

LEVKIN DMYTRO

State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-1980-4426>e-mail: dimaevkin23@gmail.com**SYNYAVINA YULIYA**

State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-2015-810X>e-mail: 0959106133@btu.kharkov.ua**LEVKIN ARTUR**

State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0001-5021-5366>e-mail: artur.lav@btu.kharkov.ua**BUTENKO TATYANA**

State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-7723-0790>e-mail: buttanKP2021@biotechuniv.edu.ua

THEORETICAL STUDIES OF APPLIED PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING FOR THERMOPHYSICAL SYSTEMS

In this article, a computational mathematical model of thermal action on a multilayer material is constructed. It is shown that this thermophysical system is based on a nonlocal boundary value problem of a system of nonlinear, multidimensional, inhomogeneous differential heat conduction equations with partial derivatives, boundary and thermal action conditions. It is noted that without considering the material under study as a homogeneous rectilinear body, without the use of specialized methods and estimates on the solution function from the theory of existence and uniqueness of the solution of boundary value problems, it is generally impossible to guarantee the correctness of this boundary value problem. Using the parametric method, it is proved that the condition of uniform boundedness on the Fourier symbol of the main differential equation of a homogeneous boundary value problem is a necessary and sufficient condition for the computational mathematical model over the space of generalized functions constructed in this article. This guarantees the stability of the solution of the boundary value problem to minor changes in the initial data in the function space.

From the point of view of mathematical modeling, the article solves the problem of nonlinear dynamic programming. Taking into account the characteristics of technical devices of thermal action, the boundary values of the control parameters of the system are set. Despite the fact that the research of this article is related to the section of mathematical modeling and optimization of systems with distributed parameters, it also has a multidisciplinary focus. After all, during the finite-difference approximation of a system of differential equations for the implementation of boundary value problems, this problem is reduced to nonlinear dynamic programming, which increases the accuracy of calculating the objective function and values of technical parameters of load sources by using more approximate calculation methods.

Keywords: mathematical modeling, boundary value problems, stability of solutions, finite difference approximation.

ЛЕВКІН ДМИТРО, СИНЯВІНА ЮЛІЯ**ЛЕВКІН АРТУР, БУТЕНКО ТЕТЯНА**

Державний біотехнологічний університет

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ СИСТЕМ

В статті побудована розрахункова математична модель термічної дії на багатошаровий матеріал. Показано, що в основі зазначеної теплофізичної системи стоїть нелокальна крайова задача системи нелінійних, багатовимірних, неоднорідних диференціальних рівнянь теплопровідності з частинними похідними, крайовими і граничними умовами термічної дії. Відзначено, що не розглядаючи досліджуваний матеріал в якості однорідного прямолінійного тіла, без застосування спеціалізованих методів і оцінок на функцію розв'язків з теорії існування та єдиності розв'язку крайових задач, загалом не можливо гарантувати коректність цієї крайової задачі. Використавши метод параметрікса доведено, що умова рівномірної обмеженості на символ Фур'є основного диференціального рівняння однорідної крайової задачі – це необхідна і достатня умова коректності для побудованої в статті розрахункової математичної моделі над простором узагальнених функцій. Це гарантує стійкість розв'язку крайової задачі до незначних змін початкових даних в функціональному просторі.

З точки зору математичного моделювання в статті розв'язана задача нелінійного динамічного програмування. Врахувавши характеристики технічних пристроїв термічної дії, задані граничні значення управляючих параметрів системи. Незважаючи на той факт, що дослідження цієї статті відносяться до розділу математичного моделювання та оптимізації систем з розподіленими параметрами, в них закладене і мультидисциплінарне спрямування. Адже під час кінцево-різницевої апроксимації системи диференціальних рівнянь для реалізації крайових задач, зазначена задача зводиться до нелінійного динамічного програмування, що підвищує точність розрахунку функції мети і значень технічних параметрів джерел навантаження за рахунок застосування більшої кількості наближених методів обчислення.

Ключові слова: математичне моделювання, крайові задачі, стійкість розв'язків, кінцево-різницева апроксимація.

Стаття надійшла до редакції / Received 06.05.2025

Прийнята до друку / Accepted 06.06.2025

In the article applied problems of mathematical modeling for thermophysical systems containing sources of loading physical fields are solved. At calculation and optimization of such systems it is necessary to solve applied problems of nonlinear dynamic programming. Physical processes in multilayer systems containing concentrated, local sources of thermal influence are described by means of nonlocal boundary value problems with systems of differential equations of heat conduction in partial derivatives and boundary conditions. The characteristics of the sources of physical fields are included in the right part of the basic differential equation from the boundary value problem or are given in the boundary conditions.

The Fourier method of separated variables and variational methods are used to realize and investigate the computational mathematical model. The essence of the Fourier method is that the solution of the boundary value problem is sought in the form of a series of products of functions. In this case, to justify the application of the Fourier method, the maximum principle is used, the essence of which is that the solution of a homogeneous boundary value problem reaches its maximum at the boundary of the domain.

Article [1] shows that the external excitation of an unregulated object with a dynamic internal structure is based on a boundary value problem with a system of nonlinear differential equations with constant coefficients. The behavior of the functions of several variables together with their derivatives up to a fixed order in the corresponding topology is investigated [2]. Having optimized energy consumption in a technical system, the authors of [3] obtained the dependence of the change in the coefficient of kinetic energy loss on the angle of the body position. The results of publications [4–6] are devoted to the optimization of the parameters of individual technical systems. Articles [5, 6] present a generalized approach to solving boundary value problems with differential equations and optimizing the parameters of these systems. To increase the stability of the turbine unit outer shell, applied problems of optimal design of some systems with distributed parameters were constructed and formalized, taking into account the control parameters of these systems [7, 8]. In articles [9, 10], conditions for the correctness of boundary value problems for certain classes of differential equations were obtained. Their authors defined general methods for finding and justifying their application in solving applied problems depending on changes in the right-hand side of the differential equation, as well as boundary and edge conditions. Hybrid algorithms are used to search for digital images in data warehouses [11]. In [12], effective methods for identifying air targets in real time were obtained.

Presenting main material

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \rho_N c_N \frac{\partial T_N}{\partial t} - \lambda_N \left(\frac{\partial^2 T_N}{\partial r^2} + \frac{2}{r_N} \frac{\partial T_N}{\partial r} \right) + q_N = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where ρ_e – density coefficient e -th layer of the multilayer (N -layered) material, where $e = 1, \dots, N$;

c_e – heat capacity coefficient e -th of the multilayer material;

$T_e = T_e(r, t)$ – temperature field;

r_e – distance from the center of the thermal source to the point in the e -th temperature field value is calculated in the layer of the multilayer material.

q_e – specific power density of heat loads in multilayer material;

λ_e – heat transfer coefficient e -th layer of multilayer material.

Boundary conditions at the beginning and at the end of thermal exposure:

$$\begin{cases} T(r_0; t_0) = T_0; \\ T(r_N; t_N) = T_N. \end{cases} \quad (2)$$

Boundary conditions for specific heat flux:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0, t) = qS, \quad 0 \leq t \leq h, \quad (3)$$

where q – specific heat flux on the outer layer of the material Ω ;

S – the area of the source of exposure in the form of a spot.

For the homogeneous boundary value problem with the system of differential equations of heat conduction the parabolicity condition is satisfied, and hence, as shown in [14], it can be perturbed by any subordinate pseudodifferential operator of the first order, for example $2 \frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)$. This proves the correctness of the boundary value problem (1)-(3) in the space of generalized functions continuous on the segment.

The solution of the heat conduction differential equation of the system (1) can be represented as the sum of a general homogeneous and a partial inhomogeneous solution. First, let us find the general inhomogeneous solution of the system (1), representing it as the product of two functions $u(r)$ and $v(t)$. Substituting the product of these functions into the homogeneous differential equation of the system (1), we obtain:

$$v'(t)u(r) - a(v(t)u''(r) + \frac{2}{r}v(t)u'(r)) = 0. \quad (4)$$

Based on the algebraic transformations of the differential equation (4), we obtain the differential equation with separating variables and the Fuchs class equation. The solution of the differential equation with separating variables is easy to find – it is an exponent, while the solution of the Fuchs class equation requires the construction of a characteristic polynomial:

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda = 0. \quad (5)$$

Its roots are 0 and 1 so we will look for the solution of the Fuchs class equation in the form of a power series:

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{k-1}. \quad (6)$$

Let us obtain the solution of the differential equation (4):

$$T(r, t) = \left(c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k-1}}{a^k ((2k)!!)^2} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k}}{a^k ((2k+1)!!)^2} \right) e^{ct}, \quad (7)$$

where the constants c_1 and c_2 is found from the boundary conditions (2);

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ – diffusivity coefficient.

Other notations are as in the system of differential equations (1). Let us write the partial inhomogeneous solution of the differential equation from the system (1):

$$T_{p.h.}(r, t) = -\frac{q_e}{6a} r^2. \quad (8)$$

Taking into account the calculations carried out, we obtained the solution of the differential equation of heat conduction from the system (1):

$$T(r, t) = T_0 \left(e^{ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k}}{a^k ((2k+1)!!)^2} \right) - \frac{q_e}{6a} r^2. \quad (9)$$

Having obtained, for example, using the method of uncertain coefficients, the heating temperatures of the material layers, we proceed to the analysis of the fulfillment of constraints on the temperature field and to the analysis of local extrema of the target function to solve the main optimization problem of reducing the flow rate of the material under study in the simulated thermophysical system. It should be noted the results of publications [15, 16], boundary value problems and applied optimization mathematical models in which depend on the features of the simulated processes and the target function.

Conclusions

The article develops a mathematical model for the thermophysical system of thermal action on a multilayer material. It is shown that the computational mathematical model of this process is a boundary value problem of a system of nonstationary, inhomogeneous, multidimensional differential equations of heat conduction with piecewise constant coefficients and with appropriate initial and boundary conditions. Moreover, this system contains moving (local, discrete, concentrated) sources of the physical field whose characteristics are included either in the right part of the basic equation of the boundary value problem or in the boundary conditions. To substantiate the correctness of this boundary value problem, the fundamental function of solutions of the boundary value problem with a system of homogeneous differential equations is investigated and it is shown that the condition of parabolicity of the Fourier symbol of the basic differential equation leads to the correctness of the computational mathematical model for the thermal effect on the material.

The choice of the method of numerical realization of computational mathematical models is made taking into account the general type of the target function, the system of nonlinear constraints on the target function and its parameters, multidimensionality and nonlinearity of boundary value problems. Thus, to realize the boundary value problems, the authors used the Fourier method of separated parametrizations and known approximate methods. This means that initially, the solution of boundary value problems for differential equations is represented as a power series, and the differential equations are replaced by a system of algebraic equations with constant coefficients. To obtain the unknown coefficients, the authors propose to apply variational methods. Increasing the accuracy of calculation and optimization of the target function and control parameters of the modeled system is achieved by reducing the control problem to the problems of nonlinear mathematical programming.

Література

1. Димова Г.О. Analysis of dynamic characteristics of an unregulated object. / Димова Г.О. // Прикладні питання математичного моделювання. – Херсон: ХНТУ, 2024. – Т. 7. № 2. – С. 38–43. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-3>
2. Курченко О.О. Чотири теореми для диференціальних функцій кількох змінних. / О.О. Курченко, О.О. Синявська. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика». – Ужгород: Ужгородський університет, 2023. – Т. 42. № 1. – С. 54–63. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).54-63](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).54-63)
3. Жирков О. Чисельне дослідження впливу зміни кута атаки на величину коефіцієнта втрат кінетичної енергії та кутів виходу потоку для соплових решіток з поворотними діафрагмами. / Жирков О., Усатий О., Авдеева О., Торба Ю. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: «Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування». – Харків: ХПІ, 2022. – № 4. – С. 12–19. <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2023.04.02>
4. Serdyuk A. Actual Problems of the Theory of Approximations in Metrics of Discrete Spaces on the Sets of Summable Periodic and Almost Periodic Functions. / A. Serdyuk, A. Shidlich. // Український математичний журнал. – 2024. – Т. 76. № 11. – С. 1653–1690. doi:10.3842/umzh.v76i11.8525
5. Вірченко Г.А. Оптимізація виробничих систем засобами структурно-параметричного моделювання. / Г.А. Вірченко, Н.М. Ленок. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2021. – № 100. – С. 81–88. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.81-88>
6. Косолап А. Розв'язування мультимодальних оптимізаційних задач великої розмірності. / Косолап А. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2023. – № 36. – С. 126–130. doi.org/10.15407/fmmit2023.36
7. Шерфедінов Р. Інформаційна та математичні моделі проточної частини в задачах оптимального проектування турбоблоку. / Шерфедінов Р., Усатий О., Авдеева О. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: «Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування». – Харків: ХПІ, 2022. – № 1-2. – С. 32–39. <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2022.01.04>
8. Кошевий О.О. Чисельне дослідження стійкості оболонки мінімальної поверхні на квадратному контурі при термосиловому навантаженні з урахуванням геометричної нелінійності. / Кошевий О.О. // Прикладна та інженерна графіка. – Київ: КНУБА, 2024. – Т. 1. № 106. – С. 133–147. DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.133-147
9. Кириченко В.В. Про порушення єдиності розв'язку крайової задачі в багатокутнику. / В.В. Кириченко, Є.В. Лесіна. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика». – Ужгород: Ужгородський університет, 2022. – Т. 40. № 1. – С. 60–68. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).60-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).60-68)
10. Pavlichkov S. Small Gain Conditions for Stability of Infinite Networks of Time-Delay Systems and Applications. / S. Pavlichkov, N. Bajcinca. // [2024 European Control Conference \(ECC\)](https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590849) (25-28 June 2024). – Stockholm, Sweden, 2024. – Pp. 2386–2392. <https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590849>
11. Смеляков К.С. Розробка методу швидкого пошуку цифрового зображення у сховищах даних. / Смеляков К.С., Сандркін Д.Л., Товчиренко Д.О., Вакулік Є.В., Дроб Є.М. // Системи обробки інформації. – Харків, 2021. – № 2 (165). – С. 54–63. <https://doi.org/10.30748/soi.2021.165.07>
12. Laktionov O. Identification of air targets using a hybrid clustering algorithm. / Laktionov O., Yanko A., Pedchenko N. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2024. – Vol. 5. No. 4(131). – Pp. 89–95. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.314289>
13. Levkin D. Solution of nonlinear optimization problems of heat transfer theory. / Levkin D., Kravtsov A., Zavgorodniy O., Kotko Ya. // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences. – Хмельницький, 2025. – Т. 347. № 1. – С. 221–226. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-347-29>
14. Levkin D.A. Application of boundary-border problems for the analysis of the state of complex systems. / Levkin D.A., Zavgorodniy O.I., Gulieva D.O., Levkin A.V. // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: «Технічні науки». – Київ, 2024. – Т. 35 (74). № 1. – С. 190–194. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/29>

15. Palii A.P. Effect of various milking equipment on milk ejection in high-yielding cows. / Palii A.P., Ishchenko K.V., Bredykhin V.V., Gurskyi P.V., Levkin D.A., Antoniuk A.A. et al. // Ukrainian Journal of Ecology. 2021. – Vol. 11. Issue. 1. – Pp. 18–24. DOI: 10.15421/2020_303

16. Kravtsov A. Development of a rheological model of stress relaxation in the structure of an oil film on the friction surface with fullerene additives. / Kravtsov A., Suska A., Biekirov A., Levkin D. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 3. No. 7 (111): Applied mechanics. – Pp. 93–99.

<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.235468>

References

1. Dymova H.O. Analysis of dynamic characteristics of an unregulated object. / Dymova H.O. // Applied Questions of Mathematical Modeling. – Kherson: KhNTU, 2024. – Vol. 7. No. 2. – S. 38–43.

<https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-3>

2. Kurchenko O.O. Chotry teoremy dlia dyferentsiirovnykh funktsii kilkokh zminnykh. / O.O. Kurchenko, O.O. Syniavska. // Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Serii: «Matematyka i informatyka». – Uzhhorod: Uzhhorodskiy universytet, 2023. – Vol. 42. No. 1. – S. 54–63. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).54-63](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).54-63)

3. Zhyrkov O. Chyselne doslidzhennia vplyvu zminy kuta ataky na velychynu koefitsiienta vtrat kinetychnoi enerhii ta kutiv vykhodu potoku dlia soplovykh reshitok z povorotnymy diaframamy. / Zhyrkov O., Usatyi O., Avdieieva O., Torba Yu. // Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Serii: «Enerhetychni ta teplotekhnichni protsesy y ustatkuvannia». – Kharkiv: KhPI, 2022. – No. 4. – S. 12–19. <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2023.04.02>

4. Serdyuk A. Actual Problems of the Theory of Approximations in Metrics of Discrete Spaces on the Sets of Summable Periodic and Almost Periodic Functions. / A. Serdyuk, A. Shidlich. // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. – 2024. – Vol. 76. No. 11. – Pp. 1653–1690. doi:10.3842/umzh.v76i11.8525

5. Virchenko G.A. Optymizatsiia vyrobnychyykh tekhnichnykh system zasobamy strukturno-parametrychnoho modeliuвання. / G.A. Virchenko, N.M. Lynok. // Prykladna geometriia ta inzhenerna grafika. – 2021. – No. 100. – S. 81–88. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.81-88>

6. Kosolap A. Rozviazuvannia multimodalnykh optymizatsiinykh zadach velykoi rozmirmosti. / Kosolap A. // Fyzyko-matematychnye modeliuвання ta informatsiini tekhnologii. – 2023. – No. 36. – S. 126–130. doi:10.15407/fmmit2023.36

7. Sherfedinov R. Informatsiina ta matematychni modeli protochnoi chastyny v zadachakh optymalnoho proiektuvannia turbobloku. / Sherfedinov R., Usatyi O., Avdieieva O. // Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Serii: «Enerhetychni ta teplotekhnichni protsesy y ustatkuvannia». – Kharkiv: KhPI, 2022. – No. 1-2. – S. 32–39. <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2022.01.04>

8. Kosheviy O.O. Chyselne doslidzhennia stiikosti obolonky minimalnoi poverkhni na kvadratnomu konturi pry termosylovomu navantazhenni z urakhuvanniam geometrychnoi neliniinosti. / Kosheviy O.O. // Prykladna geometriia ta inzhenerna grafika. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Vol. 1. No. 106. – S. 133–147. DOI: 10.32347/0131-579x.2024.106.133-147

9. Kyrychenko V.V. Pro porushennia yedynosti rozviazku kraiovoi zadachi v bahatokutnyku. / V.V. Kyrychenko, Ye.V. Lesina. // Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Serii: «Matematyka i informatyka». – Uzhhorod: Uzhhorodskiy universytet, 2022. – Vol. 40. No. 1. – S. 60–68. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).60-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).60-68)

10. Pavlichkov S. Small Gain Conditions for Stability of Infinite Networks of Time-Delay Systems and Applications. / S. Pavlichkov, N. Bajcinca. // 2024 European Control Conference (ECC) (25-28 June 2024). – Stockholm, Sweden, 2024. – Pp. 2386–2392. <https://doi.org/10.23919/ECC64448.2024.10590849>

11. Smeliakov K.S. Rozrobka metodu shvydkogo poshuku tsyfrovogo zobrazhennia u skhovyshchakh dannykh. / Smeliakov K.S., Sadrykin D.L., Tovchyrenko D.O., Vakulik Ye.V., Drob Ye.M. // Systemy obrobky informatsii. – Kharkiv, 2021. – No. 2 (165). – S. 54–63. <https://doi.org/10.30748/soi.2021.165.07>

12. Laktionov O. Identification of air targets using a hybrid clustering algorithm. / Laktionov O., Yanko A., Pedchenko N. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2024. – Vol. 5. No. 4(131). – Pp. 89–95. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.314289>

13. Levkin D. Solution of nonlinear optimization problems of heat transfer theory. / Levkin D., Kravtsov A., Zavgorodniy O., Kotko Ya. // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences. – Khmelnytskyi, 2025. – Vol. 347. № 1. – S. 221–226. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-347-29>

14. Levkin D.A. Application of boundary-border problems for the analysis of the state of complex systems. / Levkin D.A., Zavgorodniy O.I., Gulieva D.O., Levkin A.V. // Vcheni zapysky Tavriiskoho natsionalnoho universytetu imeni V.I. Vernadskogo. Serii: «Tekhnichni nauky». – Kyiv, 2024. – Vol. 35(74). No. 1. – S. 190–194. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/29>

15. Palii A.P. Effect of various milking equipment on milk ejection in high-yielding cows. / Palii A.P., Ishchenko K.V., Bredykhin V.V., Gurskyi P.V., Levkin D.A., Antoniuk A.A. et al. // Ukrainian Journal of Ecology. 2021. – Vol. 11. Issue. 1. – Pp. 18–24. DOI: 10.15421/2020_303

16. Kravtsov A. Development of a rheological model of stress relaxation in the structure of an oil film on the friction surface with fullerene additives. / Kravtsov A., Suska A., Biekirov A., Levkin D. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 3. No. 7 (111): Applied mechanics. – Pp. 93–99.

<https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.235468>