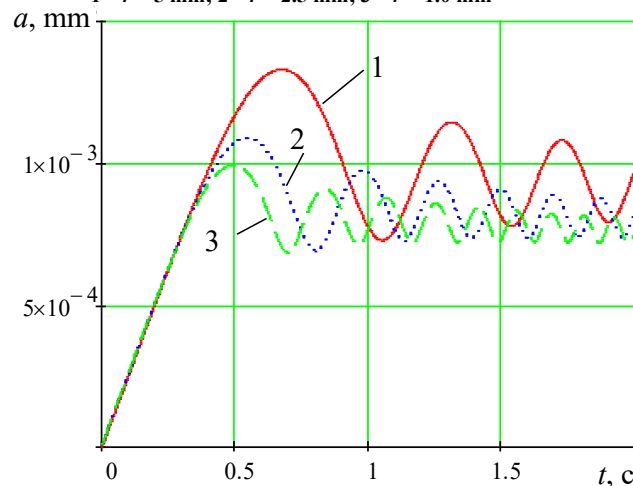


Рис. 4. Зміна амплітуди крутильних коливань інструменту при переході через резонанс при $\omega_1 = 2000$ с⁻¹ та різній кількості деформувальних елементів:
1 – один деформувальний елемент; 2 – два деформувальних елементи; 3 – три деформувальних елементи

Висновки з даного дослідження

і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Із проведених теоретичних досліджень та побудованих на їх базі графічних залежностей впливають результати, які стосуються кількісної оцінки взаємодії мікронерівностей і інструменту:

1. Взаємодія мікронерівностей оброблювальної внутрішньої циліндричної поверхні шатунного вкладиша і кульок інструменту спричиняє у останньому крутильні коливання.
2. За певних умов в інструменті можуть виникати резонансні крутильні коливання. Отримано умову існування останніх.
3. Описано закони зміни визначальних параметрів відносних крутильних коливань інструменту як для

резонансного, так і нерезонансного випадків.

4. Результати, які стосуються аналізу резонансних коливань інструменту:

- величина амплітуди проходження резонансу на вищих дробових частотах є меншою (амплітуда проходження резонансу зумовленого формуванням канавок інструментом із однією кулькою є на 18% більшою як із 2-а кульками та на 35% більшою у випадку інструменту із 3-а кульками);

- збільшення величини моменту сил (зменшення діаметру кульок), призводить до зростання амплітуди проходження через резонанс;

- зростання швидкості переходу через резонанс зменшує амплітуду проходження через нього;

- чим ближче кульки інструменту знаходяться до середини інструменту (знаходяться в одній площині), тим більше значення амплітуди проходження через резонанс;

- якщо інструмент містить оброблювальні кульки у декількох горизонтальних площинах, то його амплітуда проходження через резонанс є більшою у випадку, коли площини розміщення кульок знаходяться ближче середини інструменту;

- зростання початкової амплітуди входження у резонанс майже не впливає на амплітуду проходження резонансу (зростання початкового значення амплітуди у 10 раз спричиняє зростання амплітуди проходження резонансу до 3%).

Перспективою даного дослідження є проектування інструменту та проведення експериментальних досліджень формування канавок регулярного мікрорельєфу на внутрішніх поверхнях шатунних вкладишів із необхідною глибиною канавки.

Література

1. Iqbal Husain /Electric & Hybrid Vehicles: Design Fundamentals 2nd edition/ CRC Press with a Product Code of B-881, ISBN of 978-1 4398117- 5-7, 2010- 08-09 523 с
2. Gianfranco Pistoia/Battery Operated Devices and Systems: From Portable Electronics to Industrial Products//2008-12-02 Specs: Published by Elsevier with a Product Code of B-ELS-008, ISBN of 80080932545, and 32 408 pages.
3. Дзюра В.О., Дживак Т.Р. Збільшення ресурсу елементів двигунів внутрішнього згорання шляхом формування регулярних мікрорельєфів. Інноваційні технології в Індустрії 5.0: Збірник тез за матеріалами 30-ої міжнародної науково-практичної конференції (21-23 жовтня 2024 р.). Ч.1. – Суми: ЧНАУ, 2024 – с. 23-24.
4. Дзюра В.О., Дживак Т.Р., О.Ю. Крук. Напрями вдосконалення шатунних вкладишів двигунів внутрішнього згорання технологічними методами. Актуальні задачі сучасних технологій : зб. тез доповідей XIII міжнар. наук.-практ. конф. Молодих учених та студентів, (Тернопіль, 11-12 грудня 2024) / М-во освіти і науки України, Терн. націон. техн. ун-т ім. І. Пулюя [та ін.]. – Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2024. – с. 83.
5. Дзюра В.О., Дживак Т.Я., Бица Р.О. Нові конструкції шатунних вкладишів двигунів внутрішнього згорання. Матеріали XIII-ої Міжнародної науково-технічної інтернет-конференції «Проблеми та перспективи розвитку автомобільного транспорту» (15-17 квітня 2025 року, м. Вінниця). С. 130-133.
6. Slavov S., Dimitrov D., and Iliev I., “Variability of Regular Relief Cells Formed on Complex Functional Surfaces by Simultaneous Five-Axis Ball Burnishing,” UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering 82, no. 3 (August 2020): 195–206.
7. Slavov, S.D.; Dimitrov, D.M. A study for determining the most significant parameters of the ball-burnishing process over some roughness parameters of planar surfaces carried out on CNC milling machine, MATEC Web of Conferences 2018 178, 02005 doi:10.1051/mateconf/201817802005.
8. Cosmin-Gabriel Grădinaru* and Gheorghe Nagîț. Study on the application limitations of a cold rolling device for internal cylindrical surfaces. Buletinul institutului politehnic din Iași. Publicat de Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași Volumul 71 (75), Numărul 1, 2025 DOI:10.2478/bipcm-2025-0004
9. Dzyura, V.O. Modeling of partially regular microreliefs formed on the end faces of rotation bodies by a vibration method, UJMEMS. 2020, 6(1) 30-38.
10. Lacalle, Luis. (2012). Ball burnishing application for finishing sculptured surfaces in multi-axis machines. International Journal of Mechatronics and Manufacturing Systems. P.997-1003
11. Афтаназів І. С. Дослідження динамічних характеристик вібраційно-відцентрового зміцнення довго вимірних циліндричних деталей / І. С. Афтаназів, Я. М. Литвиняк, Я. М. Кусий // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2004. – № 515 : Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 55-64.
12. Дзюра В.О., П.О. Марущак, Д.Л. Радик, М.Б. Сокіл Динаміка відносних крутильних коливань при формуванні регулярного мікрорельєфу на внутрішніх циліндричних поверхнях Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2022. Вип. 5(36) І. 3-13с.
13. Dzyura V.O., Babii A., Okipnyi I., Radyk D., Tkachenko I., Myshkovych O., Sokil M., Sytarchuk V. Dynamics of relative torsional vibrations in the formation of a regular microrelief on internal cylindrical surfaces. Вісник Тернопільського національного технічного університету https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu Scientific Journal of the Ternopil National Technical University 2021, № 4 (104) https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2021.04

14. Karimaei, H., & Chamani, H. R. (2021). Effects of Bearing Steps on Probable Wear Damage of Main Bearings of an IC Engine. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 18(2), 8714 – 8727. <https://doi.org/10.15282/ijame.18.2.2021.09.0665>
15. Повідайло В. А. Вібраційні процеси та обладнання / В. А. Повідайло // Львів. – 2004. – 248 с.
16. Перестюк М.О. Деякі сучасні аспекти асимптотики теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Перестюк М.О., Чернікова О.С. // *Укр. мат. журн.* – 2008. – 60, с. 81-90.
17. Каудерер Г. Нелінійна механіка [Текст] / Каудерер Г.; [пер. с нім. Я. Г. Пановко]. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.
18. Пукач П. Я. Нелінійні згинні коливання колони для буріння свердловин / П. Я. Пукач, І. В. Кузьо // *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць в 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника.* – Львів: Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2013. Том 2. – С. 167–169.
19. Капустян О.В. Екстремальні задачі. Теорія. Приклади. Методи розв'язування / Капустян О.В., Перестюк М.О. Стенжицький О.М. // К.: ВПЦ Київ-унту. 2019.-71 с.

References

1. Iqbal Husain /Electric & Hybrid Vehicles: Design Fundamentals 2nd edition/ CRC Press with a Product Code of B-881, ISBN of 978-1 4398117- 5-7, 2010- 08-09 523 с
2. Gianfranco Pistoia/Battery Operated Devices and Systems: From Portable Electronics to Industrial Products//2008-12-02 Specs: Published by Elsevier with a Product Code of B-ELS-008, ISBN of 80080932545, and 32 408 pages.
3. Dzyura V.O., Dzhyvak T.R. Zbilshennia zrsursu elementiv dvynuniv vnutrishnoho zghorannia shliakhom formuvannia rehuliamykh mikroreliefiv. Innovatsiini tekhnologii v Industrii 5.0: Zbirnyk tez za materialamy 30-oi mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii. 21-23 zhovtnia 2024 r. P.I. – Sumy: SNAU, 2024 – S. 23-24.
4. Dzyura V.O., Dzhyvak T.R., Kruk O.Y. Napriamy vdoskonallennia shatunnykh vkladyshev dvynuniv vnutrishnoho zghorannia tekhnologichnymy metodamy. Aktualni zadachi suchasnykh tekhnologii : zb. tez dopovidei KhIII mizhnar. nauk.-prakt. konf. Molodykh uchenykh ta studentiv. – Ternopil: TNTU, 11-12 hrudnia 2024r. – S. 83.
5. Dzyura V.O., Dzhyvak T.R., Butsa R.O. Novi konstruksii shatunnykh vkladyshev dvynuniv vnutrishnoho zghorannia. Materialy XIII-oi Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi internet-konferentsii «Problemy ta perspektyvy rozvytku avtomobilnoho transportu». – Vinnytsia: VNTU, 15-17 kvitnia 2025 r. – S. 130-133.
6. Slavov S., Dimitrov D., and Iliev I., “Variability of Regular Relief Cells Formed on Complex Functional Surfaces by Simultaneous Five-Axis Ball Burnishing,” *UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering* 82, no. 3 (August 2020): 195–206.
7. Slavov, S.D.; Dimitrov, D.M. A study for determining the most significant parameters of the ball-burnishing process over some roughness parameters of planar surfaces carried out on CNC milling machine, *MATEC Web of Conferences* 2018 178, 02005 doi:10.1051/mateconf/201817802005.
8. Cosmin-Gabriel Grădinaru* and Gheorghe Nagîț. Study on the application limitations of a cold rolling device for internal cylindrical surfaces. *Buletinul institutului politehnic din Iași. Publicat de Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași Volumul 71 (75), Numărul 1, 2025 DOI:10.2478/bipcm-2025-0004*
9. Dzyura, V.O. Modeling of partially regular microreliefs formed on the end faces of rotation bodies by a vibration method, *UJMEMS*. 2020, 6(1) 30-38.
10. Lacalle, Luis. (2012). Ball burnishing application for finishing sculptured surfaces in multi-axis machines. *International Journal of Mechatronics and Manufacturing Systems*. P.997-1003
11. Aftanaziv I. S. Doslidzhennia dynamichnykh kharakterystyk vibratsiino-vidtsentrovoho zmitsnennia dovho vymirnykh tsylindrychnykh detalei / I. S. Aftanaziv, Ya. M. Lytvyniak, Ya. M. Kusyi // *Herald of the National University "Lviv Polytechnic"*. – 2004. – № 515 : Optyimizatsiia vyrobnychyykh protsesiv i tekhnichnyi kontrol u mashynobuduvanni ta prykladobuduvanni. – S. 55-64.
12. Dzyura V.O., Marushchak P.O., Radyk D.L., Sokil M.B. Dynamika vidnosnykh krutylnykh kolyvan pry formuvanni rehuliamoho mikroreliefu na vnutrishnykh tsylindrychnykh poverkhiakh. *Tsentrlnoukrainskyi naukovyi visnyk. Tekhnichni nauky*. 2022. № 5(36). I. S. 3-13.
13. Dzyura V.O., Babii A., Okipnyi I., Radyk D., Tkachenko I., Myshkovych O., Sokil M., Sytarchuk V. Dynamics of relative torsional vibrations in the formation of a regular microrelief on internal cylindrical surfaces. *Вісник Тернопільського національного технічного університету* https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University* 2021, № 4 (104) https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2021.04
14. Karimaei, H., & Chamani, H. R. (2021). Effects of Bearing Steps on Probable Wear Damage of Main Bearings of an IC Engine. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 18(2), 8714 – 8727. <https://doi.org/10.15282/ijame.18.2.2021.09.0665>
15. Povidailo V. A. Vibratsiini protsesy ta obladnannia / V. A. Povidailo // Lviv. – 2004. – 248 с.
16. Perestiuk M.O. Deiaki suchasni aspekty asymptotyky teorii dyferentsialnykh rivnian z impulsnoiu diieiu / Perestiuk M.O., Chernikova O.S. // *Ukr. mat. zhurn.* – 2008. – 60, с. 81-90.
17. Kauderer H. Neliniina mekhanika / Kauderer H.; [per. s nim. Ya. H. Panovko]. – М.: 1961. – S. 777.
18. Pukach P. Ya. Neliniini zghynni kolyvannia kolony dla burinnia cverdlovyn / P. Ya. Pukach, I. V. Kuzo // *Suchasni problemy mekhaniky ta matematyky: zbirnyk nauko-vykh prats v 3-kh t. / Pid zah. red. R.M. Kushnira, B.I. Ptashnyka.* – Lviv: Instytut prykladnykh problem mekhaniky ta matematyky im. Y.S. Pidstryhacha NAN Ukrainy. – 2013. T.2. – S. 167–169.
19. Kapustian O.V. Ekstremalni zadachi. Teoriia. Pryklady. Metody rozviazuvannia / Kapustian O.V., Perestiuk M.O. Stenzhytskyi O.M. // К.: ВПЦ Київ-унту. 2019.- S. 71 .