

<https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-355-11>
УДК 621.371

ЛЮБЧИК ЯРОСЛАВ

Черкаський державний технологічний університет
<https://orcid.org/0009-0008-4249-0059>
e-mail: ya.s.liubchyk.asp22@chdtu.edu.ua

ГОНЧАРОВ АРТЕМ

<https://orcid.org/0000-0003-4043-5300>
e-mail: a.honcharov@chdtu.edu.ua

ГАВРИШ ОЛЕКСАНДР

<https://orcid.org/0000-0003-4621-9510>
e-mail: o.havrysh@chdtu.edu.ua

ВОРОБКАЛО ТЕТЯНА

<https://orcid.org/0000-0002-8985-9924>
e-mail: t.vorobkalo@chdtu.edu.ua

ОЦІНЮВАННЯ НЕЕНЕРГЕТИЧНОГО ПАРАМЕТРА РАДІОСИГНАЛУ СПІЛЬНО З УСІЧЕНОЮ ОЦІНКОЮ ДИСПЕРСІЇ АДИТИВНОЇ АСИМЕТРИЧНО- ЕКСЦЕСНОЇ ЗАВАДИ

В роботі синтезовано обчислювальні алгоритми спільного оцінювання неенергетичного параметра радіосигналу та дисперсії адитивної асиметрично-ексцесної завади. Для спрощення алгоритму знаходження спільної оцінки пропонується для оцінки неінформативного параметра використовувати метод максимізації усіченого полінома, що суттєво спрощує обчислювальну процедуру, зберігаючи підвищені точнісні властивості оцінки інформаційного параметра.

Ключові слова: неенергетичний параметр радіосигналу, метод максимізації усіченого полінома, асиметрично-ексцесна завада, спільна оцінка параметрів.

LYUBCHYK YAROSLAV

HONCHAROV ARTEM

HAVRYSH OLEKSANDR

VOROBKALO TETYANA

Cherkasy State Technological University

ESTIMATION OF THE NON-ENERGY PARAMETER OF THE RADIO SIGNAL WITH TRUNCATED VARIANCE ESTIMATION UNDER ADDITIVE SKEWNESS-KURTOSIS NOISE

The traditional approach to signal parameter estimation is based on the assumption of a Gaussian noise distribution. However, this assumption does not always reflect the real conditions in communication channels, and the efficiency of such algorithms degrades significantly when the actual noise distribution deviates from the Gaussian model. Increasing the complexity of the noise model leads to computational difficulties, so there is a need for practical approaches to describe non-Gaussian noise. This paper proposes using a noise model characterized by a finite sequence of central moments and cumulants. In this case, the polynomial maximization method can be applied, which is conceptually similar to the maximum likelihood method. According to this method, an arbitrary probability density function is approximated by a stochastic polynomial. The higher the polynomial order, the more accurately it describes the real probability density. When the non-Gaussian noise distribution does not deviate significantly from the Gaussian one, satisfactory results can be achieved even with low-order stochastic polynomials. In this study, the degree of deviation from the Gaussian distribution is determined by the skewness and kurtosis coefficients. Such a noise model is referred to as skewness-kurtosis noise. It is assumed that the third- and fourth-order cumulants have a stable statistical nature and their values are known a priori. However, the noise power (second-order cumulant) may vary and thus must be estimated jointly with the informative signal parameter. Since the estimation accuracy of the second-order cumulant is not critical, a truncated polynomial maximization method is proposed to simplify the computation. Meanwhile, the full polynomial maximization method is used to estimate the non-energy signal parameter. Although the estimation accuracy increases with the polynomial order, this also complicates the joint estimation algorithm. Therefore, the combined use of full and truncated polynomial maximization methods provides a reasonable compromise between high estimation accuracy and computational simplicity.

Keywords: non-energy parameter of the radio signal, the method of maximizing the truncated polynomial, asymmetric-excessive noise, joint parameter estimation.

Стаття надійшла до редакції / Received 29.05.2025

Прийнята до друку / Accepted 26.06.2025

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Однією з основних задач статистичного опрацювання сигналів є задача оцінювання параметрів сигналів на фоні завад [1, 2]. Радіосигнал широко використовується в різних системах передачі інформації. В параметрах сигналу міститься інформація про дальність, кутові координати, радіальну та кутову швидкість об'єкту [3]. Метод вимірювання координат об'єкту визначає, який з параметрів підлягає оцінці: амплітуда, частота, фаза. Всі оцінювані параметри можна розділити на енергетичні та неенергетичні. Енергетичним називається такий параметр, від якого залежить енергія сигналу і, відповідно, відношення сигнал/завада. До енергетичних параметрів належать амплітуда і тривалість сигналу. Неенергетичним називається такий

параметр, від якого енергія сигналу і відношення сигнал/завада не залежать. До неенергетичних параметрів відносяться початкова фаза, частота, час затримки і т.д. [1-3]

При проходженні корисного сигналу через канал зв'язку на нього завжди діє завада, що спотворює його. Характер взаємодії між корисним сигналом і завадою може бути достатньо складним, але в якості математичної моделі найчастіше використовують адитивні завади, тобто такі, що додаються до сигналу. Завади можуть мати різне походження: бувають атмосферні, індустриальні, іоносферні, космічні, внутрішні (теплові, дробові) завади. При цьому імовірнісний характер не завжди описується гаусівським законом розподілу. Тому розробка ефективних методів та обчислювальних алгоритмів знаходження оцінки інформативного параметра сигналу в умовах прийому на фоні негаусівських завад є актуальною задачею.

Аналіз досліджень та публікацій

Задача знаходження оцінки неенергетичних параметрів сигналів на сьогоднішній час є досить актуальною та розглядається в багатьох роботах [1-3]. Стандартним підходом для розв'язку такої задачі є використання моделі завади з гаусівською щільністю розподілу ймовірності, тоді для оцінки неенергетичного параметра зручно використовувати метод максимальної правдоподібності [4, 5] або метод моментів [6]. Втім гаусівська модель не завжди повно описує характер завади в каналі зв'язку і потрібно використовувати більш складні моделі негаусівських завад [7, 8], для яких використання методу максимальної правдоподібності наражає на математичні труднощі отримання результатів. В роботах [9, 10] пропонується використовувати непараметричну BDS-статистику, яка дозволяє синтезувати обчислювальні алгоритми оцінювання неенергетичного параметра за умови відсутності інформації про щільність розподілу ймовірності завади, в тому числі і за умови її негаусівського характеру. Ефективним параметричним методом оцінки параметрів негаусівської випадкової послідовності є метод максимізації полінома, заснований на використанні кінцевої послідовності усереднених функцій [11]. Для зменшення обчислювальних затрат також було запропоновано модифікацію методу, так званий метод максимізації усередненого полінома і отримано результати для оцінки різних неенергетичних параметрів завад на фоні обраних класів завад, чий розподіл є відмінний але близький до гаусівського [12, 13]. Міра близькості визначається кумулянтами від 3 до 6 порядків [11, 14].

Формулювання цілей статті

У загальному випадку математичною моделлю вхідного сигналу є адитивна суміш корисного сигналу $S(A, t)$ та завади $n(t)$ виду

$$x(t) = S(A, t) + n(t), \quad t \in [0; T].$$

Задача оцінювання параметрів прийнятого сигналу з неперервним часом є достатньо складною. При використанні цифрового способу опрацювання сигналу, будемо вважати, що в розпорядженні спостерігача є незалежна вибірка $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягом n із генеральної сукупності значень випадкової величини x_v , що має вигляд:

$$x_v = S_v + n_v, \quad v = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де S_v – радіосигнал, що у загальному випадку можна записати в наступному вигляді

$$S_v = A e_v \cos(\omega \delta v + \varphi), \quad (2)$$

У виразі (1) другий доданок n_v – центрована випадкова величина, в описі якої кумулянти з другого по четвертий порядки χ_2, χ_3 і χ_4 грають основну роль, кумулянти χ_i порядку i , $i = \overline{5, 2s}$ строго рівні нулю, а вищі кумулянти не використовуються, тому можуть приймати довільні значення. Таким чином, n_v є перфорованою асиметрично-ексцесною випадковою величиною 2-го типу 1-го виду з глибиною перфорації $r = 2s - 4$ [11].

У виразі (2) множник e_v – обвідна радіосигналу; параметри A , ω , φ – відповідно амплітуда, частота і початкова фаза несучого коливання, δ – рівномірний крок дискретизації, v – відліки (моменти часу спостереження).

У багатьох випадках амплітуда A сигналу є відомою. У якості інформативного параметра сигналу виступає один із неенергетичних параметрів: частота коливання або початкова фаза, тому його необхідно оцінювати [1-3].

Будемо вважати, що завадова обстановка може змінюватися з часом, тому невідомим виявляється не тільки один з неенергетичних параметрів корисного сигналу, але і один з параметрів асиметрично-ексцесної завади 2-го типу 1-го виду. Параметри завади можна вимірювати окремо від неенергетичних параметрів корисного сигналу. У цьому випадку необхідно використовувати декілька вибірок, що ускладнює процедуру знаходження оцінок. Налагоджуватися (адаптуватися) до невідомих параметрів завади можна, використовуючи одну основну вибірку, а саму процедуру оцінювання називають навчанням без вчителя або самонавчання.

Таким чином, метою даної роботи є синтез обчислювальних алгоритмів спільної оцінки неенергетичного параметра (частоти або початкової фази) радіосигналу та параметра асиметрично-ексцесної завади 2-го типу 1-го виду (дисперсії χ_2). Тобто алгоритми будуть постійно адаптуватися під конкретну завадову обстановку і крім інформативного неенергетичного параметра (ω або φ) додатково спільно з ним оцінюються один або декілька параметрів завади χ_2 , χ_3 і χ_4 . В даному випадку розглянемо ситуацію, коли суттєвих змін зазнає потужність завади, яка характеризується параметром χ_2 , тому спільній оцінці підлягає неенергетичний параметр корисного сигналу і дисперсія завади χ_2 .

Виклад основного матеріалу

Для спрощення алгоритмів знаходження оцінок застосуємо метод максимізації повного та усіченого поліномів

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n h_{iv(s)[0]}(\vartheta, \chi_2) [x_v^i - m_{iv}(\vartheta, \chi_2)] \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{\chi_2=\hat{\chi}_2} = 0, \\ \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n h_{iv(s)[2]}(\vartheta, \chi_2) [x_v^i - m_{iv}(\vartheta, \chi_2)] \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{\chi_2=\hat{\chi}_2} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$i \neq (c, e, \dots, l)$$

В рівняннях (3) $h_{iv(s)[0]}(\vartheta, \chi_2)$, $i = \overline{1, s}$ – оптимальні коефіцієнти, що мінімізують дисперсію оцінки неенергетичного параметра радіосигналу, знайдених методом максимізації (повного) полінома (індекс 0 в квадратних дужках вказує на оцінювання інформативного параметра корисного сигналу); $h_{iv(s)[2]}$ – вагові коефіцієнти, що мінімізують дисперсію оцінки параметра χ_2 завади, знайдену методом максимізації усіченого полінома (індекс 2 в квадратних дужках вказує на порядковий номер оцінюваного кумулянта завади); $m_{iv}(\vartheta, \chi_2)$ – початкові моменти досліджуваної випадкової величини виду (1).

В роботі [11] показано, що оптимальні вагові коефіцієнти знаходяться з розв'язку системи рівнянь:

$$\sum_{j=1}^s h_{jv(s)[k]}(\vartheta, \chi_2) F_{(i,j)v}(\vartheta, \chi_2) = \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} m_{iv}(\vartheta, \chi_2), \quad j = \overline{1, s},$$

де $F_{(i,j)v}(\vartheta, \chi_2) = m_{(i+j)v}(\vartheta, \chi_2) - m_{iv}(\vartheta, \chi_2) \cdot m_{jv}(\vartheta, \chi_2)$ – центровані корелянти, що визначаються через початкові моменти [11].

Мінімальний степінь полінома для знаходження скалярної оцінки параметра випадкової послідовності визначається обраним параметром. Так, скалярна оцінка неенергетичного параметра можлива починаючи зі степеня полінома $s=1$ і вище, оцінка параметра χ_2 можлива при мінімальному степені полінома $s=2$, для оцінювання параметра γ_3 потрібно брати поліном 3-го ступеня і вище і т.д. Тобто порядок кумулянта визначає найменший можливий степінь, при якому можливе оцінювання скалярного параметра. Отже, при спільному оцінюванні кількох параметрів послідовності мінімальний степінь обох поліномів визначатиметься степенем s при якому можливо оцінити параметри. Очевидно, що при спільному оцінюванні неенергетичного параметра і параметра χ_2 побудова алгоритму можлива, починаючи зі степеня $s=2$ і вище. В роботі розглянуто синтез обчислювальних алгоритмів для степенів поліномів від 2 до 5. Використання більш високих степенів вбачається недоцільним, оскільки це призводить до громіздких результатів і сповільнення динаміки покращення ефективності.

При степені полінома $s=2$ система рівнянь запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{v=1}^n h_{1v(2)[0]}(\vartheta, \chi_2) [x_v - S_v(\vartheta)] + \sum_{v=1}^n h_{2v(2)[0]}(\vartheta, \chi_2) [x_v^2 - S_v^2(\vartheta) - \chi_2] \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{\chi_2=\hat{\chi}_2} = 0, \\ \sum_{v=1}^n h_{1v(2)[2]}(\vartheta, \chi_2) [x_v - S_v(\vartheta)] + \sum_{v=1}^n h_{2v(2)[2]}(\vartheta, \chi_2) [x_v^2 - S_v^2(\vartheta) - \chi_2] \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{\chi_2=\hat{\chi}_2} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

Використовуючи символні обчислення в середовищі Wolfram Mathematica, легко показати, що коефіцієнти першого рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} h_{1v(2)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{1}{A_2(\chi_2)} B_v(\vartheta) \chi_2^{1.5} [2S_v(\vartheta) \gamma_3 + (2 + \gamma_4) \sqrt{\chi_2}], \\ h_{2v(2)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= -\frac{1}{A_2(\chi_2)} B_v(\vartheta) \chi_2^{1.5} \gamma_3, \end{aligned} \quad (5)$$

де визначник, який називається об'ємом тіла розміром 2 асиметрично-ексцесних випадкових величин, має вигляд

$$A_2 = \chi_2^3 (2 + \gamma_4 - \gamma_3^2).$$

Пара вагових коефіцієнтів другого рівняння максимізації усіченого полінома набувають вигляду

$$h_{1v(2)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{-\chi_2}{A_2(\chi_2)} [2S_v(\vartheta) + \gamma_3 \sqrt{\chi_2}], \quad h_{2v(2)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{\chi_2}{A_2(\chi_2)}. \quad (6)$$

Підставляючи коефіцієнти виду (5), (6) в рівняння (4) отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими: неенергетичним параметром радіосигналу ϑ та дисперсією завади χ_2 . В загальному випадку, цю систему рівнянь можна записати у вигляді двох степеневих рівнянь відносно параметра χ_2

$$A_m \chi_2 + B_m \sqrt{\chi_2} + C_m \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}^{\chi_2=\hat{\chi}_2} = 0, \quad m = \overline{1, 2},$$

з коефіцієнтами, що залежать від степеневих перетворень вибіркового значень x_v^i та корисного сигналу S_v^j , похідної від корисного сигналу по неенергетичному параметру $B_v = \frac{\partial S_v}{\partial \vartheta}$, апріорно відомих значень параметрів асиметрично-ексцесної завади γ_3 і γ_4 . Для спрощення запису розглянемо статистику виду

$$p_{(i,j)v} = \sum_{v=1}^n B_v x_v^i S_v^j, \quad q_{(i,j)v} = \sum_{v=1}^n x_v^i S_v^j.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} A_1 &= p_{(0,0)v}, \quad B_1 = (2 + \gamma_4)(p_{(0,1)v} - p_{(1,0)v}), \quad C_1 = p_{(0,2)v} - p_{(2,0)v} - 2\gamma_3(p_{(1,1)v} - p_{(0,2)v}), \\ A_2 &= n, \quad B_2 = \gamma_3(q_{(1,0)v} - q_{(0,1)v}), \quad C_2 = 2q_{(1,1)v} - q_{(2,0)v} - q_{(0,2)v}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що параметр ϑ входить до аргументу тригонометричних функцій, а саме рівняння є нелінійним відносно корисного сигналу, знайти оцінки шуканих параметрів в аналітичному вигляді не можливо. Для цього можуть бути використані чисельні ітераційні процедури, наприклад, методом Ньютона-Рафсона або процедура накопичення Фішера [15].

Було виявлено, що вагові коефіцієнти $h_{iv(s)[0]}(\vartheta, \chi_2)$, $i = \overline{1, s}$ першого рівняння мають повторювальну структуру з подібними множниками $a_s, b_s, c_s, \dots$, тому для спрощення подання будемо їх записувати в універсальній формі. Легко показати, що при степені полінома $s=3$ оптимальні коефіцієнти першого рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} h_{1v(3)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{3B_v(\vartheta)\chi_2^4}{\Delta_3(\chi_2)} [S_v^2(\vartheta)a_3 + 2S_v(\vartheta)b_3 + c_3], \\ h_{2v(3)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-3B_v(\vartheta)\chi_2^4}{\Delta_3(\chi_2)} [S_v(\vartheta)a_3 + b_3], \quad h_{3v(3)[0]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{B_v(\vartheta)\chi_2^4 a_3}{\Delta_3(\chi_2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

де визначник Δ_3 та множники представлені у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \chi_2^6[(\gamma_4 + 2)(9\gamma_4 + 6 - \gamma_4^2) + 3\gamma_3^2(4\gamma_4 - 3\gamma_3^2 - 8)] \\ a_3 &= 6\gamma_3^2 - 2\gamma_4 - \gamma_4^2, \quad b_3 = \gamma_3\sqrt{\chi_2}(2 + 3\gamma_3^2 + \gamma_4), \quad c_3 = \chi_2(4 - 12\gamma_3^2 + 10\gamma_4 + 3\gamma_3^2\gamma_4 + 4\gamma_4^2). \end{aligned}$$

Трійка вагових коефіцієнтів другого рівняння

$$h_{1v(3)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{-\chi_2}{\Delta_3(\chi_2)} [2S_v(\vartheta) + \gamma_3\sqrt{\chi_2}], \quad h_{2v(3)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{\chi_2}{\Delta_3(\chi_2)}, \quad h_{3v(3)[2]}(\vartheta, \chi_2) = 0. \quad (8)$$

Застосування методу максимізації усиченого полінома для формування другого рівняння приводить до того, що в ньому відмінними від нуля будуть лише перші два коефіцієнти, а решта тотожні нулю, що приводить до спрощення самого рівняння і спрощення процедури отримання оцінок. В роботах [11-13] показано, що з ростом степеня полінома ефективність шуканих оцінок зростає. В наступних роботах буде показано, що оцінка векторного параметра $\{\vartheta, \chi_2\}$, отримана з рівняння (3) при степені полінома $s=3$ з коефіцієнтами виду (7) і (8) матиме покращені точнісні характеристики порівняно з обчислювальним алгоритмом виду (4) з ваговими коефіцієнтами (5) і (6).

Логічно припустити, що подальше збільшення степеня полінома приведе до покращення точнісних характеристик шуканих оцінок. При степені полінома $s=4$, використовуючи пакет Wolfram Mathematica, отримано вагові коефіцієнти рівняння максимізації полінома (у повному вигляді)

$$\begin{aligned} h_{1v(4)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-6B_v\chi_2^{7.5}}{\Delta_4} [4S_v^3a_4 + S_v^2b_4 + 2S_vc_4 + d_4], \quad h_{2v(4)[0]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{6B_v\chi_2^{7.5}}{\Delta_4} [6S_v^2a_4 + S_vb_4 - c_4], \\ h_{3v(4)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-2B_v\chi_2^{7.5}}{\Delta_4} [12S_v a_4 + b_4], \quad h_{4v(4)[0]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{6B_v\chi_2^{7.5} a_4}{\Delta_4}, \end{aligned} \quad (9)$$

де об'єм тіла Δ_4 та множники набувають вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \chi_2^{10} \{288 + 4\gamma_4(360 + 480\gamma_4 + 180\gamma_4^2 + 57,5\gamma_4^3 - 8,5\gamma_4^4) + \\ &+ 30\gamma_4\gamma_3^2[-24(1 + 5,25\gamma_3^2) + \gamma_4(-68 + 9\gamma_3^2 - 34\gamma_4)] - 8\gamma_3^2(180 + 202,5\gamma_3^4)\}, \\ a_4 &= \gamma_3(9\gamma_3^4 - 15\gamma_3^2(\gamma_4 + 2) + 5\gamma_4(\gamma_4 + 2)^2), \\ b_4 &= \sqrt{\chi_2}(36\gamma_3^2(2\gamma_4 - 9) + 6\gamma_3^2(7\gamma_4^2 + 12\gamma_4 - 12) + \gamma_4(17\gamma_4^3 + 38\gamma_4^2 + 84\gamma_4 + 24)), \\ c_4 &= \chi_2\gamma_3(24 + 270\gamma_3^4 + 204\gamma_4 + 238\gamma_4^2 + 87\gamma_4^3 - 3\gamma_3^2(23\gamma_4^2 + 78\gamma_4 + 72)), \\ d_4 &= \chi_2^{1.5}(90\gamma_3^6 - 30\gamma_3^4(17\gamma_4 - 8) + \gamma_3^2(288 + 64\gamma_4 + 236\gamma_4^2 + 119\gamma_4^3) - 2(24 + 132\gamma_4 + 206\gamma_4^2 + 93\gamma_4^3 + \\ &+ 34\gamma_4^4)). \end{aligned}$$

Вагові коефіцієнти другого рівняння максимізації полінома (в усиченому вигляді) мають вигляд

$$h_{1v(4)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{-\chi_2}{\Delta_4(\chi_2)} [2S_v(\vartheta) + \gamma_3\sqrt{\chi_2}], \quad h_{2v(4)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{\chi_2}{\Delta_4(\chi_2)}, \quad h_{3v(4)[2]}(\vartheta, \chi_2) = h_{4v(4)[2]}(\vartheta, \chi_2) = 0. \quad (10)$$

Підставляючи вагові коефіцієнти виду (9) і (10) в систему рівнянь (3) отримаємо обчислювальний алгоритм для знаходження шуканої оцінки. Відзначимо, що при степені полінома $s=4$ ускладняється лише перше рівняння для знаходження інформативного параметра, а друге рівняння, в якому коефіцієнти оптимізовані під мінімум дисперсії параметра χ_2 так само містить лише два доданки як і при степені полінома $s=3$ за рахунок усичення полінома.

При степені полінома $s=5$ знайдено оптимальні коефіцієнти для повного рівняння максимізації полінома

$$\begin{aligned} h_{1v(5)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-60B_v\chi_2^{12}}{\Delta_5} [5S_v^4a_5 + 4S_v^3b_5 + S_v^2c_5 + 2S_v d_5 + e_5], \\ h_{2v(5)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{60B_v\chi_2^{12}}{\Delta_5} [10S_v^3a_5 + 6S_v^2b_5 + S_v c_5 + d_5], \\ h_{3v(5)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-20B_v\chi_2^{12}}{\Delta_5} [30S_v^2a_5 + 12S_v b_5 + c_5], \\ h_{4v(5)[0]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{60B_v\chi_2^{12}}{\Delta_5} [5S_v a_5 + b_5], \quad h_{5v(5)[0]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{-60B_v\chi_2^{12} a_5}{\Delta_5}. \end{aligned} \quad (11)$$

Компактна форма запису вагових коефіцієнтів (11) забезпечується завдяки введенню множників $\Delta_5 = 20\chi_2^{15}[1728 - 17280\gamma_3^2 + 23760\gamma_3^4 - 45360\gamma_3^6 - 111780\gamma_3^8 + 14580\gamma_3^{10} + 540\gamma_4(32 - 112\gamma_3^2 + 228\gamma_3^4 +$

$$\begin{aligned} &+ 618\gamma_3^6 - 117\gamma_3^8) + 1620\gamma_4^2(36 - 80\gamma_3^2 - 140\gamma_3^4 + 101\gamma_3^6) + 90\gamma_4^3(936 - 608\gamma_3^2 - 3114\gamma_3^4 + \\ &+ 195\gamma_3^6) + 45\gamma_4^4(1300 + 2584\gamma_3^2 - 989\gamma_3^4) + 36\gamma_4^5(276 + 845\gamma_3^2) - 5\gamma_4^6(157 + 476) - 2975\gamma_4^7], \\ a_5 &= 162\gamma_3^8 + 54\gamma_3^6(12 - 7\gamma_4) - \gamma_4^2(\gamma_4 + 2)(24 + \gamma_4(84 + \gamma_4(38 + 17\gamma_4))) + \\ &+ 6\gamma_3^4(\gamma_4(\gamma_4(26\gamma_4 - 33) - 216) - 84) + \gamma_3^2\gamma_4(504 + \gamma_4(1188 + \gamma_4(814 + 93\gamma_4))), \\ b_5 &= \gamma_3\sqrt{\chi_2}[810\gamma_3^6(3 + \gamma_4) - 9\gamma_3^4(348 + 5\gamma_4(64 + 59\gamma_4)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +5\gamma_4(2+\gamma_4)(\gamma_4(\gamma_4(17\gamma_4+38)+84)+24)+5\gamma_3^2(\gamma_4(\gamma_4(\gamma_4(513+146\gamma_4)+486)+372)-72)], \\
c_5 = & \chi_2[540\gamma_3^6((33+8\gamma_4)\gamma_4-108)-216\gamma_3^4((5\gamma_4(13\gamma_4-31)-374)\gamma_4-72)+ \\
& +\gamma_4(12+5\gamma_4(24+23\gamma_4))(\gamma_4(\gamma_4(17\gamma_4+38)+84)+24)+ \\
& +\gamma_3^2(2\gamma_4(\gamma_4(5\gamma_4(\gamma_4(289\gamma_4-330)-5562)-27108)-10008)-864)], \\
d_5 = & \chi_2^{1.5}\gamma_3[6480\gamma_3^8-540\gamma_3^6(57+40\gamma_4)-(12+5\gamma_4(23\gamma_4+24))(24+\gamma_4(84+\gamma_4(38+17\gamma_4)))+ \\
& +30\gamma_3^4(408+\gamma_4(1008+\gamma_4(1572+295\gamma_4)))-\gamma_3^2(-4032+\gamma_4(2232+\gamma_4(9612+5\gamma_4(2571\gamma_4+5374))))], \\
e_5 = & \chi_2^2[810\gamma_3^8(27+11\gamma_4)-90\gamma_3^6((1103+406\gamma_4)\gamma_4-552)+(24+\gamma_4(84+\gamma_4(38+17\gamma_4))) \times \\
& \times (\gamma_4(5\gamma_4(\gamma_4(7\gamma_4-45)-64)-168)-24)+10\gamma_3^4(\gamma_4(\gamma_4(4041+\gamma_4(8757+1069\gamma_4))-8868)-1548)+ \\
& +\gamma_3^2(6336+\gamma_4(31416+\gamma_4(\gamma_4(57398-5\gamma_4(2742\gamma_4+6347)))+75492))].
\end{aligned}$$

Платнею за покращення точнісних характеристик оцінок є громіздкість вагових коефіцієнтів, що приводить до суттєвого ускладнення обчислювальної процедури, тому подальше збільшення нелінійності опрацювання вибірових значень вбачається недоцільним.

Вагові коефіцієнти другого рівняння максимізації полінома (в усіченому вигляді) мають вигляд

$$\begin{aligned}
h_{1v(5)[2]}(\vartheta, \chi_2) &= \frac{-\chi_2}{\Delta_5(\chi_2)} [2S_v(\vartheta) + \gamma_3\sqrt{\chi_2}], \quad h_{2v(5)[2]}(\vartheta, \chi_2) = \frac{\chi_2}{\Delta_5(\chi_2)}, \\
h_{3v(5)[2]}(\vartheta, \chi_2) &= h_{4v(5)[2]}(\vartheta, \chi_2) = h_{5v(5)[2]}(\vartheta, \chi_2) = 0.
\end{aligned} \quad (12)$$

Після підстановки вагових коефіцієнтів виду (11) і (12) в рівняння (3) отримаємо систему двох нелінійних рівнянь для знаходження оцінок параметрів ϑ і χ_2 . При цьому оцінка параметра ϑ є оптимальною в класі поліноміальних перетворень степеня s , а оцінка параметра χ_2 є спрощеною, оскільки знаходиться із застосуванням усіченого полінома. Такий підхід дозволяє знайти розумний компроміс між бажанням підвищити точність оцінювання інформативного параметра, за рахунок збільшення ступеня нелінійності опрацювання вибірових значень, і прагненням зберегти відносну простоту обчислювальної процедури. Як і при нижчих степенях полінома оцінка знаходиться за допомогою чисельних методів.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

В роботі синтезовано поліноміальні степеневі алгоритми оцінювання неенергетичного параметра радіосигналу спільно з усіченою оцінкою дисперсії адитивної асиметрично-ексцесної завади при степенях полінома $s=2,5$. За рахунок врахування тонкої структури завади у вигляді коефіцієнту асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 точнісні властивості оцінок можуть бути значно кращими порівняно з випадком, коли оцінка інформативного параметра є оптимальною для гаусівської завади. Використання методу максимізації усіченого полінома для знаходження оцінки параметра χ_2 суттєво спрощує обчислювальну процедуру, порівняно з використанням повного методу. Такий підхід дозволяє спростити алгоритми і, як наслідок, збільшити швидкість обчислень зі збереженням підвищених точнісних характеристик. В подальшій перспективі планується проведення досліджень асимптотичних властивостей синтезованих обчислювальних алгоритмів і з'ясування динаміки точності оцінок з ростом степеня полінома залежно від статистичних властивостей завади.

Література

1. Жук, С.Я. (2023) *Технології оптимального оброблення сигналів*. Курс лекцій [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи», спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка / Жук, С.Я.; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 5.83 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 260 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/57037>
2. Калюжний О.Я. (2021) *Математичні алгоритми приймання та оброблення сигналів*. Частина II. Основи статистичної теорії приймання сигналів. Навчальний посібник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / Калюжний, О.Я.; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,65 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. 302 с.
3. Van Trees, H. L. (2013) *Detection Estimation and Modulation Theory* / Van Trees, H. L., Bell, K. L., Tiany Z. 2nd ed. – John Wiley & Sons. 1176 p.
4. Свид, І.В. (2022) Обробка радіолокаційної інформації систем спостереження повітряного простору: монографія. Дніпро: ЛІРА ЛТД. 224 с.
5. Sobolev, V. S. (2014) Maximum-likelihood estimates of the frequency of signals of laser Doppler anemometers / Sobolev, V.S., Zhuravel', F.A. *Journal of Communications Technology and Electronics*. Vol. 59, Issue 4. 294–301. doi: 10.1134/S1064226914030103
6. Krupiński R. (2013) Modified Moment Method Estimator for the Shape Parameter of Generalized Gaussian Distribution for a Small Sample Size / Krupiński, R. *Computer Information Systems and Industrial Management*. Vol. 8104. 420–429. doi: 10.1007/978-3-642-40925-7_39
7. Middleton, D. (2012) *Non-Gaussian Statistical Communication Theory*, John Wiley & Sons, 664 p.
8. [Abdelhak M. Zoubir](#), [Visa Koivunen](#), [Esa Ollila](#), [Michael Muma](#) (2018) *Robust Statistics for Signal Processing*, Cambridge University Press. 312 p.

9. Костенко, П.Ю., Фалькович, С.Я. (2021) *Основи статистичної теорії інформаційно-вимірювальних радіотехнічних систем*. Харків : ХНУПС., 612 с.
10. Слободянюк В.В. (2023) Непараметрична оцінка часу затримки широкосмугового сигналу в умовах впливу шуму з невідомим розподілом імовірності. *Системи обробки інформації*. № 2 (173). 48-57.
11. Kunchenko, Y.P. (2002) *Polynomial parameter estimation of close to Gaussian random variables* / Kunchenko, Y.P. – Aachen: Shaker Verlag. 396 p.
12. Гончаров, А.В. (2011) Оцінка частоти корисного сигналу при усіченому оцінюванні дисперсії асиметрично-ексцесної завади / Гончаров А.В., Уманець В.М. *Обробка сигналів і негауссівських процесів: праці III міжнародної науково-практичної конференції : тези доп.* – Черкаси: ЧДТУ. 103–105.
13. Гончаров, А.В. (2013) Спільне оцінювання фази радіосигналу та параметрів асиметричної завади з використанням усічених поліномів Кунченка / Гончаров, А.В., Уманець В.М., *SMSDP-2013: праці міжнародної науково-практичної конференції, 16-17 жовтня 2013 р. : тези доп.* К.: НАУ. 104-107.
14. Dodge Y. (2008) *The Concise Encyclopedia of Statistics* / Y.Dodge – NY: Springer New York. 612 p.
15. Гавриш О.С. Способи чисельного розв'язку систем рівнянь максимізації полінома при неоднаково розподілених вибіркових значеннях. // *Радіотехніка.* – Харків. №115. 2000. – С. 47-50.

References

1. Zhuk, S.Ya. (2023) *Technologies of optimal signal processing*. Lecture course [Electronic resource]: a textbook for bachelor's degree applicants in the educational program "Radio-technical computerized systems", specialty 172 Electronic communications and radio engineering / Zhuk, S.Ya.; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. - Electronic text data (1 file: 5.83 MB). - Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 260 p. - Access mode: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/57037>
2. Kalyuzhny O.Ya. (2021) *Mathematical algorithms for receiving and processing signals*. Part II. Fundamentals of the statistical theory of receiving signals. Textbook for students of specialty 172 "Telecommunications and Radio Engineering" / Kalyuzhny, O.Ya.; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. – Electronic text data (1 file: 10.65 MB). – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 302 p.
3. Van Trees, H. L. (2013) *Detection Estimation and Modulation Theory* / Van Trees, H. L., Bell, K. L., Tiany Z. 2nd ed. – John Wiley & Sons. 1176 p.
4. Syvd, I.V. (2022) *Processing of radar information of airspace surveillance systems: monograph*. Dnipro: LIRA LTD. 224 p.
5. Sobolev, V.S. (2014) Maximum-likelihood estimates of the frequency of signals of laser Doppler anemometers / Sobolev, V.S., Zhuravel', F.A. *Journal of Communications Technology and Electronics*. Vol. 59, Issue 4. 294–301. doi: 10.1134/S1064226914030103
6. Krupiński R. (2013) Modified Moment Method Estimator for the Shape Parameter of Generalized Gaussian Distribution for a Small Sample Size / Krupiński, R. *Computer Information Systems and Industrial Management*. Vol. 8104. 420–429. doi: 10.1007/978-3-642-40925-7_39
7. Middleton, D. (2012) *Non-Gaussian Statistical Communication Theory*, John Wiley & Sons, 664 p.
8. Abdelhak M. Zoubir, Visa Koivunen, Esa Ollila, Michael Muma (2018) *Robust Statistics for Signal Processing*, Cambridge University Press. 312 p.
9. Kostenko, P.Yu., Falkovich, S.Ya. (2021) *Fundamentals of statistical theory of information and measuring radio engineering systems*. Kharkiv: KhNUPS., 612 p.
10. Slobodyanyuk V.V. (2023) Nonparametric estimation of the delay time of a broadband signal under the influence of noise with an unknown probability distribution. *Information Processing Systems*. No. 2 (173). 48-57.
11. Kunchenko, Y.P. (2002) *Polynomial parameter estimation of close to Gaussian random variables* / Kunchenko, Y.P. – Aachen: Shaker Verlag. 396 p.
12. Goncharov, A.V. (2011) Estimation of the frequency of the useful signal in the truncated estimation of the dispersion of asymmetric-excessive noise / Goncharov A.V., Umanets V.M. *Signal processing and non-Gaussian processes: proceedings of the III international scientific and practical conference: abstracts* – Cherkasy: ChDTU. 103–105.
13. Goncharov, A.V. (2013) Joint estimation of the phase of the radio signal and the parameters of asymmetric interference using truncated Kunchenko polynomials / Goncharov, A.V., Umanets V.M. *SMSDP-2013: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, October 16–17, 2013: abstracts of the supplement*. K.: NAU. 104-107.
14. Dodge Y. (2008) *The Concise Encyclopedia of Statistics* / Y.Dodge - NY: Springer New York. 612 p.
15. Gavrish, A.S. (2000) Methods of numerical solution of systems of equations for maximizing a polynomial with unequally distributed sample values. *Radio engineering.* - Kharkov. No. 115. 47-50.