

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-357-45>

УДК 621.395

КРЕДЕНЦЕР БОРИС

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут

<https://orcid.org/0000-0003-1920-2107>

e-mail: kredenzerbp@gmail.com

КОНОНОВА ІРИНА

Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського

<https://orcid.org/0009-0004-3736-4761>

e-mail: viti21@ukr.net

КРИЛОВ ОЛЕКСІЙ

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій

<https://orcid.org/0009-0004-0501-2702>

e-mail: akrylovs@gmail.com

МОДЕЛІ ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАЯВОК НА ЕТАПІ НАДАННЯ ПОСЛУГ КОРИСТУВАЧАМ

Представлено комплексний підхід до моделювання процесів обслуговування заявок на етапі надання послуг користувачам у центрах інтелектуальних послуг (ЦІП). Враховано вплив архітектурних і функціональних особливостей ЦІП на ймовірно-часові характеристики процесу обслуговування, зокрема топологію тракту проходження заявки, організацію розподільчої системи (РС), кількість та структуру обслуговуючих приладів (ОП), дисципліну формування черг і специфіку реалізації запитуваних послуг.

Запропоновано класифікацію структур ЦІП за чотирма варіантами: інтегрована модель з комутаційною станцією; модель із виділеною РС без черг; модель із чергами до кожної служби; дворівнева модель із загальною чергою та подальшою маршрутизацією за службами. Кожен варіант формалізовано відповідною математичною моделлю систем масового обслуговування. Для їх аналітичного опису використано класичні формули Ерланга та метод Н. Бухмана, що дозволило визначити ймовірності зайнятості ОП, виникнення черг, рівень втрат та ступінь використання ресурсів.

Виконано чисельний аналіз параметрів моделей, побудовано номограми, які демонструють залежність ефективності обслуговування від кількості приладів, навантаження системи та прийнятої моделі організації черг. Показано, що поділ обслуговуючих приладів на вузькоспеціалізовані групи при малих обсягах трафіку призводить до перевитрати ресурсів. Оптимальною для умов середнього трафіку визначено дворівневу модель ЦІП, яка забезпечує баланс між якістю обслуговування та економічністю апаратного забезпечення.

Результати дослідження можуть бути застосовані при проектуванні та оптимізації структур ЦІП у сучасних електронних комунікаційних мережах, включаючи системи IP-телефонії та сервісні платформи для хмарних комунікацій.

Ключові слова: центр інтелектуальних послуг, IP-телефонія, модель обслуговування заявок, якість обслуговування, електронна комунікаційна мережа.

KRENTSER BORYS

Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes of Kruty

KONONOVA IRYNA

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute

KRYLOV OLEKSI

State University of Information and Communication Technologies

MODEL FOR HANDLING REQUESTS AT THE STAGE OF PROVIDING SERVICES TO USERS

A comprehensive approach to modeling request handling processes at the stage of providing services to users in intelligent service centers (ISC) is presented. The influence of the architectural and functional features of ISCs on the probabilistic and temporal characteristics of the service process is taken into account, in particular the topology of the request path, the organization of the distribution system (DS), the number and structure of service devices (SD), the discipline of queue formation, and the specifics of the implementation of the requested services.

A classification of ISC structures is proposed in four variants: an integrated model with a switching station; a model with a dedicated DS without queues; a model with queues for each service; a two-level model with a common queue and subsequent routing by service. Each option is formalized by a corresponding mathematical model of queuing systems. For their analytical description, the classical Erlang formulas and the N. Buchman method were used, which made it possible to determine the probabilities of SD occupancy, the occurrence of queues, the level of losses, and the degree of resource utilization.

A numerical analysis of the model parameters was performed, and nomograms were constructed that demonstrate the dependence of service efficiency on the number of devices, system load, and the accepted queue organization model. It was shown that dividing service devices into highly specialized groups with low traffic volumes leads to an overuse of resources. A two-level ISCs model has been determined to be optimal for medium traffic conditions, providing a balance between service quality and hardware cost-effectiveness.

The results of the study can be applied in the design and optimization of ISCs structures in modern electronic communication networks, including IP telephony systems and service platforms for cloud communications.

Keywords: intelligent service center, IP telephony, request service model, quality of service, electronic communications network.

Стаття надійшла до редакції / Received 30.07.2025

Прийнята до друку / Accepted 15.08.2025

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Сучасні електронні комунікаційні мережі характеризуються високими вимогами до якості надання послуг, зокрема в частині забезпечення мінімальних затримок, високої надійності та

ефективного використання ресурсів. Це особливо актуально для ЦПП, що інтегруються у мережі нового покоління (FGN) та забезпечують надання широкого спектра сервісів користувачам у реальному часі. В умовах зростання обсягів і варіативності трафіку, забезпечення гарантованого рівня обслуговування стає складною задачею, яка потребує удосконалення підходів до моделювання процесів обслуговування заявок.

Науковою проблемою є відсутність універсальних моделей, що адекватно описують функціонування ЦПП із різними архітектурними рішеннями та організацією процесу обслуговування, з урахуванням як витрат заявок, так і часу їх очікування. Вирішення цього завдання є актуальним для оптимізації використання обслуговуючих ресурсів, підвищення якості обслуговування, а також для дотримання угод про якість сервісу (SLA).

З практичної точки зору, дослідження спрямоване на формування методичних основ для проектування ЦПП у системах IP-телефонії, хмарних сервісах та контакт-центрах, де актуальними залишаються задачі зниження витрат на обладнання, забезпечення гнучкого масштабування і гарантованої продуктивності систем. Таким чином, дослідження моделювання процесів обслуговування в ЦПП має вагоме значення як для теорії масового обслуговування, так і для практики побудови ефективних електронних комунікаційних мереж.

Аналіз досліджень та публікацій

Проблематика моделювання процесів обслуговування заявок у ЦПП залишається актуальною як у вітчизняному, так і в міжнародному науковому просторі. Особливої ваги набули дослідження, що враховують специфіку сучасних електронних комунікаційних систем, IP-телефонії, хмарних сервісів та інтегрованих контакт-центрів. У [1] представлено моделі call-центру із системою інтерактивного голосового реагування (IVR), що дозволяють досліджувати вплив параметрів IVR на втрати викликів, середній час очікування та довжину черги. Монографія [2] присвячена матричним і аналітичним методам аналізу продуктивності комунікаційних систем, а також в ній розвинуто формалізований підхід до моделювання систем масового обслуговування із пріоритетами, що є особливо релевантним для сервісів IP-телефонії та мереж 4G/5G.

У [3] запропоновано симулятор call-центру, що враховує кількість та розподіл викликів, час обслуговування, “час терпіння”, повторні виклики і “нетерплячих” користувачів. У [4] запропоновано аналіз теорії черг, досліджуючи її фундаментальні принципи, особливості та різні моделі. У [5] запропонована систему масового обслуговування з паралельним обслуговуванням та повторними заявками. Показано, що класична теорія черг часто є непридатною для моделювання сучасних комп’ютерних та комунікаційних систем, у яких обслуговування може вимагати випадкових обсягів кількох ресурсів. Це характерно, зокрема, для розподілених обчислень та бездротових пристроїв, підключених через різні технології доступу.

Таким чином, як вітчизняні, так і зарубіжні дослідження демонструють стійкий інтерес до вдосконалення моделей систем масового обслуговування з урахуванням сучасних викликів, таких як інтеграція IVR, управління пріоритетами, обробка “нетерплячих” користувачів. Проте питання обслуговування заявок на етапі надання послуг користувачам ЦПП із оптимальними характеристиками якості обслуговування та ефективного використання ресурсів залишається відкритим і потребує подальшого дослідження.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є формалізація моделей обслуговування заявок на етапі надання послуг користувачам у центрах інтелектуальних послуг з урахуванням архітектурних особливостей їх побудови, топології трактів обслуговування, структури обслуговуючих приладів та дисципліни формування черг, а також у визначенні оптимальних варіантів організації ЦПП для забезпечення високої якості обслуговування за мінімальних витрат ресурсів у сучасних телекомунікаційних мережах.

Виклад основного матеріалу

Процес надання послуги користувачеві за його заявкою здійснюється відповідною службою ЦПП та характеризується сукупністю імовірно-часових параметрів, які суттєво залежать від архітектурних та експлуатаційних особливостей системи. До ключових чинників, що впливають на ці параметри, належать:

- топологія тракту проходження заявки на надання послуги від входу в розподільчу систему (РС) ЦПП до передачі на обслуговуючі прилади (ОП) відповідної служби. У контексті IP-телефонії типовим прикладом є проходження SIP-запиту від терміналу абонента до SIP-сервера, через проксі або гейтвей, до сервера медіа-ресурсів або обробника IVR;
- прийняту систему обслуговування – із втратами (наприклад, при перевищенні допустимої кількості одночасних з’єднань SIP-реєстрацій) або з очікуванням (як у call-центрах з використанням SIP-черг, де виклики накопичуються у вхідному пулі до моменту звільнення ресурсу);
- механізм формування черг у системі з очікуванням, що передбачає відповідну дисципліну обслуговування (FIFO, пріоритетна черга, round-robin тощо). У мережах IP-телефонії це реалізується, наприклад, у Asterisk або FreeSWITCH шляхом конфігурації файлу queue.conf чи логіки маршрутизації викликів у call-центрі;

- технологія реалізації самої послуги, яка може передбачати активацію медіа-компонентів, транскодування, авторизацію через RADIUS/DIAMETER, або динамічне створення сесії з використанням SDP та RTP. Наприклад, підключення до конференц-зв'язку або переадресація виклику на зовнішній SIP-шлюз із затримкою, зумовленою сигналізацією.

Склад тракту проходження заявки визначається як типовою ЦПП, так і характером функціональних взаємозв'язків між його структурними елементами. Композиція цього тракту охоплює послідовність логічних і фізичних вузлів, які забезпечують обробку, маршрутизацію та реалізацію користувацької послуги від моменту надходження запиту до завершення його обслуговування.

Розглянемо варіанти структурної побудови ЦПП і способи підключення його служб до РС.

Інтегрована модель (варіант 1, рис. 1). Центр інтелектуальних послуг виступає як невід'ємна складова частиною комутаційної станції, а комутаційна система (КС) цієї станції виконує крім своїх основних функцій встановлення з'єднань для надання послуг зв'язку, також і функції РС ЦПП. У цьому випадку група (групи) виходів з цієї комутаційної системи можуть розглядатися як самостійний напрямок групового пошуку [6]. Обслуговуючі прилади служб ЦПП можуть включатися як загальностанційні прилади комутаційної станції.

В мережах IP-телефонії функціональність інтелектуальної служби реалізована на рівні програмного комутатора softswitch. В цьому випадку SIP-запити обробляються локально, що забезпечує низький рівень затримок, але обмежує масштабованість. При обмеженій кількості RTP-портів відбувається відмова у встановленні з'єднання. Цей варіант можна представити моделлю М/М/п/0.

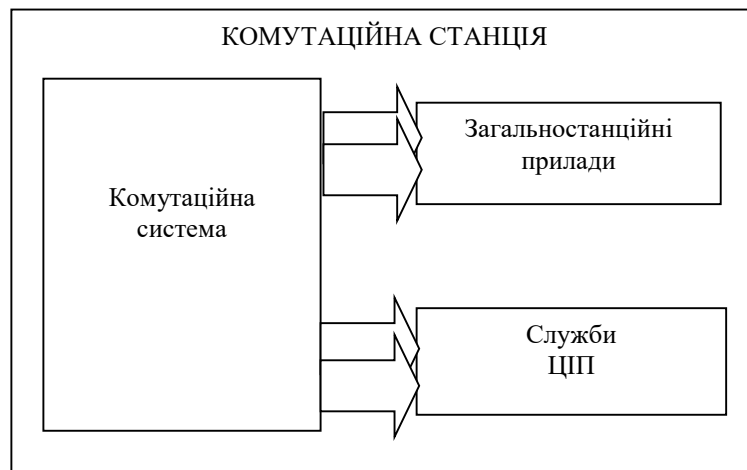


Рис. 1. Варіант структурної побудови ЦПП

Модель з виділеною розподільчою системою (варіант 2, рис. 2). Центр інтелектуальних послуг має свою РС, яка напряму передає заявки на обслуговування в ОП відповідних служб. Черги очікування не передбачені, заявки в ЦПП обслуговуються за системою з втратами. Виходи РС ЦПП розподілені за напрямками пошуку, безпосередньо підключені до ОП відповідних служб. Аналогом в мережі IP-телефонії є мультисервісний SIP-проксі з розподіленням на окремі обробники запитів без черги (наприклад, IVR, авторизація, білінг). Використання цієї моделі дає змогу гнучко балансувати навантаження між службами, що особливо актуально для call-центрів або сервісів з великою кількістю паралельних запитів.

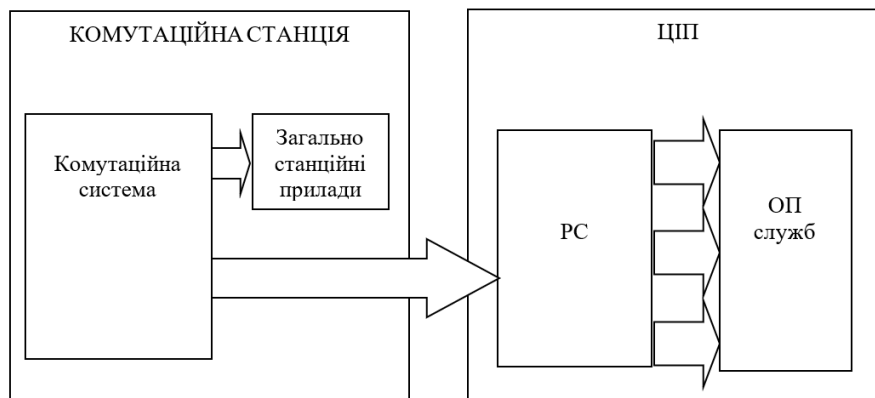


Рис. 2. Варіант структурної побудови ЦПП

Модель ЦПП з РС та чергами на кожену службу (варіант 3, рис. 3). У даній конфігурації ЦПП має свою розподільну систему та на виході РС ЦПП є місця для очікування (МО), що утворюють кількість черг за кількістю служб, що формують і надають користувачам інтелектуальні послуги. При

надходженні заявки на службу, що має в даний момент вільні прилади (всі місця для очікування в черзі до даної служби вільні), вона негайно обслуговується. В іншому випадку ця заявка займає одне з місць для очікування і обслуговується в порядку черги відповідно до прийнятої на даній службі дисципліни обслуговування, наприклад, за принципом: «перша прийшла – перша обслуговується» (FIFO). Аналогом в IP-телефонії, наприклад, є черга викликів у SIP-Call Center, де запити маршрутизуються до відповідних служб (техпідтримка, продажі, тощо). Заявки в ЦПП обслуговуються за системою з очікуванням. Цей варіант можна представити моделлю М/М/п/К.

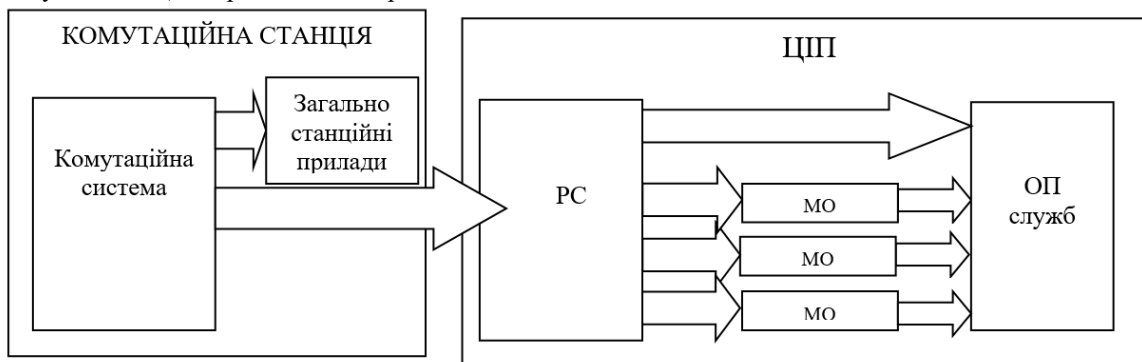


Рис. 3. Варіант структурної побудови ЦПП

Модель ЦПП з дворівневою РС з загальною чергою (варіант 4, рис.4). Ця модель найбільш гнучкий варіант, що передбачає використання загальної черги на входному рівні та подальшу маршрутизацію запитів за спеціалізацією служб (через механізми dialplan, SQL-фільтрації, зовнішні CRM або IVR). На виході першої РС (PC1) включаються загальні місця для очікування обслуговування заявок, незалежно від служби, до якої вони адресовані (загальна черга). Ці місця для очікування утворюють входи в другу РС (PC2). Виходи PC2 розділені за напрямками пошуку, що відповідають конкретним службам. При надходженні заявки на службу, яка має в даний момент вільні обслуговуючі прилади, вона з PC1, минаючи місця для очікування, через PC2 надходить на ОП і негайно обслуговується. В іншому випадку ця заявка займає одне з місць для очікування в загальній черзі і обслуговується в міру звільнення ОП в службі, на яку вона адресована. Вибірка заявок із загальної черги до ОП конкретної служби здійснюється незалежно від стану ОП в інших службах. Заявки в ЦПП обробляються за системою з очікуванням. Це дозволяє забезпечити складні сценарії обробки запитів, зокрема надання пріоритету окремим категоріям користувачів, реалізацію політик SLA та гнучке масштабування обслуговуючих ресурсів.

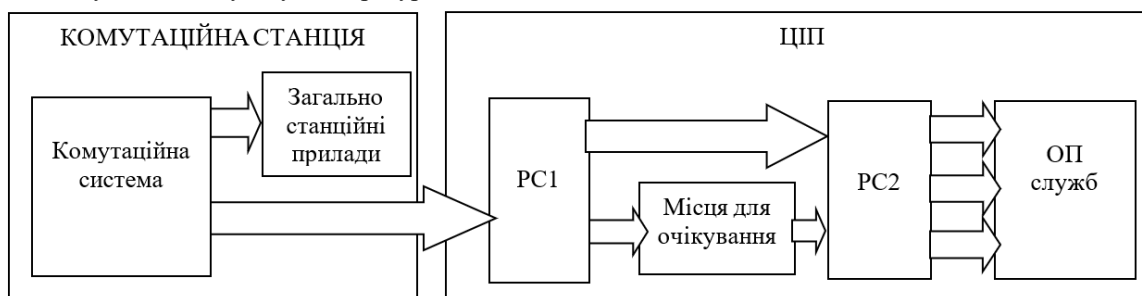


Рис. 4. Варіант структурної побудови ЦПП

У варіантах 3 і 4 заявка, що надійшла в момент зайнятості всіх ОП необхідної служби і всіх місць для очікування в черзі, отримує відмову в обслуговуванні і формально втрачається. Ймовірність такої події визначається як добуток ймовірностей зайнятості всіх ОП відповідної служби і всіх місць для очікування (для варіанту 3 – в черзі до необхідної служби). Принципово можливі і комбіновані варіанти.

Моделі обслуговування заявок у варіантах 1 і 2 формально в більшості випадків можуть бути зведені до однофазної моделі системи масового обслуговування з втратами, в достатній мірі, описаної в науково-технічній літературі [7, 8]. Процес проходження заявки у внутрішньостанційному багатополюснику в даній роботі не розглядається з тієї ж причини. У загальному випадку під обслуговуючими приладами розуміються як фізичні пристрої з просторовим доступом до них, так і мультипрограмні системи, у яких реалізовано часовий розподіл доступу до обчислювальних (комунікаційних) ресурсів. В останньому випадку число ОП визначається максимально можливою кількістю одночасно виконуваних програм (одна заявка – одна програма).

Перші два варіанти можуть бути представлені багатолінійною багатозафазною моделлю масового обслуговування з втратами. Варіанти 3 і 4 можуть бути описані моделями, що істотно відрізняються як від розглянутих вище, так і між собою. Такі відмінності від розглянутих вище моделей визначаються в

першу чергу застосуванням способу обслуговування заявок за системою з очікуванням. Відмінності моделей, що описують варіанти 3 і 4, обумовлюються способами формування черг заявок на їх обслуговування в ЦПП, порядком вибірки цих заявок з черг і, як наслідок, структурою ЦПП.

З теорії телетрафіку відомо [9, 10], що відмінність у способах формування черг у варіантах 3 і 4 як наслідок призводить до різних необхідних обсягів обладнання ЦПП як за рахунок пристроїв пам'яті МО, так і за рахунок кількості ОП служб ЦПП при фіксованій якості обслуговування заявок на надання інтелектуальних послуг. При рівному (для цих варіантів) обсязі обладнання – до зміни показників якості обслуговування таких заявок.

Для оцінки імовірно-часових показників системи доступу до служб ЦПП доцільно використовувати такі параметри:

- V_i – число виходів (число ОП) в i -м напрямі шукання;
- V – загальне число ОП в напрямі пошуку $V = \sum_{i=1}^H V_i$, де H число напрямів пошуку;
- L_i – число місць для очікування в i -напрямі пошуку;
- L – загальне число місць для очікування (для варіанта 3 – $L = \sum_{i=1}^H L_i$);
- p_i – ймовірність втрати заявки в i -м напрямі пошуку через зайнятість всіх V_i ОП (і/або місць для очікування) в i -м напрямі пошуку;
- λ_i – інтенсивність потоку заявок в i -м напрямі пошуку;
- λ – інтенсивність потоку заявок на ЦПП ($\lambda = \sum_{i=1}^H \lambda_i$);
- ω_i – середній час надання послуги j -го типу (середній час передачі повідомлення j -го типу);
- ω – середній час надання послуги за всіма типами заявок;
- $\omega = \sum_{j=1}^F \alpha_j \omega_j$, де F число типів послуг, а α_j ваговий коефіцієнт j -го типу послуг;
- μ_i – інтенсивність потоку обслуговування заявок j -го типу; $\mu_i = \frac{1}{\omega_j}$;
- ρ_i – інтенсивність навантаження (трафік), що виникає при обслуговуванні заявок j -го типу, $\rho_j = \lambda_j \omega_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$;
- ρ – сумарна інтенсивність навантаження [в Ерл] на ЦПП, $\rho = \sum_{j=1}^F \rho_j$;
- τ – максимальний (нормований) час очікування початку обслуговування заявки на надання послуги;
- $t_{\text{оч}}$ – час очікування початку обслуговування заявки;
- θ – середній час очікування початку обслуговування заявки.

Проаналізуємо основні моделі процесу обслуговування заявок на етапі їх доступу до служб ЦПП.

Виникнення черги на обслуговування заявок можливе лише при збігу двох подій:

1. Всі ОП, що забезпечують надання необхідної послуги j -го типу, зайняті обслуговуванням інших заявок на надання цього ж типу послуги. Примітка: Технічний стан, при якому вільний ОП не може виконувати покладені на нього функції через будь-яку несправність в ньому (технічна відмова ОП), в даній роботі не розглядається.

2. В ЦПП надходить заявка на надання послуги j -го типу.

Оскільки між зазначеними подіями відсутній причинно-наслідковий зв'язок, їх слід вважати незалежними. У такому випадку ймовірність утворення черги можна визначити як добуток ймовірностей цих подій [11]. Водночас альтернативним підходом до вирішення цього завдання є застосування методу Н. Бухмана. Основою цього методу стало використання другої формули Ерланга [12], яка дозволяє визначити ймовірність W_x знаходження у системі розподілу інформації, що містить V повнодоступно включених обслуговуючих приладів, $x \geq V$ заявок (на обслуговування і очікування обслуговування), що створюють інтенсивність навантаження ρ [Ерл]:

$$W_x = \frac{\rho^x}{(V+1)!} \left[\sum_{K=1}^{V-1} \frac{\rho^K}{K!} + \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \right]^{-1}. \quad (1)$$

Ймовірність утворення черги заявок на їх обслуговування $W(t_{\text{оч}} > 0)$ обумовлюється наявністю в розподільній системі заявок, що надходять на обслуговування $x \geq V$, тобто

$$W(t_{\text{оч}} > 0) = \sum_{K=V}^{\infty} W_K. \quad (2)$$

При розкритті у виразі (2) параметра W_K може бути отримана ймовірність утворення черги на отримання послуг:

$$W(t_{\text{оч}} > 0) = \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \left[\sum_{K=1}^{V-1} \frac{\rho^K}{K!} + \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \right]^{-1}. \quad (3)$$

Однак, у більшості випадків оцінки функціонування систем розподілу інформації при використанні способу обслуговування заявок з очікуванням використовується ймовірність $W(t_{\text{оч}} > \tau)$ того, що час очікування початку обслуговування заявки перевищить задану (нормовану) величину τ . Чисельне значення цієї величини визначається параметрами інфокомунікаційної системи і значною мірою залежить від рівня ієрархії управління, характеру наданого типу послуги, особливостей контингенту користувачів послугами, а також інших технологічних і організаційних чинників. Тому при вирішенні завдань оцінки якості обслуговування заявок на надання інтелектуальних послуг чисельні значення величини τ формуються в вихідних даних завдання. З теорії телетрафіку відомо [13, 14], що Н. Бухман запропонував рішення задачі визначення зазначеної ймовірності. Воно полягає в

пошуку добутку безумовної ймовірності виникнення черги, тобто $W(t_{\text{оч}} > 0)$, і умовної ймовірності $W_V(t_{\text{оч}} > \tau)$ того, що за умови виникнення черги, час очікування початку обслуговування заявки перевищить задану величину τ :

$$W(t_{\text{оч}} > \tau) = W(t_{\text{оч}} > 0)W_V(t_{\text{оч}} > \tau). \quad (4)$$

Умовна ймовірність $W_V(t_{\text{оч}} > \tau)$ визначається з припущення, що моменти закінчення обслуговування заявок, а отже і моменти вибірки з черги та постановки на обслуговування заявок, що очікують, є величинами випадковими і розподілені за експоненційним законом. При такому припущенні доведено, що

$$W_V(t_{\text{оч}} > \tau) = \exp\left[-(V - \rho)\frac{\tau}{\theta}\right], \quad (5)$$

де θ – середній час очікування закінчення попереднього заняття з моменту надходження нової заявки.

Величина θ залежить від значення середнього часу обслуговування заявки t_c і закону розподілу часу обслуговування заявок.

$$\theta = \frac{t_c(1+v^2)}{2}, \quad (6)$$

де v – коефіцієнт варіації, що залежить від закону розподілу часу обслуговування заявки. При постійному законі розподілу часу обслуговування заявки, тобто при $F(\theta) = \mu \exp[-\mu t] v = 1$ і $\theta = t_c$, а при постійному законі розподілу $F(\theta) = \text{const} - v = 0$ і $\theta = \frac{t_c}{2}$.

Тоді відповідно до (3–6):

$$W(t_{\text{оч}} > \tau) = \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \left[\sum_{K=1}^{V-1} \frac{\rho^K}{K!} + \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \right]^{-1} \exp\left[-(V-\rho)\frac{\tau}{\theta}\right]. \quad (7)$$

Беручи до уваги, що в переважній більшості випадків час обслуговування заявки на надання інтелектуальних послуг є величиною випадковою (крім деяких випадків передачі заздалегідь формалізованих повідомлень), розподіленою за законом, близьким до експоненціального, як правило, приймається $\theta = t_c$.

Вирази (3) і (7) в явному вигляді можуть застосовуватися лише при програмному (зі застосуванням комп'ютерів) вирішенні завдань з оцінки якості обслуговування заявок на етапі доступу до служб ЦПП. При ручному вирішенні подібних задач можуть бути використані результати табулювання зазначених формул, наведені у вигляді таблиць і номограм в науково-технічній та довідковій літературі, наприклад, в [15].

Іншим важливим параметром моделі розподільної системи, що забезпечує обслуговування заявок за способом з очікуванням на етапі їх доступу до ОП служб ЦПП, є час очікування заявки в черзі. Як уже зазначалося вище, цей параметр описується випадковою величиною з законом розподілу, близьким до експоненціального. З огляду на те, що час очікування початку обслуговування заявки на етапі її доступу до служб ЦПП обумовлює відповідне збільшення навантаження на транспортну мережу, його можна ототожнювати з часом надання самої послуги (передачі повідомлень). У зв'язку з цим за теоремою Бабицького достатньо знати лише середнє значення цієї величини – θ . З теорії телетрафіку [16] відомо, що середнє значення часу очікування залежить від таких показників, як середнє значення передачі безпосередньо самих повідомлень t_c , ймовірності виникнення черги $W(t_{\text{оч}} > 0)$ і математичного очікування числа вільних ОП $|V - \rho|$:

$$\theta = W(t_{\text{оч}} > 0)t_c[V - \rho]^{-1}, \quad (8)$$

або з урахуванням (3):

$$\theta = \rho^V t_c \left[\left(\sum_{K=1}^{V-1} \frac{\rho^K}{K!} + \frac{\rho^V}{(V-1)!(V-\rho)} \right) (V-1)!(V-\rho^2) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Параметром, що обумовлює обсяг обладнання ЦПП при фіксованій якості обслуговування заявок на надання послуг, або показник якості обслуговування заявок при фіксованому обсязі обладнання, є ступінь використання ОП:

$$a = \frac{\rho}{v} \Big|_{q=\text{const}}, \quad (10)$$

де q – показник якості обслуговування заявок на надання послуг. Для систем із втратами $q = 1 - p$, для систем з очікуванням – $q = W(t_{\text{оч}} \leq \tau) = 1 - W(t_{\text{оч}} > \tau)$.

При проведенні порівняльного аналізу варіантів морфологічної побудови ЦПП доцільно використовувати залежність $a = f(v, q=\text{const})$. У відомій науково-технічній літературі, наприклад [17], ця залежність представлена графічно за результатами, отриманими чисельними методами. Аналітично для систем з очікуванням, що обумовлює характер функціонування ЦПП, побудованих за варіантами 3 і 4, ця залежність може бути визначена при розкритті виразу (10):

$$a = \frac{\rho[1-W(t_{\text{оч}}>\tau)]}{v}, \quad (11)$$

де $W(t_{\text{оч}} > \tau)$ розглядається [18, 19] як показник умовних втрат (послуга, що надається з часом очікування більше τ не має цінності, а заявка на неї може вважатися втраченою).

Перейшовши до межі

$$\lim a = \lim \frac{\rho[1-W(t_{\text{оч}}>\tau)]}{v}, \quad (12)$$

де $v \rightarrow \infty$ і розкривши параметр $1 - W(t_{\text{оч}} > \tau)$ через вираз 7, отримаємо $\lim a = l, v \rightarrow \infty$.

Це підтверджується результатами вирішення виразів (12) і (7) чисельними методами. Результати таких рішень, що наочно ілюструють характер залежності $a = f(v, q = 0,09)$ для різних значень відносного часу очікування початку обслуговування заявки $\frac{\tau}{t_c} = 0; 0,5; 1,0; 2,0$, зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Характер залежності $a = f(v, q = 0,09)$ для різних значень відносного часу очікування початку обслуговування заявки $\frac{\tau}{t_c} = 0; 0,5; 1,0; 2,0$

V	$\frac{\tau}{t_c} = 0$		$\frac{\tau}{t_c} = 0,5$		$\frac{\tau}{t_c} = 1,0$		$\frac{\tau}{t_c} = 2,0$	
	ρ	a	ρ	A	ρ	a	ρ	a
3	0,4	0,13	0,6	0,2	0,9	0,32	1,4	0,47
4	0,8	0,20	1,2	0,3	1,6	0,40	2,3	0,58
5	1,2	0,24	1,9	0,38	2,5	0,50	3,3	0,66
6	1,7	0,28	2,6	0,43	3,3	0,55	4,2	0,70
7	2,3	0,33	3,3	0,47	4,2	0,60	5,2	0,74
8	2,8	0,36	4,1	0,51	5,1	0,64	6,1	0,76
9	3,4	0,38	4,9	0,54	6,0	0,67	7,1	0,79
10	4,0	0,40	5,7	0,57	6,9	0,69	8,1	0,81
20	11,0	0,55	14,7	0,74	16,5	0,83	18,0	0,90
30	18,6	0,62	24,1	0,80	26,3	0,88	27,9	0,93

Аналізуючи наведені дані, можна зробити висновок, що при фіксованій якості обслуговування заявок, яка у даному випадку визначається ймовірністю $W(t_{oc} > \tau) = 0,01$: залежність $a = \frac{\rho}{v} \Big|_{q=const}$, має виражений нелінійний характер; зі збільшенням угруповання ОП різко зростає ступінь їх використання (і навпаки); при чисельності $V = 10 - 20$ ОП ступінь їх використання наближається до межі і змінюється незначно; ступінь використання ОП тим вищий, чим більше відносний час очікування $\frac{\tau}{t_c}$.

На ступінь використання ОП істотно впливає також нормоване значення якості обслуговування заявок на надання послуг. Дані розрахунку залежності $a = f(v, q)$ при $\frac{\tau}{t_c} = 1$ наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Нормоване значення якості обслуговування заявок на надання послуг (залежність $a = f(v, q)$ при $\frac{\tau}{t_c} = 1$)

V	$W(t_{oc} > \tau) = 0,01$		$W(t_{oc} > \tau) = 0,1$		$W(t_{oc} > \tau) = 0,2$	
	ρ	A	ρ	a	ρ	A
3	0,4	0,13	1,8	0,58	2,1	0,70
4	0,8	0,20	2,7	0,69	3,0	0,75
5	1,2	0,24	3,6	0,72	3,6	
6	1,7	0,28	4,5	0,75	4,9	0,82
7	2,3	0,33	5,5	0,79	5,9	0,84
8	2,8	0,36	6,5	0,81	6,9	0,86
9	3,4	0,38	7,4	0,82	7,8	0,87
10	4,0	0,40	8,4	0,84	8,9	0,89
20	11,0	0,55	18,2	0,91	18,8	0,94
30	18,6	0,62	28,1	0,94	28,7	0,96

З наведених залежностей видно, що чим жорсткіші вимоги висуваються до якості обслуговування заявок, тим менший показник ступеня використання ОП. Очевидна і залежність між ступенем використання ОП і загальним обсягом обладнання ЦПП: чим нижчий ступінь використання каналів (спричинений, наприклад, підвищеними вимогами до якості обслуговування), тим більший необхідний обсяг обладнання в центрах інтелектуальних послуг, і навпаки.

Наслідком розглянутих закономірностей можна вважати вплив функціональної повноти ОП на обсяг обладнання ЦПП при фіксованій якості обслуговування заявок. При вузькій спеціалізації ОП вони формуються в відокремлені групи, ємність яких (число ОП в групі) визначається величиною навантаження на них і нормованою якістю обслуговування заявок на послуги, що надаються ОП даної групи. Чим вужча «спеціалізація» ОП, тим більше груп вони утворюють при фіксованому переліку послуг, що надаються даним ЦПП користувачам. Дроблення загальної кількості ОП на групи призводить, як показали вище розглянуті закономірності, до зниження ступеня їх використання і, як наслідок, до збільшення загального обсягу обладнання ЦПП при фіксованому навантаженні і нормованій якості обслуговування.

Висновки

Запропоновано моделі обслуговування заявок у ЦПП на етапі надання послуг користувачам з урахуванням архітектурних, функціональних та експлуатаційних особливостей. Запропоновано чотири варіанти структурної побудови ЦПП – від інтегрованих із комутаційною станцією до дворівневих моделей із загальною чергою – та формалізовано відповідні математичні моделі систем масового обслуговування, що дозволило дослідити ймовірісно-часові характеристики процесу.

Моделювання показало, що структура ЦПП суттєво впливає на ефективність використання обслуговуючих приладів, ймовірність втрат заявок та середній час очікування. Зокрема, використання вузькоспеціалізованих ОП доцільне лише при високих обсягах трафіку, тоді як за умов помірного навантаження оптимальним є застосування дворівневої моделі з загальною чергою. Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості їх використання для оптимізації архітектури ЦПП у мережах IP-телефонії, хмарних комунікаціях та контакт-центрах нового покоління.

Література

1. Федюшин О.І. Розробка моделей центру обслуговування викликів з системою інтерактивної голосової відповіді [Електронний ресурс] / О.І.Федюшин, О.І. Баланко // *Technology Audit and Production Reserves*. – 2015. – № 4(3(24)). – С. 4 – 12. – Режим доступу: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2015.47975>.
2. Dudin A. Analysis of the Polling System with Two Markovian Arrival Flows, Finite Buffers, Gated Service and Phase-Type Distribution of Service and Switching Times: [Electronic resource] / A.Dudin, A.Nazarov, A.Moiseev // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science*. – 2022. – Vol. 1605. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9_1.
3. Thiongane M. The Impact of Agents Heterogeneous in Call Center Performance Measures: [Electronic resource] / M. Thiongane, M.M. Ould Deye, M. Gueye, N. Bame // *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*. – 2025. – Vol. 610. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-031-86493-3_18.
4. Abdullah S. Analysis of Queue Models in Simulation Applications: [Electronic resource] / S. Abdullah, Y. Göktuğ, A.Durdali // *Sakarya University Journal of Computer and Information Sciences*. 2025. – Vol. 8, Iss.1. – P. 123 – 135. – Mode of access: <https://doi.org/10.35377/saucis...1610018>.
5. Lisovskaya E., Pankratova E., Moiseeva S., Pagano M. Analysis of a Resource-Based Queue with the Parallel Service and Renewal Arrivals: [Electronic resource] / E. Lisovskaya, E. Pankratova, S. Moiseeva, M. Pagano // *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science*. 2020. – Vol. 12563. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_26.
6. Kuznetsov I.M. Applying fast simulation to the evaluation of customers blocking probability in the multichannel queueing system with multicast access: [Electronic resource] / I.M. Kuznetsov, A.A. Shumska // *Kibernetika ta Systemnyi Analiz*. – 2024. – Mode of access: DOI:10.34229/KCA2522-9664.24.2.5.
7. Gross D. Fundamentals Of Queueing Theory, Fourth Edition: E-Book: [Electronic resource] / D. Gross, J. F. Shortie, J.M. Thompson, C.M. Harris // *Virginia: WILEY*, 2008. – 500 p. – Mode of access: https://vdoc.pub/documents/fundamentals-of-queueing-theory-fourth-edition-2utpmao1hcng?utm_source=chatgpt.com (дата звернення: 10.06.2025).
8. Giambene G. Queueing Theory and Telecommunications: Networks and Applications: E-Book: [Electronic resource] / Giambene G. // *University of Siena: Springer*, 2014. – P. 663. – Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/262804196_Queueing_Theory_and_Telecommunications_Networks_and_Applications_Springer_NY_2nd_edition_2014 (дата звернення: 22.06.2025).
9. Yang H. A Study of a Loss System with Priorities: [Electronic resource] / H. Yang, J. Fu, J. Wu, M. Zukerman // *Mathematics*. – 2023. – № 13. – Mode of access: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07344>.
10. Balabanova I. Forecasting Teletraffic Performance Using Regression Analysis, FNNN, GRNN and CFNN †: [Electronic resource] / I.Balabanova, G. Georgiev // *of The 4th International Conference on Communications, Information, Electronic and Energy Systems*. – 2024. – № 60(1). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/engproc2024060011>.
11. Konyrova M. Efficiency assessment of IoT devices control with Teletraffic theory: [Electronic resource] / M. Konyrova, S. Kumyrbayeva, T. Iliev, K. Chezhimbayeva // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2023. – № 3(9 (123)). – P. 49 – 59. – Mode of access: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281287>.
12. Herrmann C. The complete analysis of the discrete time finite DBMAP/G/1/N queue: [Electronic resource] / Herrmann C. // *Performance Evaluation*. – 2001– Vol. 43, Iss. 2 – P. 95 – 121. – Mode of access: [https://doi.org/10.1016/S0166-5316\(00\)00037-7](https://doi.org/10.1016/S0166-5316(00)00037-7).
13. Yang H. A Study of a Loss System with Priorities : [Electronic resource] / H. Yang, J. Fu, J. Wu, M. Zukerman // *Mathematics. Performance Evaluation*. – 2023. – Vol. 13. – Mode of access: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07344>.
14. Dudin S.A. Analysis of a Queueing System with Possibility of Waiting Customers Jockeying between Two Groups of Servers: [Electronic resource] / S. A. Dudin O.S. Dudina O.I. Kostyukova // *Mathematics*. – 2023. – № 11(6). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math11061475>.

15. Muynck M.D. Analysis of a Queue with General Service Demands and Multiple Servers with Variable Service Capacities: [Electronic resource] / M.D. Muynck, H. Bruneel, S. Wittevrongel // *Mathematics*. – 2023. № 11(4), 953. – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math11040953>.
16. Dudin A. Analysis of the Polling System with Two Markovian Arrival Flows, Finite Buffers, Gated Service and Phase-Type Distribution of Service and Switching Times: [Electronic resource] / A. Dudin Y. Sinyugina // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. – 2022. – P. 1 – 15. – Mode of access: [10.1007/978-3-031-09331-9_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9_1).
17. D'auria B. An M/M/c queue with queueing-time dependent service rates: [Electronic resource] / B. D'auria, J.B.F. Adan, R.E. Bekker, V. Kulkarni // *Mathematics*. 2021. – P. 1 – 23. – Mode of access: [10.48550/arXiv.2107.04557](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2107.04557)
18. Klimenok V. Priority Multi-Server Queueing System with Heterogeneous Customers: [Electronic resource] / V. Klimenok, A.Dudin, V. Vishnevsky // *Mathematics*. 2020. – № 8(9). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math8091501>.
19. Morozov E. Stability analysis of multiserver discrete-time queueing systems with renewal-type server interruptions : [Electronic resource] / E. Morozov, D. Fiems, H. Bruneel // *Performance Evaluation*. – 2011. – Vol. 68, Iss. 12. – P.1261 – 1275. – Mode of access: <https://doi.org/10.1016/j.peva.2011.07.002>.

References

1. Fediushyn O. I. Rozrobka modelei tsentru obsluhovuvannya vyklykiv z systemoiu interaktyvnoi holosovoi vidpovidi [Elektronnyi resurs] / O.I.Fediushyn, O.I. Balenko // *Technology Audit and Production Reserves*. – 2015. – № 4(3(24)). – S. 4 – 12. – Rezhym dostupu: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2015.47975>.
2. Dudin A. Analysis of the Polling System with Two Markovian Arrival Flows, Finite Buffers, Gated Service and Phase-Type Distribution of Service and Switching Times: [Electronic resource] / A.Dudin, A.Nazarov, A.Moiseev // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science*. – 2022. – Vol. 1605. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9_1.
3. Thiongane M. The Impact of Agents Heterogeneous in Call Center Performance Measures: [Electronic resource] / M. Thiongane, M.M. Ould Deye, M. Gueye, N. Bame // *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*. – 2025. – Vol. 610. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-031-86493-3_18.
4. Abdullah S. Analysis of Queue Models in Simulation Applications: [Electronic resource] / S. Abdullah, Y. Göktuğ, A.Durdali // *Sakarya University Journal of Computer and Information Sciences*. 2025. – Vol. 8, Iss.1. – P. 123 – 135. – Mode of access: <https://doi.org/10.35377/saucis...1610018>.
5. Lisovskaya E., Pankratova E., Moiseeva S., Pagano M. Analysis of a Resource-Based Queue with the Parallel Service and Renewal Arrivals: [Electronic resource] / E. Lisovskaya, E. Pankratova, S. Moiseeva, M. Pagano // *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science*. 2020. – Vol. 12563. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_26.
6. Kuznetsov I.M. Applying fast simulation to the evaluation of customers blocking probability in the multichannel queueing system with multicast access: [Electronic resource] / I.M. Kuznetsov, A.A. Shumska // *Kibernetyka ta Systemnyi Analiz*. – 2024. – Mode of access: DOI:10.34229/KCA2522-9664.24.2.5.
7. Gross D. Fundamentals Of Queueing Theory, Fourth Edition: E-Book: [Electronic resource] / D. Gross, J. F. Shortie, J.M. Thompson, C.M. Harris // *Virginia: WILEY*, 2008. – 500 p. – Mode of access: https://vdoc.pub/documents/fundamentals-of-queueing-theory-fourth-edition-2utpmao1hcnq?utm_source=chatgpt.com (data zvernennia: 10.06.2025).
8. Giambene G. Queueing Theory and Telecommunications: Networks and Applications: E-Book: [Electronic resource] / Giambene G. // *University of Siena: Springer*, 2014. – P. 663. – Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/262804196_Queueing_Theory_and_Telecommunications_Networks_and_Applications_Springer_NY_2nd_edition_2014 (data zvernennia: 22.06.2025).
9. Yang H. A Study of a Loss System with Priorities: [Electronic resource] / H. Yang, J. Fu, J. Wu, M. Zukerman // *Mathematics*. – 2023. – № 13. – Mode of access: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07344>
10. Balabanova I. Forecasting Teletraffic Performance Using Regression Analysis, FNNN, GRNN and CFNN †: [Electronic resource] / I.Balabanova, G. Georgiev // *The 4th International Conference on Communications, Information, Electronic and Energy Systems*. – 2024. – № 60(1). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/engproc2024060011>.
11. Konyrova M. Efficiency assessment of IoT devices control with Teletraffic theory: [Electronic resource] / M. Konyrova, S. Kумыzbayeva, T. Iliev, K. Chezhibayeva // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2023. – № 3(9 (123)). – P. 49 – 59. – Mode of access: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.281287>.
12. Herrmann C. The complete analysis of the discrete time finite DBMAP/G/1/N queue: [Electronic resource] / Herrmann C. // *Performance Evaluation*. – 2001– Vol. 43, Iss. 2 – P. 95 – 121. – Mode of access: [https://doi.org/10.1016/S0166-5316\(00\)00037-7](https://doi.org/10.1016/S0166-5316(00)00037-7).
13. Yang H. A Study of a Loss System with Priorities : [Electronic resource] / H. Yang, J. Fu, J. Wu, M. Zukerman // *Mathematics. Performance Evaluation*. – 2023. – Vol. 13. – Mode of access: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07344>.
14. Dudin S.A. Analysis of a Queueing System with Possibility of Waiting Customers Jockeying between Two Groups of Servers: [Electronic resource] / S. A. Dudin O.S. Dudina O.I. Kostyukova // *Mathematics*. – 2023. – № 11(6). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math11061475>.
15. Muynck M.D. Analysis of a Queue with General Service Demands and Multiple Servers with Variable Service Capacities: [Electronic resource] / M.D. Muynck, H. Bruneel, S. Wittevrongel // *Mathematics*. – 2023. № 11(4), 953. – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math11040953>.
16. Dudin A. Analysis of the Polling System with Two Markovian Arrival Flows, Finite Buffers, Gated Service and Phase-Type Distribution of Service and Switching Times: [Electronic resource] / A. Dudin Y. Sinyugina // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. – 2022. – P. 1 – 15. – Mode of access: [10.1007/978-3-031-09331-9_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9_1).
17. D'auria B. An M/M/c queue with queueing-time dependent service rates: [Electronic resource] / B. D'auria, J.B.F. Adan, R.E. Bekker, V. Kulkarni // *Mathematics*. 2021. – P. 1 – 23. – Mode of access: [10.48550/arXiv.2107.04557](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2107.04557).
18. Klimenok V. Priority Multi-Server Queueing System with Heterogeneous Customers: [Electronic resource] / V. Klimenok, A.Dudin, V. Vishnevsky // *Mathematics*. 2020. – № 8(9). – Mode of access: <https://doi.org/10.3390/math8091501>.
19. Morozov E. Stability analysis of multiserver discrete-time queueing systems with renewal-type server interruptions : [Electronic resource] / E. Morozov, D. Fiems, H. Bruneel // *Performance Evaluation*. – 2011. – Vol. 68, Iss. 12. – P.1261 – 1275. – Mode of access: <https://doi.org/10.1016/j.peva.2011.07.002>.