https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-21
УДК 624.131.3

ДОРОФЄЄВ ОЛЕКСАНДР
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000 0003 3550 3487
e-mail: alexdorofeyev60@gmail.com
БАГРІЙ ОЛЕНА
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0003-2267-7162
e-mail: bahriio@khmnu.edu.ua
ДОРОФЄЄВ ЮРІЙ
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0009-0001-0242-6094
e-mail: yurdorof@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ З ДИСКРЕТНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Описується математична модель взаємодії елементів машин та механізмів певного класу з дискретним середовищем. Особливостями запропонованої моделі є те, що: модель враховує вплив нормальних стискуючих напружень на величину деформацій зсуву; експериментальні параметри, які входять у фізичні співвідношення моделі, визначаються шляхом проведення лабораторних досліджень конкретного матеріалу.
Ключові слова: дискретне середовище; внутрішнє кулонове тертя; дилатансія.

DOROFIEIEV OLEKSANDR,
BAHRII OLENA, DOROFIEIEV YURII
Khmelnytskyi National University

MATHEMATICAL MODELING OF THE INTERACTION OF MACHINE ELEMENTS AND MECHANISMS WITH THE DISCRETE ENVIRONMENT

When creating machines (diggers, road, agricultural, construction) and mechanisms (transporting, dosing) of a certain class, as well as containers for transporting and storing discrete materials, there is a need to determine some power, kinematic and energy parameters at the design stage. For the normal functioning of existing equipment samples, it is necessary to reliably assess the possible operating conditions. All this can be done using mathematical modeling of the interaction of the machine or mechanism with the technological environment.

The disadvantage of existing interaction models of individual machines' elements and mechanisms with various bulk materials is that they do not fully take into account the characteristic features of deformation of bulk materials. They, as a rule, describe the behavior of the material in the near-limit and limit states by unrelated relations. In addition, the representation of physical dependencies in integral form requires the determination of coefficients and parameters of these dependencies from natural studies.

The model of interaction of machine elements with a technological discrete environment must take into account the characteristic features of its deformation: the dependence of the ultimate resistance $\tau_{гр}$ on the magnitude of compressive stresses σ_0; the dependence of shear deformations γ_0 on normal compressive stresses м; the dependence of volumetric deformations ε_0 on shear deformations γ_0.

A mathematical model of the interaction of machine elements and mechanisms of a certain class with a discrete environment is described, the features of which are that: the model takes into account the influence of normal compressive stresses on the magnitude of shear deformations; experimental parameters that are included in the physical relations of the model are determined by conducting laboratory studies of a specific material.
Keywords: discrete medium; internal Coulomb friction; dilatancy.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

За оцінками деяких науковців, більше 60% усього світового промислового виробництва повністю засноване або частково використовує гранульовані матеріали різної дисперсності: від мікропудр з розмірами гранул близько декількох мікрон до геологічних структур з розмірами окремих кам'яних монолітів в декілька метрів і більш [1].

Дискретні матеріали займають проміжне положення між твердим деформівним тілом і рідиною. Подібно до рідини масив дискретного матеріалу не зберігає задану початкову форму, але, завдячуючи силам тертя між частинками матеріалу, подібно до твердих тіл, опирається деформаціям формозміни.

В інженерній практиці мають справу з дискретними матеріалами як природного походження, так і з штучно створеними. Це пісок, гравій, щебінь, вугілля, зерно, різноманітні гранульовані, порошкові та дисперсні матеріали. Різняться вони розмірами, формою, механічними властивостями частинок, структурою їх укладки в масиві, видами мікроконтактів частинок та ін.

Загальною ознакою, що дозволяє об'єднати ці матеріали в один клас і розглядати їх як об'єкт дослідження інженерної механіки, є їх дискретна структура. З позицій механіки дискретні матеріали – це сукупність твердих частинок, з'єднаних між собою односторонніми мікроконтактами, які не сприймають розтягуючих зусиль. Деформація дискретного матеріалу відбувається переважно за рахунок взаємного проковзування (зсувів) частинок. Цьому протидіють сили сухого кулонового тертя у мікроконтактах. Оскільки кулонове тертя найяскравіше проявляється в сипких матеріалах, то далі розглядатимемо взаємодію елементів машин та механізмів саме з сипучою речовиною – піском.

При створенні машин (землерийних, дорожніх, сільськогосподарських, будівельних) та механізмів (транспортуючих, дозуючих) певного класу, а також ємностей для транспортування та зберігання дискретних матеріалів виникає необхідність визначення деяких силових, кінематичних та енергетичних параметрів ще на етапі їх проектування. Для нормального функціонування вже існуючих зразків техніки необхідно достовірно оцінити можливі умови роботи. Все це можна здійснити за допомогою математичного моделювання взаємодії машини або механізму із технологічним середовищем.

Оскільки внутрішньо кулонове тертя найяскравіше проявляється у сипких матеріалах, то далі розглядатимемо взаємодію елементів машин саме з сипучим – піском.

Формулювання цілей статті

Метою статті є обґрунтування фізичних співвідношень математичної моделі взаємодії елементів машини та механізмів з дискретними матеріалами, які враховували б внутрішнє тертя, що виникає в середовищі.

Аналіз досліджень та публікацій

В результаті вивчення існуючих моделей взаємодії окремих елементів машин та механізмів з різними сипкими матеріалами було встановлено, що:

1) їхнім недоліком є те, що вони не повною мірою враховують характерні особливості деформування сипких матеріалів, насамперед – складних законів їх деформування, що відображають вплив внутрішнього тертя;

2) найбільш перспективними розробками математичної моделі можна вважати фізичні співвідношення А. І. Боткіна. Вони досить повно відображають вплив внутрішнього тертя на всіх етапах деформування сипкого матеріалу до моменту руйнування;

3) моделі, як правило, описують поведінку матеріалу в дограничному та граничному станах не пов'язаними між собою співвідношеннями. Крім цього, подання фізичних залежностей в інтегральній формі вимагає визначення коефіцієнтів та параметрів цих залежностей не з лабораторних, а з натурних досліджень.

Виходячи з усього цього, автори поставили перед собою завдання створити математичну модель взаємодії елементів машин та механізмів з навколишнім дискретним середовищем на основі фізичних залежностей, які: враховували б внутрішнє тертя дискретного матеріалу; включали б параметри, що визначаються лабораторними дослідженнями.

Для обґрунтування фізичних співвідношень моделі було проведено аналіз опублікованих матеріалів, а також результатів досліджень, проведених за участю авторів. Як відомо, опір дискретних матеріалів деформуванню та руйнуванню збільшується зі зростанням величини нормальних стискуючих напружень по площинках зсуву. Це основний фактор, який визначає можливість сприйняття зовнішнього навантаження дискретними матеріалами.

Експериментальні дослідження підтверджують факт впливу стискуючих нормальних напружень на міцність сипких матеріалів. Якщо розглядати міцність як граничний стан деформування, то логічно припустити, що це має місце й у пригpаничному стані.

Класична механіка твердого тіла, що деформується, описує зв'язок між інваріантами тензорів напружень і деформацій у вигляді такої схеми.

$\{T_\sigma^0\} \quad \leftrightarrow \quad \{T_\varepsilon^0\}$де$\{D_\varepsilon\}$ – девіатор тензора деформацій; $\{D_\sigma\}$ – девіатор напружень; $\{T_\varepsilon^0\}$ – кульовий тензор деформацій; $\{T_\sigma^0\}$ – кульовий тензор напружень.

Зв'язок між інваріантами девіаторів напружень та деформацій (наприклад, між октаедричними напруженнями τ_o і деформаціями γ_o – $\tau_o = f(\gamma_o)$) залишається незмінним за будь-якого виду напруженого стану (гіпотеза "єдиної" кривої)

Виклад основного матеріалу

Для матеріалів, які розглядаються в даній статті, тобто які по-різному опираються деформуванню при стисканні та розтягуванні, зв'язок між девіаторами та кульовими тензорами напружень і деформацій можна охарактеризувати складнішою схемою

Залежність між напруженнями та деформаціями для таких матеріалів описує не криву, а

$$\begin{tikzcd} \left\{T_\sigma^0\right\} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \left\{T_\varepsilon^0\right\} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ \left\{D_\sigma\right\} \arrow[r, leftrightarrow] & \left\{D_\varepsilon\right\}. \end{tikzcd}$$

поверхню деформування, рівняння якої за умови нехтування впливом дилатансії можна подати як функцію трьох інваріантів

$$\Phi(\tau_0,\ \gamma_0,\ \sigma_c) = 0,$$

де $\sigma_c = \sigma_0$ – середнє стискуюче нормальне напруження $\sigma_c = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$.

Отже, вплив стискуючих нормальних напружень на деформації зсуву в дограничній стадії деформування призводить до необхідності заміни єдиної кривої деформування $\tau_o = f(\gamma_o)$ єдиною поверхнею $\gamma_o = f(\tau_o, \sigma_o)$ або сімейством кривих, що є зрізами цієї поверхні площинами, перпендикулярними до осі σ_o (див. рис. 1).

Однією з деформаційних характеристик матеріалів, що найчастіше використовуються, є модуль зсуву *G*, який за фізичним змістом є похідною функції $\tau_0 = f(\gamma_0)$. На відміну від пружних тіл, де *G=const*, і пластичних, де$G = F(\gamma_0)$, модуль зсуву сипких матеріалів залежить як від деформацій γ_0, так і від величини стискуючого напруження σ_0.

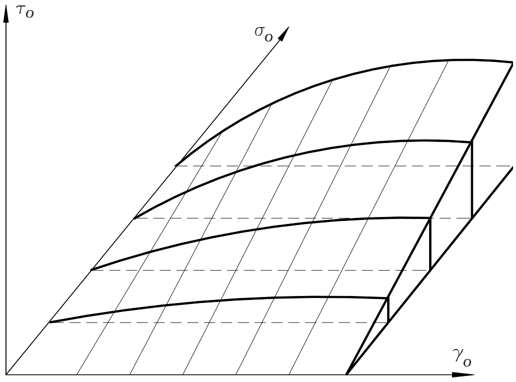

Рис. 1. Поверхня формозміни ідеально-сипкого середовища

Тому модуль зсуву повинен розглядатися не як стала матеріалу, а як параметр поверхні деформування $\tau_o = \tau_o(\gamma_o, \sigma_o)$. Його величина залежить від досягнутого рівня напружено-деформованого стану і може бути визначена тільки за результатами лабораторних досліджень.

Модуль об'ємної деформації *K*, як відомо, пов'язаний з модулем зсуву *G* та коефіцієнтом Пуассона ν формулою $K = 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}$. Дослідами, результати яких наведені у роботі В. В. Ковтуна [6], показано, що коефіцієнт Пуассона для сипких матеріалів змінюється в порівняно невеликих межах і цими змінами можна знехтувати, тобто прийняти гіпотезу сталості коефіцієнта Пуассона ν. Тоді при зміні модуля зсуву $G_{зм}$ залежно від досягнутого рівня напружено-деформованого стану відбуватиметься зміна модуля об'ємної деформації $K_{зм}$ та його величину можна визначати як параметр поверхні деформування $\Phi(\tau_o, \gamma_o, \sigma_o) = 0$.

Отже, основні деформаційні характеристики теорії пружності *K* і *G* для сипких матеріалів не є сталими і можуть розглядатися тільки як параметри, що залежать як від досягнутого рівня деформацій, так і від величини стискуючих напружень.

Підсумовуючи вище сказане, можна зробити висновок, що модель взаємодії елементів машин та механізмів з технологічним дискретним середовищем має враховувати такі характерні риси його деформування:

1) залежність граничного опору $\tau_{гр}$ від величини стискуючих напружень σ_0;
2) залежність деформацій зсуву γ_0 від нормальних стискуючих напружень σ_0;
3) залежність об'ємних деформацій ε_0 від деформацій зсуву γ_0.

Характер зазначених деформацій можна встановити лише експериментально шляхом проведення спеціальних лабораторних випробувань та подати у вигляді залежностей між інваріантами тензорів напружень та деформацій.

Запишемо визначальні фізичні співвідношення моделі в інваріантній формі. Як інваріант для сипучого матеріалу зручно вибрати октаедричні напруження τ_o, σ_o і деформації γ_o, ε_o, які виникають по площинці, рівнонахиленій до головних осей:

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$
$$\sigma_o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$
$$\gamma_o = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2};$$
$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}.$$

Закон зміни форми з урахуванням внутрішнього тертя запишемо у формі

$$\gamma_o = \frac{\tau_o}{G_{зс}} + F\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right), \quad (1)$$

де $G_{зс}$– модуль зсуву.

Перша складова описує пружні деформації, які є при деформуванні будь-якого матеріалу. Друга – деформації, пов'язані із внутрішнім тертям. Вигляд функції $F\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right)$ визначається експериментально.

Закон зміни об'ємних деформацій можна записати у формі:

$$\varepsilon_o = f(\sigma_o, \gamma_o). \quad (2)$$

Умова переходу в граничний стан –

$$\frac{\tau_o}{\sigma_o} = \frac{c_0}{\sigma_o} + \text{tg}\psi. \quad (3)$$

У співвідношеннях (1), (3) вплив внутрішнього кулонового тертя на процес деформування сипкого матеріалу в дограничній та граничній стадіях враховується залежністю деформацій зсуву та опору зсуву від відношення дотичного напруження до нормального $\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o}\right)$.

Для конкретизації виду функцій, що входять у фізичні співвідношення (1)–(3), які покладено в основу моделі сипкого середовища, у лабораторії опору матеріалів Хмельницького національного університету проведено серію спеціальних експериментальних досліджень.

Аналіз результатів цих дослідів, а також опублікованих у літературі даних, дозволив обґрунтувати покладені в основу математичної моделі співвідношення, що описують закономірності зміни форми та об'єму сипкого матеріалу.

Закономірності зміни форми в системі осей τ_o, γ_o, σ_o запропоновано описувати апроксимуючою експериментальні дані зручною для розрахунків степеневою залежністю

$$\tau_0 = A\sigma_0\gamma_0^{\alpha} = G_{зм}\gamma_0, \tag{4}$$

де A і α – експериментальні параметри.

Ця залежність не виділяє окремо пружні деформації, які є значно меншими за загальні деформації сипкого матеріалу.

При такій апроксимації дотичний модуль зсуву визначається за формулою

$$G_{зм}^{д} = \alpha A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}, \tag{5}$$

а січний –

$$G_{зм}^{c} = A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}. \tag{6}$$

Закономірності (2) зміни об'єму сипких матеріалів зручно описувати залежністю, аналогічною до закону Гука. Але, на відміну від співвідношень теорії пружності, вона включає параметр $K_{зм}$ поверхні деформування

$$\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{K_{зм}}, \tag{7}$$

де $K_{зм}$ – змінний модуль об'ємної деформації, що залежить від властивостей матеріалу та досягнутого у ньому напружено-деформованого стану.

Цей модуль можна визначити із співвідношень механіки твердого деформівного тіла

$$K_{зм} = G_{зм}\cdot 2\frac{1+\nu}{1-2\nu} = 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}A\sigma_0\gamma_0^{\alpha-1}, \tag{8}$$

де $G_{зм}$– змінний модуль зсуву, який залежить як від рівня деформації γ_o, так й від величини стискуючого напруження σ_o (6), ν – коефіцієнт Пуассона.

Введення припущення про сталість величини коефіцієнта Пуассона ν для сипких матеріалів дає можливість визначати модуль об'ємної деформації з сімейства експериментальних кривих $\tau_o = F(\gamma_o)$ при $\sigma_o = const$ та відомій величині коефіцієнта ν.

Перехід матеріалу в граничний стан описується умовою (3).

Наведені нелінійні фізичні співвідношення описують в інваріантній формі закономірності деформування та руйнування сипких матеріалів. Вони відрізняються від відомих тим, що включають параметри $К_{зм}$, $G_{зм}$ складної багатовимірної поверхні деформування $\Phi(\sigma_0, \tau_0, \gamma_0) = 0$, які, залежать від досягнутого напружено-деформівного стану і не можуть бути визначені наперед.

Моделювання процесу взаємодії елементів машин та механізмів з сипучим середовищем зводиться до вирішення системи рівнянь, які формують граничну або контактну задачу для комбінованої пружної та фізично-нелінійної областей.

Наприклад, граничну задачу можна сформулювати наступним чином.

Для області O з границями $S \in \left(S_{(R)}, S_{(u)}, S_{(0)}\right)$ визначити напруження, деформації та переміщення $\{\sigma\} = \{\sigma\}(x, y, z)$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}(x, y, z)$, $\{u\} = \{u\}(x, y, z)$, які відповідають розрахунковій схемі, прийнятим специфічним законам деформування матеріалу середовища та граничним умовам.

Завдання зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

$[B]^T\{\sigma\} = \{V\}$ – диференціальні рівняння рівноваги;

$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$ – диференціальні геометричні рівняння;

$\{\sigma\} = [D_{зм}]\{\varepsilon\}$ – фізичні рівняння для середовища,

де матриця змінних деформаційних параметрів $[D_{зм}]$ має вигляд

$$[D_{зм}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} K_{зм}+4G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}+4G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}-2G_{зм} & K_{зм}+4G_{зм} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix},$$

з урахуванням експериментально отриманих інваріантних нелінійних фізичних залежностей

$$\boldsymbol{\tau_0 = A\sigma_0\gamma_0^{\alpha} = G_{зм}\gamma_0,}$$
$$\boldsymbol{\sigma_0 = K_{зм}\varepsilon_0}$$

та граничних умов.

Розв'язування задачі може вестись як у напруженнях, так і в переміщеннях. Другий підхід у більшості випадків є раціональнішим.

Враховуючи складність задачі, розв'язати її можна лише чисельними методами з використанням ітераційних процедур. За базовий прийнято метод скінчених елементів.

Оскільки експериментально отримані інваріантні залежності між напруженнями та деформаціями, як було зазначено раніше, описують поверхню деформування сипкого матеріалу, авторами було розроблено спеціальний ітераційний процес.

На будь-якому етапі ітерації кожен окремий елемент, з яких складається дискретна модель, розглядається як лінійно-деформівний, а етап розрахунку зводиться до розв'язання лінійної граничної або контактної задачі для неоднорідної дискретної області, кожен елемент якої має свої значення деформаційних модулів.

Відмінність запропонованого ітераційного процесу від існуючих полягає у тому, що "зближення" здійснюється не в одній площині напружень-деформацій $(\tau_o - \gamma_o)$, а тривимірному просторі $(\tau_0,\ \gamma_0,\ \sigma_0)$. Положення кожної кривої $(\tau_o - \gamma_o)$ визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження $\sigma_o^{(k)}$. Описаний ітераційний процес добре ілюструється схемою, наведеною на рисунку 2.

Як видно з рисунку, рішенню лінійної задачі на першому етапі зі заздалегідь обраними значеннями модулів зсуву $G^{(I)}$ та об'ємної деформації $K^{(I)}$ відповідає точка A_1, а досягнутому значенню стискуючого напруження $\sigma_o^{(I)}$ і прийнятому степеневому закону деформування – точка a_1 на кривій I. Розбіжність характеризується величиною відрізка A_1a_1, нове значення модуля зсуву $G^{(II)}$ – тангенсом кута нахилу відрізка, що проходить через точку A_2. Цьому значенню $G^{(II)}$ відповідає інше середнє стискуюче напруження – $\sigma_o^{(II)}$, отже, ітерації продовжуються доки задовольниться умова збіжності.

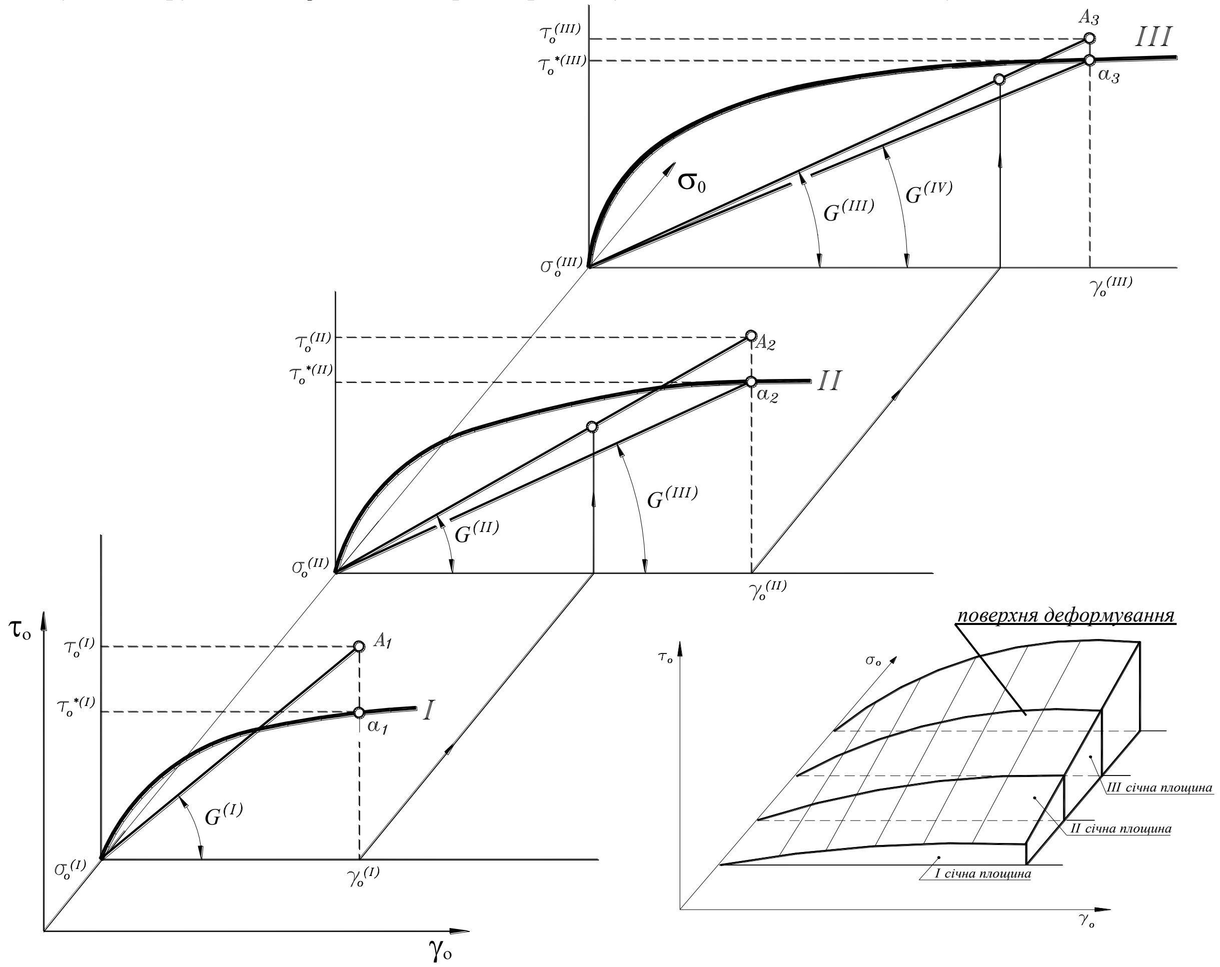

Рис. 2. Графічна ілюстрація ітераційного процесу

Розроблений алгоритм запропонованого ітераційного процесу можна записати в такий спосіб [6]

$$\left.\begin{aligned} G_{\text{зм}}^{(k)} &= \frac{\tau_o^{(k-1)*}}{\gamma_o^{(k-1)}}; \\ K_{\text{зм}}^{(k)} &= G_{\text{зм}}^{(k)}\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}; \end{aligned}\right\}$$ – коригування деформаційних параметрів;

$\left[D^{(k)}\right] = [D]\ \left(G_{\text{зм}}^{(k)},\ K_{\text{зм}}^{(k)}\right)$ – формулювання нової матриці деформаційних параметрів;

$\left[k^{(k)}\right] = [B]\ ^T\left[D^{(k)}\right]\ [B]\ V \quad \rightarrow \quad \left[K^{(k)}\right]$ – формулювання матриці жорсткості кожного скінченого елемента;

$\left[K^{(k)}\right]\ \left\{\delta^{(k)}\right\} = \{R\}$ – формулювання системи рівнянь методу переміщень;

$\left\{\delta^{(k)}\right\} = \left[K^{(k)}\right]^{-1}\{R\}$ – розв'язання системи рівнянь;

$\left\{\varepsilon^{(k)}\right\} = \left[B^{(k)}\right]\ \left\{\delta^{(k)}\right\} \quad \rightarrow \quad \{\gamma_0\},\ \{\varepsilon_0\}$ – обчислення деформацій;

$\left\{\sigma^{(k)}\right\} = \left[D^{(k)}\right]\ \left[B^{(k)}\right]\ \left\{\delta^{(k)}\right\} \quad \rightarrow \quad \left\{\sigma_o^{(k)}\right\},\ \left\{\tau_o^{(k)}\right\}$ – обчислення напружень;

$\tau_o^{(k)*} = A_0\sigma_o^{(k)}\left(\gamma_o^{(k)}\right)^{\alpha}$ – визначення досягнутих значень інваріантних напружень;

$\left|\frac{\tau_o^{(k)*} - \tau_o^{(k)}}{\tau_o^{(k)*}}\right| \le [\xi]$ перевірка збіжності.

Для реального моделювання необхідно розробити спеціальні методики та прилади, які дозволяють шляхом проведення лабораторних випробувань зразків конкретного сипкого матеріалу визначити необхідні для моделювання параметри нових фізичних співвідношень, покладених в основу моделі.

Для повного виконання сформульованих вище умов прилади повинні мати навантажувально-реєструючу систему, що дозволяє реалізувати специфічну для сипких матеріалів траєкторію навантаження $\sigma_0 = \sigma_c = const$.

Оскільки лабораторних систем, які відповідають описаним умовам, не створено, у лабораторії опору матеріалів Хмельницького національного університету за участю авторів розроблено спеціальний стабілометр із навантажувально-реєструючою системою.

Створене лабораторне обладнання відрізняється від існуючих оригінальною системою навантаження, яка дозволяє створювати одночасне навантажування зразка у всіх напрямках без попереднього обтиснення, створювати при цьому різні складні траєкторії навантажування, змінювати величину осьового та бічних напружень при сталому середньому напруженні або при постійному співвідношенні напружень [5].

Запропонована математична модель взаємодії елементів машин та механізмів з сипким робочим середовищем базується на фізичних співвідношеннях, які враховують внутрішнє тертя, що виникає в середовищі. У матрицю жорсткості кожного елемента входять деформаційні модулі $К_{зм}$ і $G_{зм}$, які залежать від рівня напружено-деформівного стану в елементі і які не можуть бути заздалегідь визначені. На відміну від існуючих алгоритмів, які використовуються в теорії пластичності, розроблена ітераційна процедура реалізує наближення не до кривої, а до поверхні деформування. Це дозволяє враховувати вплив внутрішнього тертя на величини деформацій та опирання зсуву. З метою лабораторного, а не натурного, визначення параметрів моделі розроблено спеціальний стабілометр з оригінальною навантажувальною системою.

**Висновки з даного дослідження
і перспективи подальших розвідок у даному напрямі**

Оскільки цілий ряд матеріалів можна віднести до таких, в яких у більшій чи меншій мірі проявляється вплив внутрішнього тертя на деформування та руйнування (сипкі, гранульовані, зернисті матеріали, ґрунт, чавун, бетон та ін.), то отримані результати можна перенести на взаємодію елементів машин, механізмів та інструментів з ними.

Література

1. Герасимов О. І. Фізика гранульованих матеріалів : Монографія / О. І. Герасимов; Одеськ. держ-ний екол-ний ун-т. – Одеса, ТЕС, 2015. – 264 с.
2. Дорофєєв О.А. Математична модель взаємодії елементів машини з дискретним середовищем та методи її реалізації: Дис… канд. техн. наук. – Хмельницький, 2004. – 168 с.
3. Дорофєєв О.А. Реологічні моделі середовища з суттєвим внутрішнім тертям / О. А. Дорофєєв, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2019. – № 3 (271). – С. 50-58.
4. Ковтун В. В. Основи механіки дискретних матеріалів : монографія / В. В. Ковтун, О. А. Дорофєєв. – Хмельницький : ХНУ, 2018. – 131 с.
5. Ковтун В.В, Дорофеев А.А. Прибор для испытания сыпучих материалов // III Українська науково-технічна конференція з механіки ґрунтів і фундаментобудування "Механіка ґрунтів і фундаментобудування". 1997.- Одеса. с.292 - 294.
6. Ковтун В.В. Нелинейные методы расчета обратных засыпок причальных сооружений с учетом эксплуатационных факторов: Дис… докт. техн. наук. – Хмельницкий, 1988. – 321 с.

References

1. Herasymov, Oleh Ivanovych Fizyka hranulovanykh materialiv. : Monohrafiia./ Herasymov O.I.; Odesk. derzh-nyi ekol-nyi un-t. - Odesa, TES, 2015. - 264 s.
2. Dorofieiev O.A. Matematychna model vzaiemodii elementiv mashyny z dyskretnym seredovyshchem ta metody yii realizatsii: Dys… kand. tekhn. nauk. – Khmelnytskyi, 2004. – 168 s.
3. Dorofieiev O.A. Reolohichni modeli seredovyshcha z suttievym vnutrishnim tertiam / O. A. Dorofieiev, V. V. Kovtun // Herald Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2019. – № 3 (271). – S. 50-58.
4. Kovtun V. V. Osnovy mekhaniky dyskretnykh materialiv : monohrafiia / V. V. Kovtun, O. A. Dorofieiev. – Khmelnytskyi : KhNU, 2018. – 131 s.
5. Kovtun V.V, Dorofeev A.A. Prybor dlia yspыtanyia sыpuchykh materyalov // III Ukrainska naukovo-tekhnichna konferentsiia z mekhaniky gruntiv i fundamentobuduvannia "Mekhanika gruntiv i fundamentobuduvannia". 1997.- Odesa. s.292 - 294.
6. Kovtun V.V. Nelyneinыe metodы rascheta obratnыkh zasыpok prychalnыkh sooruzhenyi s uchetom эkspluatatsyonnыkh faktorov: Dys… dokt. tekhn. nauk. – Khmelnytskyi, 1988. – 321 s.