DOI 10.31891/2307-5732-2024-343-6-15
УДК 681.3.01+681.325

ДУМИН ІГОР
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0003-2708-0429
e-mail: ihor.r.dumyn@lpnu.ua
НАКОНЕЧНИЙ АНДРІАН
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0002-1873-6337
e-mail: adrnakon@gmail.com

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МАТЕРИНСЬКИХ ВЕЙВЛЕТІВ ДЛЯ ЗНЕШУМЛЕННЯ СИГНАЛІВ ЕКГ

У статті розглядається порівняльний аналіз 105 материнських вейвлетів різних вейвлет-сімейств для знешумлення сигналів електрокардіограм (ЕКГ) з використанням дискретного вейвлет-перетворення. Ефективність кожного материнського вейвлету оцінюється на основі значень отриманих середньоквадратичних похибок реконструйованих сигналів у порівнянні з оригінальними

Ключові слова: цифрова обробка сигналів, дискретне вейвлет-перетворення, ЕКГ.

DUMYN IHOR, NAKONECHNYI ADRIAN
Lviv Polytechnic National University

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF MOTHER WAVELETS FOR DENOISING ECG SIGNALS

Reducing the noise of the electrocardiogram (ECG) signal is crucial for accurate analysis and diagnosis of cardiovascular diseases. Discrete wavelet transform is an effective method for lowering ECG signal noise. However, the choice of the mother wavelet significantly impacts the effectiveness of noise removal.

This study is devoted to a comparative analysis of the effectiveness of 105 mother wavelets from different families for denoising electrocardiogram (ECG) signals using discrete wavelet transform. The study aims to determine the most effective mother wavelets that preserve important ECG signal characteristics during the direct and inverse discrete wavelet transform. For the study, a set of 100 ECG signals was randomly selected from the large-scale Physionet 12-lead electrocardiogram database for arrhythmia detection. Each ECG signal was subjected to direct and inverse transformations with thresholded detail coefficients, and the transformation's mean square error (MSE) was calculated. The most effective mother wavelet functions were determined based on the obtained MSE values.

The study's results demonstrate that the choice of the mother wavelet crucially impacts the transformation efficiency and, as a result, eliminates ECG signal noise. Among the 105 investigated mother wavelets, the six most effective functions belonging to the Haar (haar), Biorthogonal (bior), Reverse biorthogonal (rbio) and Daubechies (db) families were identified, namely haar, db1, bior1.1, bior1.3, bior1.5 and rbio1.1. To visualize the study's results, we constructed a heatmap of the mean square error values for each processed ECG signal using different families of wavelet functions. Also, graphs of the dependence of the average values of the MSE for each wavelet function were constructed, which allowed us to determine the most effective wavelets.

The comprehensive nature of this study, covering a wide range of mother wavelets and a large ECG signal dataset, suggests that the results can serve as valuable guidance for researchers and practitioners working with ECG signals. The identified best mother wavelets can be used in practical applications to improve the accuracy of ECG signal analysis and diagnosis.

Keywords: digital signal processing, discrete wavelet transform, ECG.

Постановка задачі

Сигнали електрокардіограми (ЕКГ) широко використовуються для діагностики та моніторингу серцевих патологій. Однак сигнали ЕКГ часто забруднені різними типами шумів, такими як дрейф базової лінії, м'язові артефакти та перешкоди від ліній живлення. Присутність шумів та завад може пригнічувати важливі характеристики ЕКГ-сигналу, що призводить до неточної інтерпретації та потенційно помилкового діагнозу [1]. Тому ефективні методи знешумлення мають важливе значення для підвищення точності кардіологічного сигналу та поліпшення якості інтерпретації ЕКГ сигналів.

Цифрове вейвлет-перетворення є потужним інструментом для знешумлення ЕКГ сигналів завдяки своїй здатності забезпечувати часово-частотну локалізацію та проводити аналіз з різною роздільною здатністю. Дискретне вейвлет-перетворення розкладає ЕКГ сигнал на різні частотні діапазони, а використання технік порогування дозволяє відокремити шумові компоненти від корисного сигналу, виконуючи зворотне цифрове вейвлет-перетворення, можна реконструювати знешумлений ЕКГ сигнал [2].

Однак, ефективність очищення ЕКГ сигналу на основі дискретного вейвлет-перетворення у великій мірі залежить від вибору материнського вейвлету. Різні материнські вейвлети мають різні характеристики та властивості, які можуть впливати на результати знешумлення. Вибір невідповідного материнського вейвлету може призвести до неефективного перетворення та втрати важливих характеристик ЕКГ сигналу. На додаток, широкий спектр доступних материнських вейвлетів з різних сімейств вейвлетів ускладнює визначення найбільш відповідних задачі фільтрації ЕКГ сигналу.

Зважаючи на важливість вибору материнського вейвлету, існує невелика кількість досліджень, присвячених порівняльному аналізу широкого набору материнських вейвлет функцій для знешумлення ЕКГ сигналів. Більшість наявних досліджень зосереджені на обмеженому наборі материнських вейвлетів або конкретному сімействі вейвлет функцій, без комплексної оцінки широкого спектра материнських вейвлетів

різних сімейств. Крім цього, більшість досліджень не надають систематичного порівняння продуктивності вейвлетів з використанням великого набору даних ЕКГ сигналів.

Отже, існує потреба в комплексному дослідженні, яке вивчає ефективність широкого спектра материнських вейвлет функцій з різних вейвлет-сімейств для знешумлення ЕКГ сигналів за допомогою дискретного вейвлет-перетворення. Таке дослідження повинно використовувати велику базу даних ЕКГ сигналів для забезпечення надійності отриманих результатів. Шляхом проведення порівняльного аналізу ефективності різних вейвлетів можна отримати інформацію, яка допоможе обирати найбільш відповідний вейвлет для ефективної обробки ЕКГ сигналу.

Аналіз існуючих останніх джерел

Вейвлет-перетворення - інструмент, який дозволяє аналізувати сигнали одночасно в часовій та частотній областях надаючи можливість однаково добре виявляти як низькочастотні, так і високочастотні складові сигналу на різних часових масштабах [2]. Саме тому вейвлет-перетворення знайшло широке застосування в обробці сигналів ЕКГ.

Розглянуті дослідження підкреслюють постійні зусилля, спрямовані на вдосконалення методів знешумлення ЕКГ-сигналів за використанням дискретного вейвлет-перетворення. Дослідники вивчали різні стратегії, такі як класичні [5][9], гібридні підходи [7] та інтеграцію глибокого навчання [8], щоб покращити ефективність шумозаглушення. Однак ці дослідження були зосереджені переважно на конкретних методах або алгоритмах, а не на порівнянні різних материнських вейвлетів у різних вейвлет-сімействах.

В рамках цього дослідження розглядається лише вибір найбільш ефективних вейвлетів для дискретного вейвлет-перетворення, які можуть використовуватись для розв'язання задач фільтрації.

Однією з особливостей поточного дослідження є використання масштабної множини даних для проведення оцінки ефективності роботи доступних материнських базових функцій дискретного вейвлет-перетворення та можливість порівняти їх ефективність в рамках однієї зведеної таблиці.

Таким чином, метою даної роботи є: дослідження ефективності базових вейвлетів для декомпозиції ЕКГ сигналів та вибір напрямків майбутніх досліджень.

Виклад основного матеріалу

Вибір бази даних для дослідження

В рамках проведеного дослідження використано базу даних: A large scale 12-lead electrocardiogram database for arrhythmia study [10]. Дана база містить ЕКГ (12 відведень) від 45 152 пацієнтів, записані з частотою дискретизації 500 Гц, включаючи різні загальні ритми та додаткові серцево-судинні захворювання, усі з коментарями професійних експертів. Такий набір даних був створений з метою допомоги проведенню подальших розробок, оцінки та вдосконалення як нових, так і існуючих статистичних методів та методів машинного навчання для досліджень, зосереджених на аритмії та серцево-судинних захворюваннях. Набір даних є загальнодоступним на вебсайті Physionet і доступний для дослідників у всьому світі.

Для цього дослідження з вказаної вище великомасштабної бази даних було відібрано набір зі 100 сигналів ЕКГ. Така підмножина дає можливість забезпечувати репрезентативну вибірку різноманітних аритмій і характеристик пацієнтів, наявних у повному наборі даних.

Використані інструменти дослідження

Основною мовою програмування, використаною в цьому дослідженні, був Python (версія 3.12). Python було обрано завдяки його екосистемі наукових обчислювальних бібліотек, простоті використання та широкому застосуванню в наукових дослідженнях.

Для реалізації прямого дискретного вейвлет-перетворення та оберненого дискретного вейвлет-перетворення була використана бібліотека PyWavelets [11]. PyWavelets — бібліотека Python, яка надає велику кількість функцій, пов’язаних з вейвлетами, включаючи вейвлет-перетворення і обробку сигналів на основі вейвлетів. Вона підтримує різноманітні сімейства вейвлетів і пропонує ефективні реалізації алгоритмів прямого та зворотного перетворень.

Для маніпулювання даними та аналізу було використано кілька популярних бібліотек Python. NumPy використовувався для ефективних числових обчислень і операцій з масивами. Для попередньої обробки, фільтрації та агрегації даних використовувався Pandas.

Додатково до вказаних бібліотек для зчитування та обробки сигналів ЕКГ із бази даних Physionet використовувався пакет Waveform Database (WFDB) [12]. WFDB представляє набір інструментів для читання, запису та аналізу фізіологічних сигналів, зокрема тих, що зберігаються у форматі MIT. Пакет забезпечує зручний спосіб доступу до записів ЕКГ і пов’язаних з ними анотацій у Physionet A Large-Scale 12-Lead Electrocardiogram Database for Arrhythmia Study.

Набір базових функцій пакета PyWavelets, які були використані в рамках дослідження наведений в таблиці 1:

Техніка порогування

У даному дослідженні при застосуванні техніки порогування використовувалось жорстке порогування та універсальний алгоритм визначення порогового значення. Відомо, що жорстке порогове згладжування дозволяє шляхом приведення вейвлет-коефіцієнтів деталізації до нуля, ефективно згладжуючи сигнал.

Таблиця 1

Набори базових функцій використаних при дослідженні

Назва сімейства	Перелік функцій
Haar	haar
Daubechies	db1, db2, db3, db4, db5, db6, db7, db8, db9, db10, db11, db12, db13, db14, db15, db16, db17, db18, db19, db20, db21, db22, db23, db24, db25, db26, db27, db28, db29, db30, db31, db32, db33, db34, db35, db36, db37, db38
Symlets	sym2, sym3, sym4, sym5, sym6, sym7, sym8, sym9, sym10, sym11, sym12, sym13, sym14, sym15, sym16, sym17, sym18, sym19, sym20
Coiflets	coif1, coif2, coif3, coif4, coif5, coif6, coif7, coif8, coif9, coif10, coif11, coif12, coif13, coif14, coif15, coif16, coif17
Biorthogonal	bior1.1, bior1.3, bior1.5, bior2.2, bior2.4, bior2.6, bior2.8, bior3.1, bior3.3, bior3.5, bior3.7, bior3.9, bior4.4, bior5.5, bior6.8
Reverse biorthogonal	rbio1.1, rbio1.3, rbio1.5, rbio2.2, rbio2.4, rbio2.6, rbio2.8, rbio3.1, rbio3.3, rbio3.5, rbio3.7, rbio3.9, rbio4.4, rbio5.5, rbio6.8

При жорсткому пороговому згладжуванні кожен вейвлет-коефіцієнт (D) модифікується наступним чином:

$$D_j = \begin{cases} 0, \text{якщо } |D_j| \le \lambda \\ D_j, \text{якщо } |D_j| > \lambda \end{cases}$$

Процедура складається з кількох кроків. Спочатку обчислюються вейвлет-коефіцієнти шляхом виконання прямого вейвлет перетворення сигналу ЕКГ. Потім для модифікації кожного коефіцієнта деталізації застосовується правило жорсткого порогування. Нарешті, обернене перетворення виконується з використанням модифікованих коефіцієнтів для відновлення вхідного сигналу [2].

Універсальний алгоритм порогового визначення, запропонований Донохо і Джонстоном, пропонує систематичний підхід до визначення порогового значення [14]. Універсальний поріг обчислюється, як

$$\lambda = \sigma\sqrt{2\log N}$$

де - оцінений рівень шуму (оцінка стандартного відхилення базового Гаусового шуму в наборі даних), N - кількість вейвлет-коефіцієнтів.

Оцінка ефективності знешумлення

В процесі дослідження ефективність дискретного вейвлет-перетворення сигналу ЕКГ оцінювалася з використанням середньої квадратичної похибки (СКП), як основного показника. СКП дозволяє кількісно оцінити різницю між сигналами та є чутливою до великих відхилень, що дозволяє виявляти суттєві помилки в реконструкції сигналу. СКП проста для інтерпретації, а її універсальність дозволяє застосовувати її до різних типів сигналів та задач. СКП є широко використовуваною оцінкою ефективності при обробці сигналів і машинному навчанні, зокрема для оцінки регресії та усунення шумів [13].

В цьому випадку СКП кількісно визначає середню квадратичну різницю між вхідним сигналом і обробленим сигналом, отриманим після застосування цифрового вейвлет-перетворення і зворотного цифрового вейвлет-перетворення з конкретним базовим вейвлетом. При цьому забезпечується оцінка загальної ефективності перетворення, низькі значення СКП вказують на високі результати реконструкції сигналу.

Математично СКП визначається наступним чином:

$$\text{СКП} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \widehat{X}_i\right)^2$$

де:

n- кількість вибірок у сигналі

X_i- і-та вибірка вхідного сигналу ЕКГ

$\widehat{X}_i$- і-та вибірка реконструйованого сигналу ЕКГ, отриманого після застосування прямого та оберненого дискретного вейвлет-перетворення зі специфічним базовим вейвлетом

Використовуючи СКП, як показник ефективності, наведене дослідження дає можливість проводити оцінку ефективності різних материнських вейвлетів для обробки сигналу ЕКГ, дозволяючи при цьому дослідникам приймати обґрунтовані рішення при виборі найбільш відповідного материнського вейвлета для конкретних застосувань.

Результати досліджень

Для візуалізації результатів використано підхід з побудови теплокарти значень середньої квадратичної похибки для кожного сигналу для якого було виконане пряме та зворотне вейвлет-перетворення вибірки (рядки) з використанням вейвлет функцій сімейств зазначених в таблиці 1. Візуалізація Рис.1 допомагає зрозуміти продуктивність материнських вейвлетів і полегшує ідентифікацію закономірностей і тенденцій у результатах дослідження.

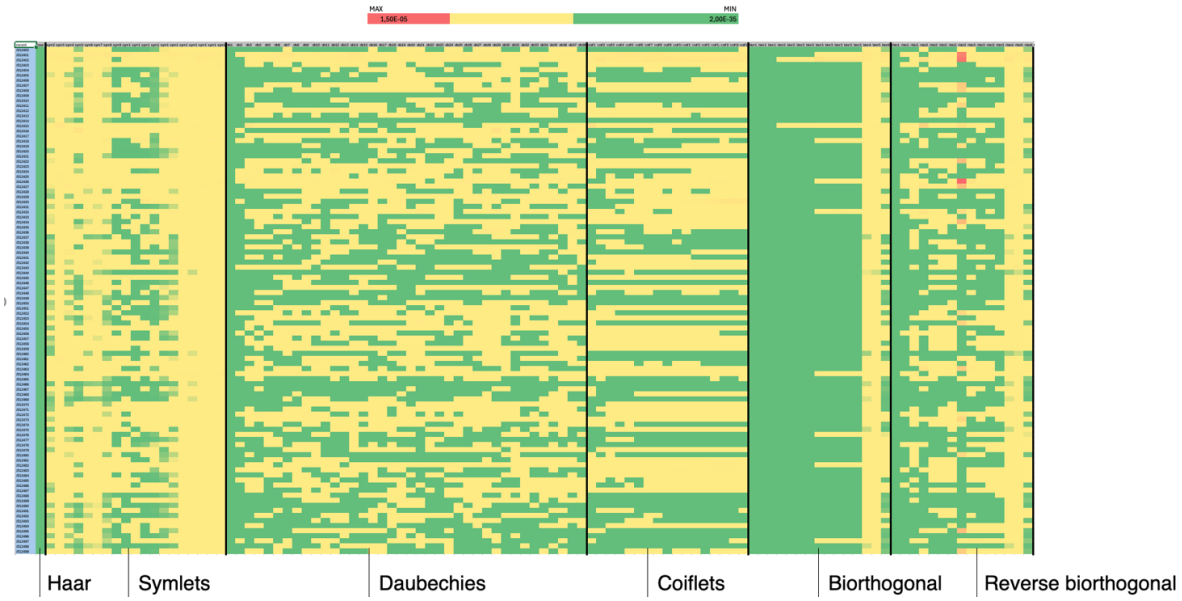

Рис. 1 Теплокарта СКП реконструкції вхідних сигналів ЕКГ опрацьованих з використанням дискретного вейвлет-перетворення для різних сімейств вейвлет функцій

Максимальне значення отриманого СКП складає: 1,31540374999999E-5
Мінімальне значення отриманого СКП складає: 1,94052762968097E-35

Для визначення максимально ефективних базових вейвлетів побудовані графіки залежностей середніх значень СКП для кожної материнської функції, графіки наведено на Рис. 2-7. Значення СКП відсортовані за зростанням, вибірки для графіків формувались з метою максимізації їх репрезентативності. Значення СКП для вейвлетів: coif8, coif9, db21, rbio6.8, db13, db37, coif13, sym3, db3, coif14, coif1, db29, coif17, coif15, coif16, rbio3.3, rbio2.2, rbio3.1, знаходяться в діапазоні 1,831E-08 .. 8,246E-07 та беручи до уваги порядок значень не відображені на рисунках нижче.

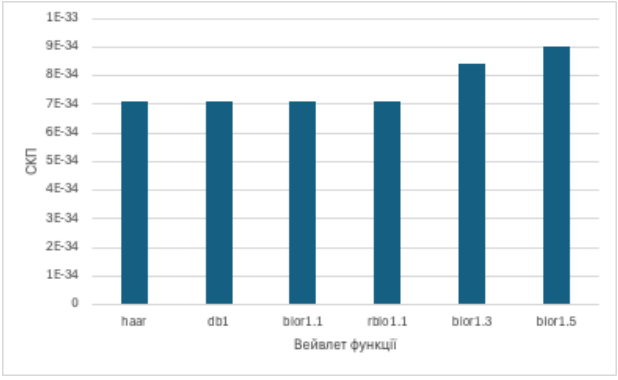

Рис. 2 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 1

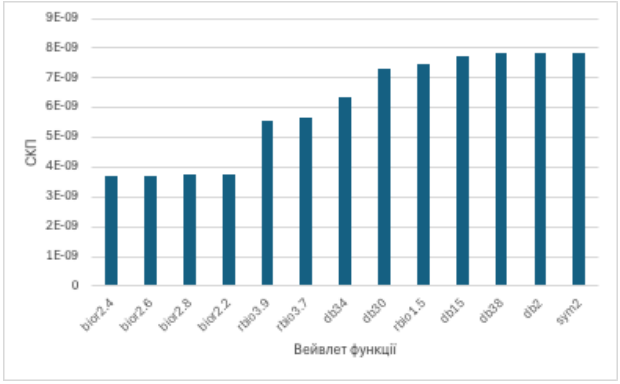

Рис. 3 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 2

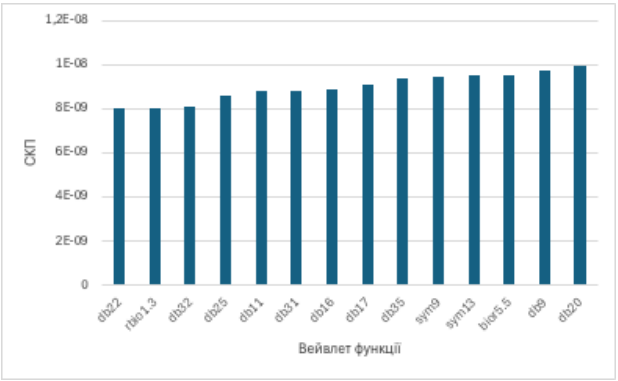

Рис. 4 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 3

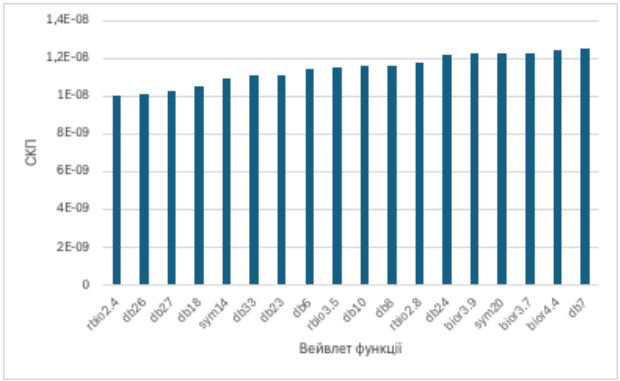

Рис. 5 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 4

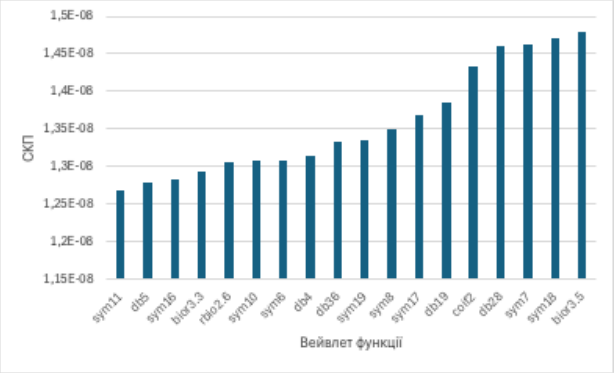

Рис. 6 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 5

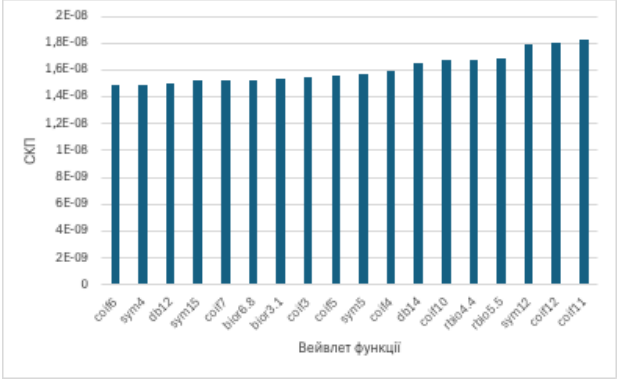

Рис. 7 Середні значення СКП дискретних вейвлет-перетворень для використаних вейвлет-функцій. Частина 6

Висновки

У цьому дослідженні ми виконали порівняльний аналіз 105 материнських вейвлетів із різних сімейств вейвлетів для обробки сигналу ЕКГ за допомогою дискретного вейвлет-перетворення. Основна мета полягала в тому, щоб визначити найефективніші материнські вейвлети, які при реалізації перетворення дозволять зберігати важливі характеристики сигналу.

Серед 105 досліджених материнських вейвлетів було обрано шість вейвлетів з найнижчою СКП. Дані функції належать до сімейств Haar (haar), Biorthogonal (bior), Reverse biorthogonal (rbio) і Daubechies (db), а саме це haar, db1, bior1.1, bior1.3, bior1.5 та rbio1.1.

Комплексний характер цього дослідження, що охоплює широкий спектр материнських вейвлетів і великий набір даних сигналу ЕКГ, дозволяє засвідчити, що отримані результати, можуть слугувати цінними вказівками для дослідників і практиків, які працюють із сигналами ЕКГ.

Література

1. В. А. Візір, О. В. Деміденко, І. Б. Приходько [та ін.]. - Електрокардіографія. Функціональні ЕКГ тести. Амбулаторне моніторування ЕКГ (за Холтером) та артеріального тиску: навч.-метод. посіб. до практичних занять з функціональної діагностики для студентів 5 курсу медичних факультетів. У 3-х ч. Ч. 1, - . – Запоріжжя, ЗДМУ, 2019. – 103 с

2. Наконечний А.Й., Лагун І.І., Верес З.Є., Наконечний Р.А., Федак В.І. «Теорія і практика оброблення сигналів у малохвильовій (wavelet) області» / Монографія. – Львів: Растр – 7, 2020 – 470с.

3. Лагун І.І. Багатокритеріальна оптимізація вибору базових функцій в процесі малохвильового перетворення сигналів / Лагун І.І., Наконечний А.Й. // Науковий збірник Української академії друкарства “Комп’ютерні технології друкарства” –Львів. 2017. № 37- С.63 – 67

4. Lagun I., Nakonechnyy A., Samotyy V. "Using fuzzy logic to optimise the selection of mother wavelets" Kracow University of Technology, Technical Transactions, Issue 3, Volume 2018 ((115), 107 – 114pp.

5. Octa Heriana, Ali Matooq Al Misbah “Comparison of Wavelet Family Performances in ECG Signal Denoising” Jurnal Elektronika dan Telekomunikasi (JET), Vol. 17, No. 1, Agustus 2017, pp. 1-6

6. Lahmiri S. Comparative study of ECG signal denoising by wavelet thresholding in empirical and variational mode decomposition domains. Healthc Technol Lett. 2014 Sep 16;1(3):104-9. doi: 10.1049/htl.2014.0073. PMID: 26609387; PMCID: PMC4613857

7. Balasubramanian, S. ., Naruka, M. S., Tewari, G. Optimal ECG Signal Denoising Using DWT with Enhanced African Vulture Optimization. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication, 10(12), 01–11. https://doi.org/10.17762/ijritcc.v10i12.5832

8. Antczak, Karol. “Deep Recurrent Neural Networks for ECG Signal Denoising,” (2018)

9. Aqil, Mounaim & Jbari, Atman & Bourouhou, Abdennaser. (2017). ECG Signal Denoising by Discrete Wavelet Transform. International Journal of Online Engineering (iJOE). 13. 51. 10.3991/ijoe.v13i09.7159

10. Zheng, J., Guo, H., & Chu, H. (2022). A large scale 12-lead electrocardiogram database for arrhythmia study (version 1.0.0). PhysioNet. https://doi.org/10.13026/wgex-er52

11. Xie, C., McCullum, L., Johnson, A., Pollard, T., Gow, B., & Moody, B. (2023). Waveform Database Software Package (WFDB) for Python (version 4.1.0). PhysioNet. https://doi.org/10.13026/9njx-6322

12. Gregory R. Lee, Ralf Gommers, Filip Wasilewski, Kai Wohlfahrt, Aaron O’Leary (2019). PyWavelets: A Python package for wavelet analysis. Journal of Open Source Software, 4(36), 1237, https://doi.org/10.21105/joss.01237

13. Z. Wang and A. C. Bovik, "Mean squared error: Love it or leave it? A new look at Signal Fidelity Measures," in IEEE Signal Processing Magazine, vol. 26, no. 1, pp. 98-117, Jan. 2009, doi: 10.1109/MSP.2008.930649.

14. Donoho, D. L., & Johnstone, I. M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. Biometrika, 81(3), 425–455. https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.425

References

1. V. A. Vizir, O. V. Demidenko, I. B. Prykhodko [ta in.]. - Elektrokardiohrafiia. Funktsionalni EKH testy. Ambulatorne monitoruvannia EKH (za Kholterom) ta arterialnoho tysku: navch.-metod. posib. do praktychnykh zaniat z funktsionalnoi diahnostyky dlia studentiv 5 kursu medychnykh fakultetiv. U 3-kh ch. Ch. 1, - . – Zaporizhzhia, ZDMU, 2019. – 103 s.
2. Nakonechnyi A.I., Lahun I.I., Veres Z.Ie., Nakonechnyi R.A., Fedak V.I. «Teoriia i praktyka obroblennia syhnaliv u malokhvylovii (wavelet) oblasti» / Monohrafiia. – Lviv: Rastr – 7, 2020 – 470s.
3. Lahun I.I. Bahatokryterialna optymizatsiia vyboru bazovykh funktsii v protsesi malokhvylovoho peretvorennia syhnaliv / Lahun I.I., Nakonechnyi A.I. // Naukovyi zbirnyk Ukrainskoi akademii drukarstva "Kompiuterni tekhnolohii drukarstva" –Lviv. 2017. № 37- S.63 – 67
4. Lagun I., Nakonechnyy A., Samotyy V. "Using fuzzy logic to optimise the selection of mother wavelets" Kracow University of Technology, Technical Transactions, Issue 3, Volume 2018 ((115), 107 – 114pp.
5. Octa Heriana, Ali Matooq Al Misbah "Comparison of Wavelet Family Performances in ECG Signal Denoising" Jurnal Elektronika dan Telekomunikasi (JET), Vol. 17, No. 1, Agustus 2017, pp. 1-6
6. Lahmiri S. Comparative study of ECG signal denoising by wavelet thresholding in empirical and variational mode decomposition domains. Healthc Technol Lett. 2014 Sep 16;1(3):104-9. doi: 10.1049/htl.2014.0073. PMID: 26609387; PMCID: PMC4613857
7. Balasubramanian, S. ., Naruka, M. S., Tewari, G. Optimal ECG Signal Denoising Using DWT with Enhanced African Vulture Optimization. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication, 10(12), 01–11. https://doi.org/10.17762/ijritcc.v10i12.5832
8. Antczak, Karol. "Deep Recurrent Neural Networks for ECG Signal Denoising," (2018)
9. Aqil, Mounaim & Jbari, Atman & Bourouhou, Abdennaser. (2017). ECG Signal Denoising by Discrete Wavelet Transform. International Journal of Online Engineering (iJOE). 13. 51. 10.3991/ijoe.v13i09.7159
10. Zheng, J., Guo, H., & Chu, H. (2022). A large scale 12-lead electrocardiogram database for arrhythmia study (version 1.0.0). PhysioNet. https://doi.org/10.13026/wgex-er52
11. Xie, C., McCullum, L., Johnson, A., Pollard, T., Gow, B., & Moody, B. (2023). Waveform Database Software Package (WFDB) for Python (version 4.1.0). PhysioNet. https://doi.org/10.13026/9njx-6322
12. Gregory R. Lee, Ralf Gommers, Filip Wasilewski, Kai Wohlfahrt, Aaron O'Leary (2019). PyWavelets: A Python package for wavelet analysis. Journal of Open Source Software, 4(36), 1237, https://doi.org/10.21105/joss.01237
13. Z. Wang and A. C. Bovik, "Mean squared error: Love it or leave it? A new look at Signal Fidelity Measures," in IEEE Signal Processing Magazine, vol. 26, no. 1, pp. 98-117, Jan. 2009, doi: 10.1109/MSP.2008.930649.
14. Donoho, D. L., & Johnstone, I. M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. Biometrika, 81(3), 425–455. https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.425