

ТКАЧУК АНДРІЙ

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0003-0865-9603>E-mail: tkacukan@khmnu.edu.ua

ГУЛА ІГОР

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-4434-5794>E-mail: hulaih@khmnu.edu.ua

ФОРМУВАННЯ ФУНКЦІЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КОГЕРЕНТНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ІМПУЛЬСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВАЖУВАННЯ АМПЛІТУД КОМПОНЕНТІВ

Одним з найбільш поширених видів сигналів в радіолокації є когерентні послідовності імпульсів. В даній роботі досліджується вплив міжімпульсного і внутрішньо-імпульсного зважування амплітуд компонентів послідовності на функцію невизначеності в зоні доплерівських зміщень частоти. Для цього застосовується простий аналітичний вираз для перерізу функції невизначеності послідовності справедливий для нульового часового зміщення. Це дозволяє просто і наочно визначити вплив зважування імпульсів послідовності на форму поверхні невизначеності вздовж центральної доплерівської частотної осі. За допомогою моделювання показано, що такий вплив зберігається і для ненульових часових зміщень.

Ключові слова: когерентна послідовність імпульсів, функція невизначеності, вікно Хеммінга.

TKACHUK ANDRII, HULA IHOR

Khmelnytskyi National University

FORMING THE AMBIGUITY FUNCTION OF A COHERENT PULSE TRAIN USING WEIGHTING OF COMPONENT AMPLITUDES

A uniformly spaced coherent train of pulses is commonly used in radar systems for improving Doppler resolution. The Doppler resolution is defined by the total coherent duration of the processed signal and can be very high for such sequences. But the ambiguity function of the pulse train still suffers from significant sidelobes. Transmitting the same signal periodically and then processing the returns coherently introduces large ambiguities in the matched filter delay-Doppler response, or the pulse train ambiguity function, which occur at multiples of pulse repetition interval along the delay axis and at multiples of pulse repetition frequency along Doppler. Thus, modifications are usually applied to reduce these sidelobes. Different parameters of the pulse train can be varied to optimize the ambiguity function and improve resolution properties. The most common way is by implementing interpulse amplitude weighting. In many works, exact analytical formulas for the ambiguity function of pulse sequences have been obtained, but they are quite cumbersome, so it is difficult to determine from them how exactly the sequence parameters affect the shape of the ambiguity function.

In this paper, a simple analytical expression for the cross-section of the pulse train ambiguity function along the Doppler axis is obtained. It is valid for zero time offset. It allows us to simply understand and clearly determine the effect of intra- and inter-pulse weighting on the shape of the ambiguity surface along the central Doppler frequency axis. It is shown by simulation that this effect is preserved for non-zero time offsets. The Hamming window was used in this paper to process the pulses. In the case of inter-pulse weighting, it applies to all pulses in the sequence. In the case of intra-pulse weighting, the amplitude of each pulse was varied using this window.

Keywords: coherent pulse train, ambiguity function, Hamming window, Doppler resolution.

Стаття надійшла до редакції / Received 12.09.2025

Прийнята до друку / Accepted 22.10.2025

Вступ

Когерентна послідовність імпульсів є базовим сигналом в радіолокації. Це зумовлено тим, що послідовність імпульсів легко модифікувати змінюючи її параметри так, щоб отримати сигнал потрібний для певного застосування, вирішення конкретного завдання, що стоїть перед системою [1,2,3]. Просте збільшення тривалості послідовності в часі дозволяє покращити доплерівську роздільну здатність. Зменшення тривалості окремого імпульсу дозволяє покращити роздільну здатність за часовою затримкою. Проте, зменшення тривалості імпульсу призведе до зменшення енергії сигналу і розширення спектру послідовності. Тому для покращення роздільної здатності за часовою затримкою часто використовують внутрішню частотну модуляцію. Якщо в результаті цього рівень бічних піків автокореляційної функції високий для певного застосування, то застосовують також нелінійну частотну модуляцію або лінійну частотну модуляцію із зважуванням амплітуди кожного імпульсу певною ваговою функцією. Можна також створити і більш складні сигнали, в яких імпульси не тотожні, а відрізняються деякими своїми параметрами. Наприклад, застосовуються кроки частоти між імпульсами, лінійні і нелінійні. Такі маніпуляції дозволяють покращити роздільну здатність послідовності за часом і зменшити рівень прилеглих до основного кореляційного піка пелюсток [4].

Окремої уваги заслуговують методи фазової модуляції імпульсів послідовності. Для цього застосовують різні коди, кожен з яких дозволяє покращити певним чином функцію невизначеності сигналу. Наприклад, комплементарні коди дозволяють отримати біля центрального піка кореляційної функції зону вільну від бокових пелюсток. Погані доплерівські характеристики таких послідовностей можуть бути скоригованими паралельним застосуванням внутрішньо-імпульсної частотної модуляції [5,6].

Отже, внесення певних змін в імпульси послідовності дає розробнику сигналу безліч можливостей для формування потрібних характеристик. Одним із таких методів є зміна амплітуди всіх імпульсів послідовності

відповідно до деякої функції - вагового вікна(між-імпульсне зважування), або застосування вагового вікна до кожного імпульсу (внутрішньо-імпульсне зважування). Вплив такої маніпуляції на спектр послідовності досліджується в даній роботі.

Аналіз досліджень

Для виявлення сигналів в радіолокації застосовують узгоджені фільтри. Це дозволяє порівнювати сигнал що відбився від об'єкта спостереження і повернувся з певною часовою затримкою тіз таким самим сигналом що зберігається в системі. Це дозволяє найкращим чином виділити отриманий сигнал із шумових завад. Величина сигналу на виході узгодженого фільтра залежить як від часової затримки прийнятого відбитого від об'єкта сигналу, так і від його доплерівського частотного зміщення ν , якщо об'єкт рухомий. Сигнал на виході фільтра описується функцією невизначеності $\chi(\tau, \nu)$, яка залежить від двох змінних параметрів і є основним інструментом для визначення характеристик різних сигналів. В даній статті використовуються позначення прийняті в роботі [1]. Отже:

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u^*(t + \tau) \exp(2\pi \nu t) dt \right| \quad (1)$$

Функція невизначеності визначається комплексною огинаючою опорного сигналу $u(t)$ і комплексною огинаючою прийнятого з затримкою відбитого сигналу $u^*(t + \tau)$.

Функція невизначеності для когерентної послідовності однакових прямокутних імпульсів рис.1 отримана в аналітичному вигляді у багатьох роботах. Наведемо результат відповідно [1]. Для когерентної послідовності імпульсів прийняті наступні позначення: кількість імпульсів N , тривалість кожного імпульсу T , період послідовності T_r , шпаруватість $q = \frac{T_r}{T}$.

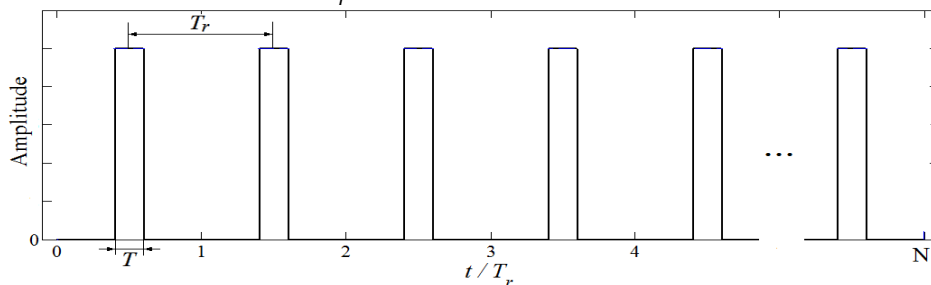


Рис.1. Когерентна послідовність N імпульсів

Комплексна огинаюча одного імпульсу з одиничною енергією визначається формулою:

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Враховуючи що всі імпульси однакові, нормована огинаюча всієї послідовності

$$u_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N u_1[t - (n-1)T_r] \quad (2)$$

В роботах [2,3] отримано точний аналітичний вираз для функції невизначеності такої послідовності. Для цього вираз для комплексної огинаючої (2) підставляють безпосередньо в інтеграл (1). Точний аналітичний вираз для функції невизначеності когерентної послідовності ідентичних імпульсів у випадку коли шпаруватість $q \geq 2$, має вигляд:

$$|\chi(\tau, \nu)| = \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} |\chi_T(\tau - pT_r, \nu)| \left| \frac{\sin[\pi \nu (N - |p|)T_r]}{\sin \pi \nu T_r} \right| \quad (3)$$

Тут $|\chi_T(\tau, \nu)|$ – функція невизначеності одного прямокутного імпульсу, а саме:

$$|\chi_T(\tau, \nu)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \frac{\sin[\pi T \nu (1 - \frac{|\tau|}{T})]}{\pi T \nu (1 - \frac{|\tau|}{T})} \right|$$

Вираз (3) є точною формулою, але він справедливий для послідовності однакових імпульсів, які мають амплітуду прямокутної форми. Часто в когерентні послідовності вносять деяку різницю між імпульсами. Це дозволяє покращити рівномірність функції невизначеності, зменшити сплески, покращити роздільну здатність по часу затримки або для доплерівських зміщень. Найпростіша маніпуляція – зважування імпульсів деяким ваговим вікном, яке змінює амплітуду імпульсів послідовності і покращує параметри сигналу для доплерівських зміщень частоти. Точний вираз для функції невизначеності послідовності в даному випадку отримати аналітично досить важко, тому що всі імпульси різні. Тому для більш складних сигналів для визначення функції невизначеності застосовують числові методи.

Постановка завдання

В даній роботі досліджується зважування амплітуд імпульсів когерентної послідовності вікном Хеммінга. Для визначення впливу такої маніпуляції на вигляд функції невизначеності отримано точний аналітичний розв'язок для нульової затримки $\tau = 0$, справедливий для будь якої форми імпульсів і огинаючої

всієї послідовності. Отриманий точний результат простіший за формулу (3) і дозволяє наглядно побачити, як пов'язані спектри імпульсів і огинаючої всієї послідовності (всього пакету імпульсів) з виглядом функції невизначеності для доплерівських зміщень. Для ненульових затримок τ використовується чисельне моделювання.

Результати дослідження

Розглянемо періодичну послідовність що складається з однакових імпульсів $f(t)$ довільної форми і деякий низькочастотний сигнал $u_{oc}(t)$, що відповідає огинаючій імпульсів: ($u_{oc}(t) = 0$ для $t < 0$ і для $t > N \cdot T_r$). Низькочастотність тут означає, що верхня частота сигналу ω_s має відповідати критерію $\omega_s \geq 2\omega_b$. Тут ω_s частота періодичної послідовності імпульсів $f(t)$: $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$, де Δ - період послідовності. Знайдемо спектр добутку двох сигналів $u(t) = u_{or}(t) \cdot f(t)$, або іншими словами спектр стробованого послідовністю $f(t)$ сигналу $u_{oc}(t)$. Добуток цих сигналів і є пакетом імпульсів $u(t)$. Якщо спектр сигналу $u_{or}(t)$ визначається функцією $U_{oc}(\omega)$, а спектр періодичної послідовності $f(t)$ відповідно $F(\omega)$, то спектр добутку цих сигналів $U(\omega)$ буде дорівнювати згортці спектрів множників:

$$U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_{oc}(\omega - \xi) F(\xi) d\xi \quad (4)$$

Оскільки послідовність $f(t)$ періодична з періодом Δ , то її можна представити рядом Фур'є:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{\Delta} n \cdot t} \quad (5)$$

Враховуючи, що комплексна експонента $e^{j\omega_0 t}$ має спектр $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ і використовуючи лінійність перетворення Фур'є, знаходимо спектр періодичної послідовності імпульсів:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi}{\Delta} n) \quad (6)$$

Підставимо цей вираз у формулу (4) і отримаємо формулу для спектру стробованого періодичною послідовністю $f(t)$ низькочастотного сигналу $u_{oc}(t)$:

$$U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot U_{oc}(\omega - \frac{2\pi}{\Delta} n) \quad (7)$$

Тобто, спектр стробованого сигналу складається із копій спектрів самого низькочастотного сигналу $u_{or}(t)$ (або огинаючої пакета імпульсів), що розташовані періодично на осі частот через проміжки, що дорівнюють частоті стробуючої послідовності $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$ з множником C_n (відноситься до спектру послідовності імпульсів $f(t)$). Спектр огинаючої досить вузький, через велику тривалість в часі $u_{oc}(t)$, тому спектр послідовності імпульсів складається з великої кількості спектрів огинаючої амплітуда яких визначається спектром окремого імпульсу.

Розглянемо тепер когерентну послідовність імпульсів як стробований сигнал рис.2. Для прикладу візьмем 6 імпульсів, тривалість кожного T , період слідування T_r . В даному випадку імпульси прямокутні, шпаруватість послідовності $q = \frac{T_r}{T} = 3$. Амплітуда для простоти одинична.

Імпульси послідовності можна розглядати як стробуючі імпульси (чорна суцільна лінія). Сигнал, що стробують, це у даному випадку прямокутний сигнал-огинаюча імпульсів $u_{or}(t) = 1$, якщо $0 \leq t \leq N \cdot T_r$ і $u_{or}(t) = 0$ для $t < 0$ і для $t > N \cdot T_r$ (пунктирна лінія синього кольору).

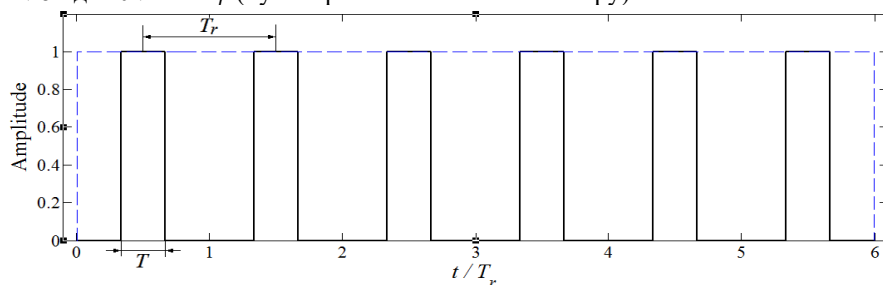


Рис.2. Послідовність $N = 6$ імпульсів, шпаруватість $q = 3$

Для послідовності прямокутних імпульсів коефіцієнти ряду Фур'є C_n як відомо визначаються по формулі:

$$C_n = \frac{1}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{q}\right)}{\frac{\pi n}{q}} \quad (8)$$

Після підстановки цього виразу у формулу (7) і враховуючи що $\Delta = T_r$ знаходимо, що спектр такого стробованого сигналу буде:

$$U(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{q}\right)}{\frac{\pi n}{q}} \cdot U_{oc}\left(\omega - \frac{2\pi}{T_r} n\right) \quad (9)$$

Модуль цього спектру є перерізом функції невизначеності (1) для нульового зміщення $\tau = 0$:

$$|\chi(0, \nu)| = \left| \int_0^{NT_r} u(t)^2 \exp(2\pi \nu t) dt \right| \quad (10)$$

Дійсно, функція невизначеності для нульового зміщення є перетворенням Фур'є квадрата огинаючої пакета імпульсів, тобто спектром послідовності з квадратом огинаючої. Для одиничних прямокутних стробуючих імпульсів це точно відповідає спектру (9), бо квадрат одиничної амплітуди математично дорівнює самій амплітуді. Для імпульсів більш складної форми цей факт потрібно враховувати. Наприклад, під час зважування вікном Хеммінга, і опорна послідовність і відбитий від об'єкта робочий сигнал зважуються вікном що дорівнює квадратному кореню вікна Хеммінга. Тоді добуток цих сигналів в (10) дасть правильне значення.

Як видно з формули (8), в точках де $\frac{\pi n}{q} = m\pi$ або $n = mq$ коефіцієнти $C_n = 0$, ($m \neq 0$, тут $C_0 = \frac{1}{q}$, центральний пік). Отже, на рис.3 зображений переріз функції невизначеності для нульового зміщення τ , суцільна синя лінія. Це набір спектрів огинаючої, що слідують через рівні кроки по частоті $\nu_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T_r}$. В точках, де $n = mq$ (числа кратні значенню шпаруватості), функція зануляється. Тож число спектрів огинаючої між нулями визначається шпаруватістю послідовності. Також на рис.3 пунктирною чорною лінією зображений спектр одного імпульсу послідовності. В даному випадку і огинаюча і імпульси прямокутні, тому спектри подібні. Спектр одного прямокутного імпульсу тривалістю T перший раз буде дорівнювати нулю для частоти $\frac{1}{T}$. Враховуючи що на рис.3 частота вимірюється в одиницях $\frac{1}{T_r = 3T}$, то в даному масштабі перший нуль $C_n = 0$ буде в точці $\frac{1}{T_r} = 3$, тобто в точці що дорівнює шпаруватості. Спектр розбивається цими нулями на пакети, число великих піків в яких дорівнює $r - 1$, а для центрального пакета $2r - 1$. (на рис.5 для порівняння наведено спектр послідовності $N = 6$ імпульсів шпаруватість яких $r = 5$). Ширина центрального піка, що визначає доплерівську роздільну здатність, визначається тривалістю всього пакета імпульсів і дорівнює $\frac{1}{NT_r}$. На рис.3 зображений переріз функції невизначеності (6 імпульсів шпаруватість яких $q = 3$). Між великими піками знаходяться менші, число яких $N - 2$ для нульового перерізу.

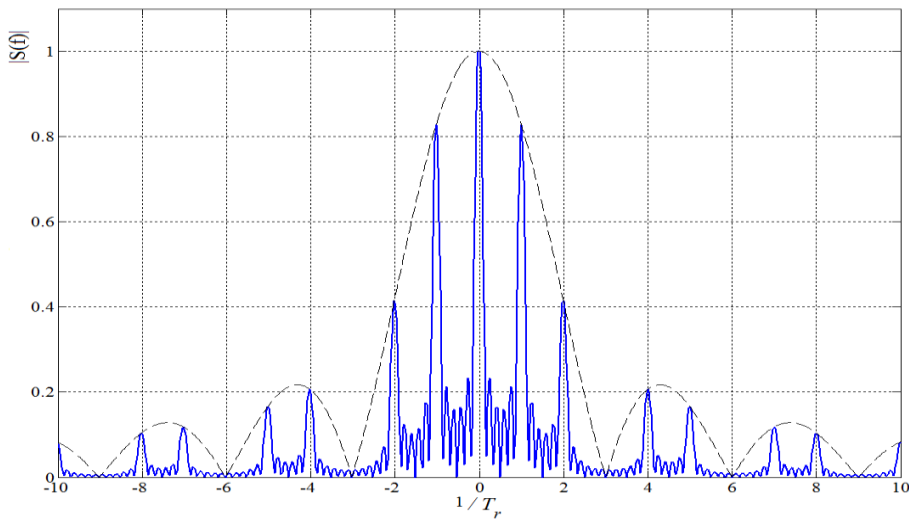


Рис. 3. Послідовність $N = 6$ імпульсів, шпаруватість $q = 3$

Отже, щоб прибрати маленькі піки і знизити рівень прилеглих до центрального піка пелюсток, потрібно сформувати спектр саме огинаючої послідовності імпульсів.

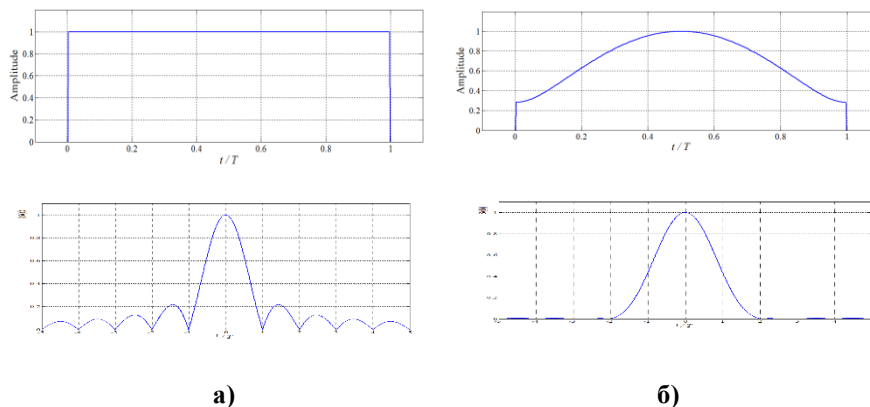


Рис. 4. а) Амплітуда і спектр прямокутного імпульсу б) імпульсу зваженого вікном Хеммінга

Відомо, що для формування спектру імпульсу застосовують зважування амплітуди різними вікнами. В даній роботі було використане вагове вікно Хеммінга. На рис.4 видно, як згладжується спектр сигналу, коли його амплітуда змінюється згідно з функцією Хеммінга. На рис.5. вікно застосовувалось до амплітуд послідовності когерентних імпульсів, тобто до огинаючої. Тут потрібно врахувати, що для функції невизначеності послідовності для нульового зміщення стоять квадрати амплітуд імпульсів. Тому огинаюча зважувалась функцією що дорівнює квадратному кореню з функції Хеммінга.

Як видно з рис.5, зважування амплітуди огинаючої пакета імпульсів значно зменшило рівень дрібних пелюсток. Цей ефект справедливий і для ненульових часових затримок. На рис.5 зображено переріз функції невизначеності послідовності для позитивних доплерівських зміщень відповідних сигналів отриманий числовими методами. Масштаб по частоті $\frac{1}{NT_r}$. Тому ця поверхня відповідає половині центрального піка і двом найближчим великим спектральним лініям, або приблизно $\frac{1}{T_r} \approx 2,3$. З рис.5 видно, що центральний пік за доплерівським зміщенням зануляється в точці $\frac{v=1}{NT_r} = 1$. Для зваженої послідовності центральний пік дещо розширився. Це загальне явище для сигналів, амплітуда яких відповідає деякому ваговому вікну. Їх центральний спектральний пік дещо розширюється рис.4. Але рівномірність функції невизначеності значно краща, і як видно не тільки для нульових затримок τ .

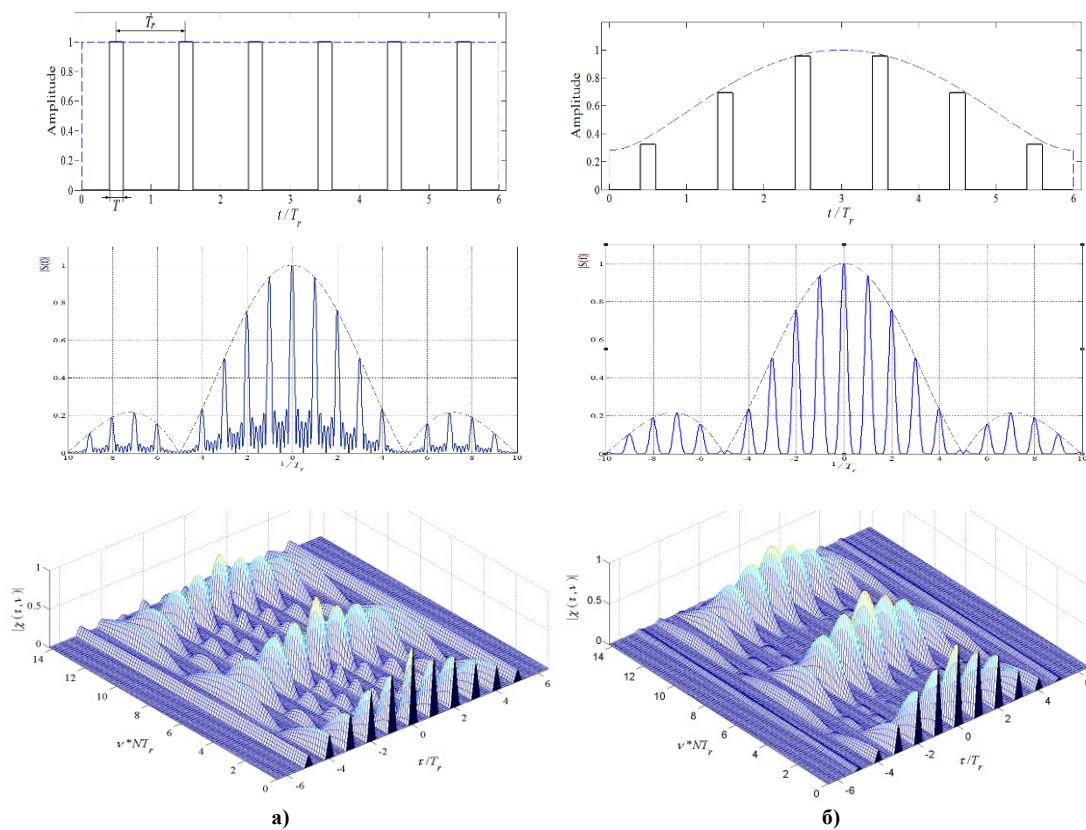


Рис. 5. а) Амплітуда, спектр, функція невизначеності послідовності $N = 6$ імпульсів шпаруватість $r = 5$ б) послідовність з між-імпульсним зважуванням відповідно кореню квадратному з вікна Хеммінга

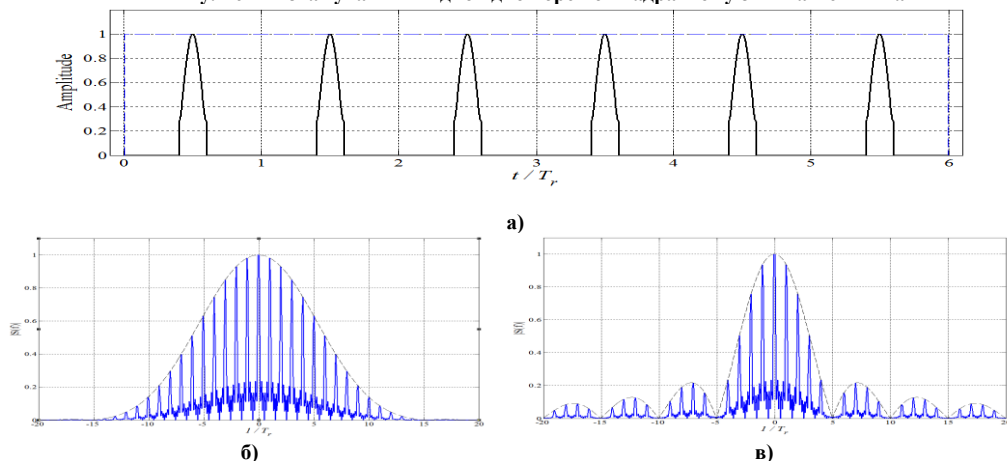


Рис.6 а) Амплітуда послідовності $N = 6$ імпульсів шпаруватість $r = 53$ внутрішньо-імпульсним зважуванням коренем квадратним з вікна Хеммінга б) її спектр в) спектр послідовності без зважування

Якщо застосувати вагове вікно всередині кожного імпульсу послідовності, тобто внутрішньо-імпульсне зважування, то відповідно до формули (7) і рис.3 (в формулі (7) коефіцієнти C_n мають розраховуватись для відповідного вікна) можна очікувати зменшення прилеглих спектральних пакетів. Результати наведено на рис.6.

Центральний пакет розширився, відповідно до властивостей використаного вікна, число піків в ньому більше за $2r - 1$, але відсутні інші спектральні пакети на більш високих частотах.

Висновки

Для покращення роздільної здатності систем для доплерівських частотних зміщень важливо отримати по можливості рівномірну поверхню функції невизначеності біля центрального піку. Для сигналів, що побудовані на основі когерентних послідовностей імпульсів для цього широко застосовують зважування амплітуд імпульсів. Результати такої обробки і вплив спектральних характеристик окремих імпульсів і огинаючої всієї послідовності на функцію невизначеності докладно розглянуті в цій роботі. Для цього отримана проста аналітична формула (7) справедлива для нульового часового зміщення τ , а для ненульових зміщень застосовано чисельні методи. Як показали розрахунки, поверхня функції невизначеності набуває більш рівномірного вигляду вільного від великої кількості прилеглих до основного піку пелюсток.

Слід відмітити, що кількість імпульсів в пакеті послідовності була обрана $N = 6$ для кращої наочності. Для більшої кількості імпульсів апроксимація вагового вікна була б більш точною, що значно зменшило би залишки прилеглих пелюсток. Внутрішньо-імпульсне зважування амплітуди часто використовують разом з внутрішньо-імпульсною частотною модуляцією. Частотна модуляція покращує роздільну здатність для часових зміщень, а амплітудне зважування для таких сигналів зменшує рівень прилеглих пелюсток функції кореляції. Але в будь-якому випадку, внутрішньо-імпульсне зважування формує спектр всієї послідовності у більш компактний центральний пакет. Це може мати значення для зменшення інтерференційних завад що створює електронна система.

Література

1. Levanon N. Radar Signals /Nadav Levanon, Eli Mozeson.-New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. – 411 p.
2. Levanon N. Radar Principles /Nadav Levanon.-New Jersey: John Wiley & Sons, 1988. – 308 p.
3. Richards M. Fundamentals of Radar Signal Processing /Mark A. Richards.-New York: The McGraw-Hill Companies, 2005. – 514 p.
4. Чесановський І.І. Синтез когерентних послідовностей імпульсів з лінійно-частотною модуляцією і нелінійними кроками носійної./ І.І.Чесановський, А. В. Ткачук // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки.- Хмельницький.- 2018.- №6(267).- С.134-142.
5. Ткачук А.В. Підвищення ефективності когерентно-імпульсних сигналів на основі застосування комплементарних кодів / А. В. Ткачук, І. І. Чесановський // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2019. – №5 (277). – с.152 – 158.
6. Ткачук А.В. Підвищення ефективності когерентно-імпульсних сигналів в умовах доплерівських зміщень частоти /А. В. Ткачук, І. І. Чесановський // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2020. – №5 (289). – с.28 – 34.

References

1. Levanon N. Radar Signals /Nadav Levanon, Eli Mozeson.-New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. – 411 p.
2. Levanon N. Radar Principles /Nadav Levanon.-New Jersey: John Wiley & Sons, 1988. – 308 p.
3. Richards M. Fundamentals of Radar Signal Processing /Mark A. Richards.-New York: The McGraw-Hill Companies, 2005. – 514 p.
4. Chesanovsky I.I. Syntez koherentnykh poslidovnostei impulsiv z liniino-chastotnoiu moduliatsiieiu i nelineinymy krokamy nosiinoi./ I.I.Chesanovskyi, A. V. Tkachuk // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences. – 2018. – № 6 (267). – S. 134–142.
5. Tkachuk A.V. Pidvyshchennia efektyvnosti koherentno-impulsnykh syhnaliv na osnovi zastosuvannia komplementarnykh kodiv / A. V. Tkachuk, I. I. Chesanovskyi // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences. – 2019. – № 5 (277). – S. 152–158.
6. Tkachuk A.V. Pidvyshchennia efektyvnosti koherentno-impulsnykh syhnaliv v umovakh dopplerivskykh zmishchen chastyoty /A. V. Tkachuk, I. I. Chesanovskyi // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences. – 2020. – № 5 (289). – S. 28–34.