https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-349-7
УДК 519.6:004.94:536.2

БІЛАК ЮРІЙ
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
https://orcid.org/0000-0001-5989-1643
email: yuriy.bilak@uzhnu.edu.ua
ГЕРАЩЕНКОВ ЕМІЛІАН
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
https://orcid.org/0009-0005-3615-6941
email: emilian.herashchenkov@uzhnu.edu.ua

БАГАТОРІВНЕВА ДЕКОМПОЗИЦІЯ ДЛЯ АДАПТИВНОГО ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Актуальність. Чисельне моделювання складних фізичних процесів є важливим інструментом у наукових дослідженнях та інженерних застосуваннях. Традиційні методи, що базуються на рівномірній дискретизації, часто мають високу обчислювальну вартість, особливо для задач із суттєвими просторово-часовими неоднорідностями. Оптимізація обчислювальних ресурсів є ключовим фактором для забезпечення ефективності та точності чисельного аналізу.

Мета. Дослідження спрямоване на розробку та реалізацію методу багаторівневої декомпозиції для адаптивного чисельного моделювання, що дозволяє автоматично змінювати рівень деталізації в залежності від локальних особливостей фізичних процесів, забезпечуючи при цьому високу точність розрахунків із мінімальними обчислювальними витратами.

Метод. Запропонована модель базується на критеріях адаптивного розбиття області, що ґрунтуються на аналізі градієнта функції стану та апостеріорних оцінках похибки. Реалізовано алгоритм та відповідне програмне забезпечення для адаптивної зміни рівнів деталізації, що включає ініціалізацію сітки, обчислення локальних градієнтів, прийняття рішень щодо розбиття або об'єднання осередків та оновлення сіткової структури. Проведено верифікацію методу на задачі дифузії з порівнянням аналітичних і еталонних чисельних рішень.

Результати. Отримані результати показали, що використання багаторівневої декомпозиції дозволяє досягти точності, еквівалентної рівномірному розбиттю з високою роздільною здатністю, при цьому зменшуючи обсяг обчислень у 4-5 разів. Чисельні експерименти підтвердили ефективність запропонованого методу для моделювання процесів дифузії, а також продемонстрували його потенційне застосування для задач теплообміну та лазерно-індукованих змін у плівках.

Висновки. Реалізований метод багаторівневої декомпозиції забезпечує ефективний баланс між точністю та продуктивністю. Він може бути інтегрований із сучасними чисельними методами, такими як FDTD, FEM та RCWA, що розширює можливості його застосування в задачах моделювання складних фізичних систем.

Ключові слова: чисельне моделювання, багаторівнева декомпозиція, адаптивна сітка, оптимізація обчислень, алгоритм адаптації.

BILAK YURII, HERASHCHENKOV EMILIAN
Uzhgorod National University, Uzhgorod, Ukraine

MULTILEVEL DECOMPOSITION FOR ADAPTIVE NUMERICAL MODELING OF COMPLEX PHYSICAL PROCESSES

Relevance. Numerical modeling of complex physical processes is an important tool in scientific research and engineering applications. Traditional methods based on uniform discretization often have high computational cost, especially for problems with significant spatiotemporal heterogeneities. Optimization of computational resources is a key factor in ensuring the efficiency and accuracy of numerical analysis.

Purpose. The study is aimed at developing and implementing a multilevel decomposition method for adaptive numerical modeling, which allows automatically changing the level of detail depending on the local features of physical processes, while ensuring high accuracy of calculations with minimal computational costs.

Method. The proposed model is based on the criteria for adaptive domain partitioning, which are based on the analysis of the gradient of the state function and a posteriori error estimates. Implemented an algorithm and corresponding software for adaptively changing levels of detail, including initializing the mesh, calculating local gradients, making decisions about splitting or merging cells, and updating the mesh structure. The method is verified on the diffusion problem with a comparison of analytical and reference numerical solutions.

Results. The results obtained show that the use of multilevel decomposition allows achieving accuracy equivalent to uniform splitting with high resolution, while reducing the amount of calculations by 4-5 times. Numerical experiments confirmed the effectiveness of the proposed method for modeling diffusion processes, and also demonstrated its potential application for heat transfer problems and laser-induced changes in films.

Conclusions. The implemented multilevel decomposition method provides an effective balance between accuracy and performance. It can be integrated with modern numerical methods, such as FDTD, FEM, and RCWA, which expands the possibilities of its application in modeling problems of complex physical systems.

Keywords: numerical modeling, multilevel decomposition, adaptive grid, computational optimization, adaptation algorithm.

Вступ

Чисельне моделювання складних фізичних процесів є ключовим інструментом у багатьох галузях науки та техніки, включаючи матеріалознавство, теплофізику, оптику та лазерні технології. Однак традиційні методи, що базуються на рівномірному розбитті розрахункової області, часто є неефективними для задач, у яких існують локальні зони з різкими змінами фізичних параметрів.

Використання надмірно детальної сітки призводить до значного збільшення обчислювальних витрат, у той час як надмірне спрощення може спричинити втрату точності.

Актуальність проблеми полягає в необхідності розробки ефективних адаптивних чисельних методів, що дозволяють оптимізувати розрахункову сітку, зосереджуючи ресурси на критичних ділянках, де спостерігаються швидкі зміни параметрів, зокрема температури, концентрації або оптичних характеристик. Одним із перспективних підходів є метод багаторівневої декомпозиції, який дозволяє динамічно змінювати роздільну здатність сітки відповідно до локальних особливостей процесу. Дана проблема має важливий зв’язок із широким спектром наукових і практичних завдань. У науковому аспекті вона стосується розвитку методів чисельного аналізу, зокрема адаптивних алгоритмів, що можуть бути інтегровані в сучасні обчислювальні технології.

У практичному аспекті розв’язання цієї проблеми є важливим для моделювання процесів лазерної обробки матеріалів, термічних процесів у наноструктурних плівках, технологій керування теплообміном у мікро- та наносистемах, а також аналізу поширення хвиль у складних середовищах. Розробка ефективних адаптивних чисельних методів дозволить значно зменшити обчислювальні витрати при збереженні високої точності, що сприятиме більш точному моделюванню фізичних процесів та розширенню можливостей їх практичного застосування.

Аналіз досліджень та публікацій

Протягом останніх десятиліть чисельні методи, такі як методи кінцевих елементів (FEM), методи розділення хвильових компонент (RCWA), методи кінцевих різниць у часі (FDTD), стали основними інструментами для моделювання складних фізичних явищ [1-3]. Так у [1] представлено виготовлення та моделювання зеленої OLED зі внутрішнім шаром екстракції світла (ILE). Оптичні властивості проаналізовано методами RCWA і FDTD, результати яких добре узгоджуються між собою та з експериментальними даними. Це підтверджує можливість оптимізації ILE-шарів за допомогою обох підходів. У праці [2] поєднано RCWA та FEM для аналізу еліпсометричних вимірювань плазмонних мідних ґраток. Близькопольні зображення та спектри матриці Мюллера розкривають ключові фізичні явища. Запропоновано та застосовано стратегію покращення збіжності RCWA для мідної перехресної ґратки зі слабкою збіжністю. У праці [3] досліджено застосування FDTD-методу для аналізу оптичних адаптацій у природі та біоінженерії. Розглянуто його використання в дослідженні камуфляжу, забарвлення організмів і фотосинтетичної ефективності, а також оптимізацію біонатхненних технологій. Надано огляд методики з акцентом на програмне забезпечення Lumerical FDTD. Однак ці методи, застосовані до великих і складних геометрій, часто стикаються з проблемами в плані витрат часу на обчислення та пам'яті.

Застосування адаптивної сітки в чисельних методах стає важливим напрямом досліджень. Ідея полягає в тому, щоб змінювати розподіл точок сітки залежно від локальних характеристик розв'язуваної задачі. Адаптивні методи дозволяють зменшити кількість точок сітки в областях з низькими градієнтами поля і збільшити її в областях з високими змінами, що дозволяє значно знизити обчислювальні витрати без втрати точності. Існуючі підходи до адаптивного моделювання базуються на різних стратегіях розбиття сітки [4-7] та методах оцінки похибки [8]. Дослідження [9, 10] пропонують дворівневі алгоритми для рівнянь Нав’є–Стокса, тоді як робота [11] розглядає нелінійні еліптичні рівняння в рамках теорії Brezzi–Rappaz–Raviart (BRR) [12]. Останнім часом з’явилися роботи [13-15], що розглядають змішану скінченно-елементну апроксимацію рівнянь Нав’є–Стокса з використанням псевдонапружень. У статті [16] запропоновано адаптивне уточнення сітки на основі багаторівневого алгоритму та виведено єдину апостеріорну оцінку похибки для класу нелінійних задач. Доведено, що метод зберігає квадратичну збіжність алгоритму Ньютона на всіх рівнях сітки, що підтверджено чисельно. Теоретичні результати застосовано до рівнянь Нав'є–Стокса у формулюванні псевдонапружень-швидкостей та семілінійних еліптичних рівнянь, для яких отримано ефективні оцінки похибки. Наведено числові приклади для перевірки алгоритму. У [17] описано адаптивне уточнення сітки (AMR) для дробових диференціальних рівнянь (FDEs), що покращує чисельне розв’язання, враховуючи їхню нелокальність і сингулярності. AMR динамічно змінює розподіл сітки, підвищуючи роздільну здатність у критичних зонах, що значно знижує обчислювальні витрати. Огляд охоплює інтеграцію AMR із методами скінченних різниць, скінченних елементів та спектральними методами, а також виклики, стратегії адаптації та перспективи застосування. У [18] запропоновано стохастичну стратегію масштабування теплопровідності, що враховує мікроскопічні варіації через багатомасштабне випадкове поле. Використовуючи RVE та нелінійне зменшення розмірності, ефективну теплопровідність оцінюють віртуальними експериментами. Метод проілюстровано на реальному прикладі.

Метод багаторівневої декомпозиції (multigrid methods) є одним із найефективніших підходів для розв’язання великих систем лінійних рівнянь, що виникають у чисельному моделюванні. Використання різних рівнів сітки дозволяє значно скоротити час обчислень і підвищити точність розв’язку. У праці [19] детально розглядається цей метод як оптимальний для еліптичних крайових задач, включаючи аналіз збіжності алгоритмів та їхні спеціальні застосування. Додатково досліджено метод багаторівневої декомпозиції другого типу, який важливий для розв’язання інтегральних рівнянь. Подальший розвиток цих підходів представлений у [20], де для рівнянь із лінійним оператором використано ітераційний метод

Ландвебера у поєднанні з мультигрідним методом. Запропоновано новий паралельний алгоритм, заснований на V-циклі та двогрідному методі, що значно прискорює розв'язання обернених некоректних задач. Чисельні експерименти для рівняння теплопровідності підтвердили ефективність цього підходу, демонструючи перевагу паралельного алгоритму над послідовним розрахунком. Огляд історії розвитку багаторівневих методів, їхніх основних принципів і сучасних напрямів досліджень представлено в [21]. У [22] досліджується аналіз мультигридних методів, включаючи класичні ітераційні підходи, передобумовлений метод спряжених градієнтів (PCG) і дворівневі методи для скінченно-елементних задач. Окрему увагу приділено згладжувальним операторам (адитивним і мультиплікативним), їхнім властивостям та умовам застосування.

Попри значні досягнення, залишається низка невирішених питань. Оптимізація адаптивних алгоритмів потребує ефективних стратегій побудови та управління сітками, що визначають критерії їх змін. Інтеграція багаторівневої декомпозиції з іншими методами, такими як FDTD або FEM, вимагає розробки узгоджених підходів, що поєднують гнучкість і ефективність. Автоматизація побудови сітки та визначення області інтересу є ключовою проблемою для складних задач, що потребують динамічного регулювання роздільної здатності. Точність моделювання та контроль чисельних похибок залишаються відкритими питаннями, оскільки необхідно мінімізувати похибки без значного зростання обчислювальних витрат.

Мета та завдання

Метою роботи є розробка та реалізація моделі багаторівневої декомпозиції для адаптивного чисельного моделювання складних фізичних процесів, що дозволяє автоматично змінювати рівень деталізації залежно від локальних особливостей досліджуваного явища.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі завдання:

- розробити математичну модель адаптивного чисельного моделювання на основі багаторівневої декомпозиції;
- формалізувати критерії адаптивного розбиття області та алгоритм динамічного налаштування сітки;
- розробити та реалізувати чисельний алгоритм, що забезпечує оптимальний баланс між точністю розрахунків і обчислювальними витратами, а також створити відповідне програмне забезпечення для його ефективного застосування;
- провести тестування моделі на задачі дифузії та порівняти її результати з традиційними чисельними методами;
- оцінити можливість застосування розробленого методу до моделювання лазерно-індукованих тонких плівкок.

Запропонована модель має забезпечити підвищену ефективність чисельного моделювання за рахунок оптимального розподілу обчислювальних ресурсів та автоматичної деталізації критичних зон досліджуваної області.

Методи та моделі

Огляд існуючих методів. *Метод скінченних різниць (Finite Difference Method, FDM)* ґрунтується на апроксимації похідних диференціального рівняння скінченними різницями, що дозволяє звести задачу до системи лінійних рівнянь. Основними перевагами цього методу є простота реалізації та ефективність для рівномірних сіток. Він добре підходить для задач із простими геометріями та регулярними граничними умовами. Однак основний недолік FDM полягає у складності застосування для складних геометричних областей, оскільки нерівномірні або адаптивні сітки можуть значно ускладнити розрахунки та знизити точність. Крім того, FDM чутливий до умов на межах області, що може впливати на збіжність та точність розв'язку.

Метод скінченних елементів (Finite Element Method, FEM) використовує апроксимацію розв'язку у вигляді лінійної комбінації базисних функцій, визначених у кожному елементі дискретизованої області. Однією з основних переваг цього методу є можливість ефективного використання нерівномірних та адаптивних сіток, що дозволяє досягати високої точності навіть для складних геометричних областей. FEM забезпечує гнучкість у виборі граничних умов та розподілу вузлів, що робить його потужним інструментом для широкого класу задач, зокрема у механіці суцільних середовищ та електромагнітному моделюванні. Проте, FEM має вищу обчислювальну складність порівняно з FDM через необхідність побудови глобальних матриць жорсткості та виконання інтеграційних операцій. Це може призводити до значних витрат пам'яті та часу розрахунків, особливо для тривимірних задач.

Нижче наведено таблицю 1, яка порівнює переваги та недоліки методів FDM та FEM з точки зору обчислювальної складності та точності.

Загалом, вибір між FDM та FEM залежить від специфіки задачі. FDM є більш ефективним для регулярних сіток і простих геометрій, тоді як FEM краще підходить для складних областей та адаптивного уточнення розв'язку.

Таблиця 1

Порівняння ключових аспектів методів FDM та FEM

Критерій	FDM	FEM
Обчислювальна складність	Простий для реалізації, особливо для регулярних сіток. Може бути менш ефективним для складних геометрій.	Вища складність реалізації, особливо для складних структур і нелінійних задач, але має більшу гнучкість в геометрії.
Точність	Висока точність для рівних та простих сіток, але точність може погіршуватися при використанні нерівномірних сіток.	Вища точність на складних геометріях та для задач з нелінійними властивостями матеріалів. Може бути більш точним на неструктурованих сітках.
Гнучкість в геометрії	Можливе обмеження в обробці складних форм та неоднорідних матеріалів.	Дуже гнучкий, дозволяє працювати з будь-якими геометріями та матеріалами завдяки різним типам елементів.
Типи матеріалів	Підходить для однорідних матеріалів, але складніше адаптувати для складних неоднорідних або нелінійних матеріалів.	Ідеально підходить для неоднорідних, нелінійних та анізотропних матеріалів.
Підходить для задач	Хороший для задач з простими граничними умовами та регулярними геометріями.	Використовується для складних фізичних процесів, таких як механіка, теплопередача, електромагнетизм, на складних сітках.

Математична модель багаторівневої декомпозиції. *Диференціальні рівняння, що описують фізичний процес.* Запропонована модель, що використовує адаптивні алгоритми та багаторівневу декомпозицію, може бути застосована до широкого кола задач, які потребують оптимізації чисельних розв'язків складних фізичних процесів. Типові задачі, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою такої моделі, включають моделювання гідродинамічних задач та задач з турбулентними потоками (рівняння Нав’є–Стокса), задачі теплопереносу (теплопровідність та конвекція) та масообміну, моделювання електромагнітних процесів (методи FDTD, RCWA), задачі механіки деформованих тіл та структур (методи FEM), задачі фізики твердого тіла та матеріалознавства, моделювання атмосферних процесів та побудови гідрологічних моделей, моделювання хімічних реакцій та процесів у матеріалах. Таким чином, модель має широкий спектр застосувань і може використовуватися для вирішення складних задач, де традиційні чисельні методи можуть бути недостатньо ефективними через великі обчислювальні витрати або складність геометрії та фізичних процесів.

Для адаптивного чисельного моделювання складних фізичних процесів можна застосовувати методи багаторівневої декомпозиції. Це дозволяє зменшити витрати часу на обчислення, розбиваючи проблему на кілька рівнів деталізації. По перше це коарсинг (зниження рівня деталізації), який використовує грубіше розбиття для областей з малими змінами фізичної величини. По друге – фінітний елементний (або сітковий) метод для вирішення складних задач на високому рівні деталізації. Загалом, багаторівнева декомпозиція включає адаптивне підвищення або зниження роздільної здатності на різних етапах розв'язку рівнянь, що забезпечує оптимізацію обчислювальних витрат при збереженні високої точності в критичних областях.

Математична модель зміни рівня деталізації сітки в залежності від локальних характеристик процесу. Запропонована у даній праці математична модель містить формалізацію критерію адаптивного розбиття області та визначення функціоналу, що оцінює локальну складність процесу.

Формалізація критерію адаптивного розбиття області. Область розрахунку Ω розбивається на підобласті Ω*i*, кожна з яких має власний рівень деталізації. Для оцінки необхідності розбиття використовують градієнт функції стану *u(x, t)* у локальній області:

$$\eta_i = \max_{x \in \Omega_i} \left| \nabla u(x,t) \right| \tag{1}$$

Якщо $\eta_i > \eta_{th}$ (порогове значення), область Ω*i* розбивається на підобласті з більшою деталізацією. Якщо $\eta_i < \eta_{low}$, підобласті можуть бути об'єднані для оптимізації ресурсів.

Критерій розбиття базується на апріорному аналізі точності чисельного методу. Нехай h_i – розмір осередку Ω*i*, тоді локальна похибка апроксимується виразом:

$$\varepsilon_i \approx C h_i^p \left| \nabla u(x,t) \right|, \tag{2}$$

де *C* – константа, що залежить від чисельної схеми, а *p* – порядок точності методу. Обираючи h_i таким чином, щоб ε_i не перевищувала заданий поріг ε_{max}, отримуємо адаптивний критерій розбиття:

$$h_i = \min\left(h_{\max}, \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{C\left|\nabla u(x,t)\right|} \right)^{1/p} \right). \tag{3}$$

Таким чином, густота сітки автоматично збільшується у критичних зонах з великими градієнтами, зберігаючи при цьому оптимальну розподіленість ресурсів.

Визначення функціоналу локальної складності. Функціонал складності обчислюється як інтеграл градієнта функції стану:

$$J\left(\Omega_i\right) = \int_{\Omega_i} \left|\nabla u(x,t)\right|^p dx , \tag{4}$$

де – параметр, що визначає вагу локальних змін.

Алгоритм адаптивної зміни рівнів деталізації

Алгоритм реалізує адаптивну зміну сітки на основі оцінки градієнта функції стану *u(x,t)*. Він дозволяє локально збільшувати або зменшувати роздільну здатність сітки, оптимізуючи обчислювальні ресурси. Основні кроки розробленого алгоритму наступні:

1. Ініціалізація (встановлення початкової сітки та параметрів розбиття). Встановлюється початкова сітка розбиття області Ω на підобласті Ω_i та задаються початкові параметри, такі як h_{max} – максимальний розмір осередку, h_{min} – мінімальний розмір осередку, η_{th} – верхнє порогове значення градієнта, після якого виконується розбиття, η_{low} – нижнє порогове значення градієнта, при якому виконується об'єднання та ε_{max} – допустима локальна похибка чисельного методу. Далі встановлюються початкові умови та граничні умови для рівняння.

2. Обчислення градієнта. Для кожної підобласті Ω_i обчислюється локальний показник зміни функції стану згідно формули (1). Це дозволяє визначити області з високими або низькими градієнтами, що вказує на необхідність зміни рівня деталізації.

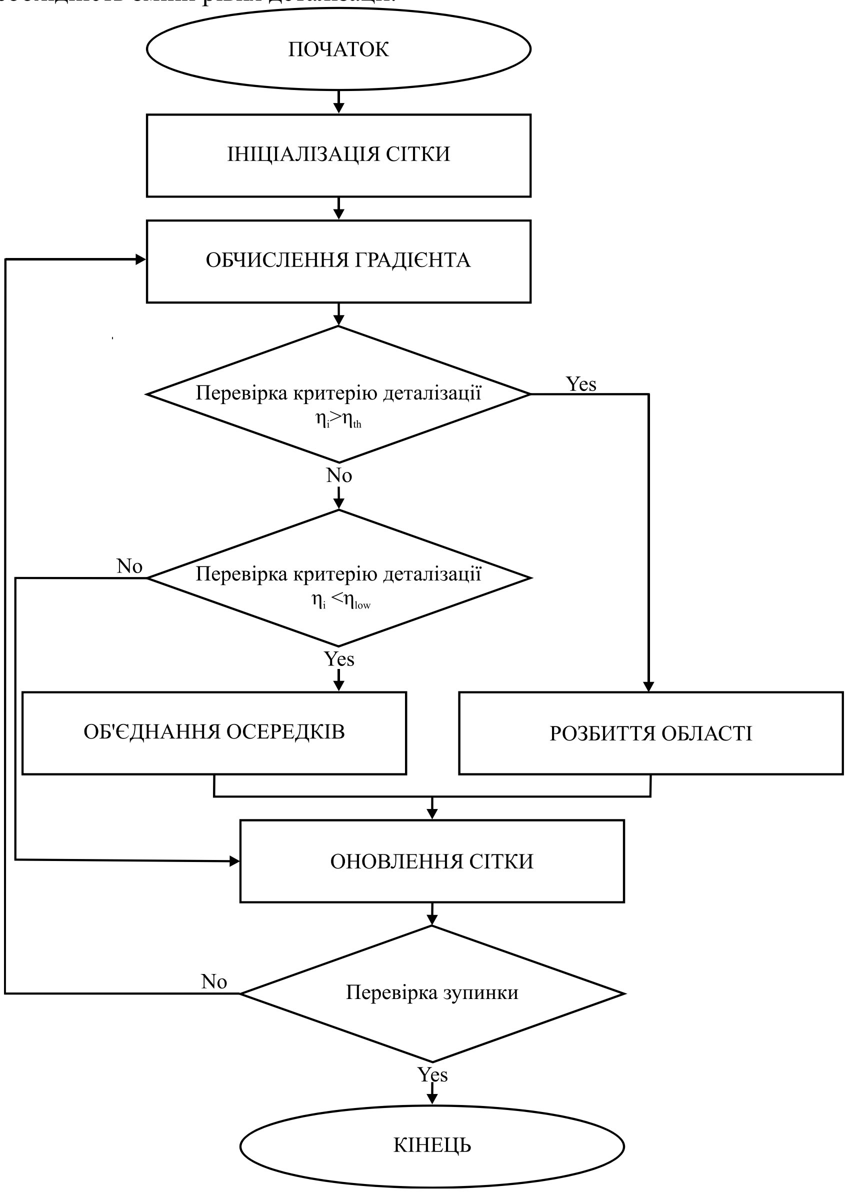

Рис. 1. Алгоритм адаптивної зміни рівнів деталізації

3. Перевірка критерію адаптивної зміни розміру осередків. Виконується перевірка значення η_i відносно порогових значень:

– якщо $\eta_i > \eta_{th}$, область має великий градієнт, тому переходимо до розбиття області;
– якщо $\eta_i < \eta_{low}$, область має малий градієнт, тому переходимо до об'єднання осередків;
– якщо $\eta_{low} \leq \eta_i \leq \eta_{th}$, зміна рівня деталізації не потрібна, тому переходимо до оновлення сітки.

4. Розбиття області (якщо градієнт високий, $\eta_i > \eta_{th}$). Осередок Ω_i ділиться на менші підобласті, кожна з яких отримує новий крок дискретизації h_i. Новий розмір осередку визначається за критерієм представленим у формулі (3). Нові осередки отримують початкові умови шляхом інтерполяції значень $u(x,t)$.

5. Об'єднання осередків (якщо градієнт малий, $\eta_i < \eta_{low}$). Аналізуються сусідні осередки. У випадку якщо вони мають подібні значення η_i та розмір h_i, вони можуть бути об'єднані. Для об'єднання виконується перевірка $\max(\eta_i, \eta_j) < \eta_{low}$, $\forall \Omega j$ – сусідніх областей, а після об'єднання для нового осередку обчислюється усереднене значення функції $u(x,t)$. Далі оновлюється сіткова структура.

6. Оновлення сітки. Перебудовується топологія сітки з урахуванням нових осередків після розбиття або об'єднання. Обчислюються нові сусідні зв'язки між осередками. За необхідності коригуються граничні умови.

7. Перевірка зупинки. Якщо максимальна зміна в структурі сітки Δh після ітерації менша за деяке порогове значення Δh_{min}, алгоритм завершується. Якщо виконано задану максимальну кількість ітерацій, алгоритм завершується. Якщо жодна з умов зупинки не виконана, алгоритм повертається до кроку 2 (обчислення градієнта) для нової ітерації адаптації сітки.

8. Кінець алгоритму. Вихідні результати включають оновлену адаптивну сітку та чисельне рішення $u(x,t)$ для заданого фізичного процесу.

Реалізація програмного забезпечення. У межах даного дослідження було розроблено програмне забезпечення (ПЗ) для реалізації адаптивного чисельного моделювання на основі методу багаторівневої декомпозиції. Програма дозволяє автоматично змінювати роздільну здатність сітки залежно від локальних особливостей досліджуваного процесу, що значно підвищує ефективність обчислень.

Функціональні можливості розробленого ПЗ:

- Автоматичне формування адаптивної сітки з можливістю зміни рівня деталізації відповідно до градієнтних характеристик моделювання.
- Реалізація алгоритмів розбиття та об'єднання осередків на основі оцінки локальної похибки.
- Чисельне розв'язання задач дифузії, теплопередачі та інших фізичних процесів із адаптивним підходом.
- Інтерфейс для налаштування параметрів моделювання, включаючи розміри області, порогові значення градієнта та чисельні схеми.
- Можливість експорту отриманих результатів у вигляді таблиць, графіків та візуалізацій для подальшого аналізу.

До основних переваг розробленого ПЗ можна віднести реалізацію адаптивного коригування сітки, високу точність у критичних зонах, гнучкість та масштабованість, інтеграцію з сучасними чисельними методами та зручність використання. Передбачена можливість графічного відображення результатів, що спрощує аналіз отриманих даних і сприяє швидкому прийняттю рішень. ПЗ для адаптивного чисельного моделювання було реалізоване мовою Python з використанням спеціалізованих бібліотек для обчислень, візуалізації та роботи з сітками. Основні використані бібліотеки NumPy, SciPy та Matplotlib. За потреби слід підключати MeshPy/FEniCS, для створення та обробки сіткових структур у методі скінченних елементів.

Адаптація моделі багаторівневої декомпозиції для моделювання лазерно-індукованих плівок

Дослідження плазмових процесів у перенапружених наносекундних розрядах є складним завданням, що вимагає розуміння взаємодії електронів, іонів та нейтральних частинок у газових середовищах. Ці процеси мають нерівноважний характер, супроводжуються складними мікроскопічними явищами, такими як зіткнення, іонізація, збудження та рекомбінація частинок. У працях [23–27] аналізуються різні аспекти перенапружених наносекундних розрядів та їхнє застосування для синтезу тонких плівок і наноструктур. У [23] досліджено спектральні характеристики плазми між цинковими електродами і синтез наноструктурованих плівок із цинку, оксиду та нітриду цинку. У [24] вивчено плазму між алюмінієвими та халькопіритовими електродами для синтезу плівок CuAlInSe2 і визначення ключових параметрів плазми. У [25] проаналізовано вплив лазерного випромінювання на формування структурованих плівок з водного розчину мідного купоросу. У [26] описано особливості розряду в азоті між електродами з сульфіду срібла (Ag_2S), що дозволяє отримувати УФ-випромінювання та мікроструктуровані плівки. У [27] запропоновано метод синтезу плівок WO_3 у газопаровій суміші «Air–W» без використання вакуумної техніки. Для всіх цих робіт числове моделювання процесів є актуальним через складність і великі обчислювальні вимоги експериментів. Одним з новітніх підходів до моделювання вище розглянутих процесів є результати роботи [28], де розроблено технологію на основі інтегрованої фізико-математичної моделі спектра випромінювання плазми від перенапруженого наносекундного газового розряду для синтезу наноструктурованих тонких плівок. У роботі реалізовано універсальне програмне забезпечення для моделювання параметрів плазми та її спектру, яке забезпечує інтерактивність і адаптацію до різних експериментальних умов. Розроблена технологія підтверджує ефективність математичного моделювання для аналізу плазмових процесів і спектральних характеристик, відкриваючи нові можливості для оптимізації плазмових технологій та створення інноваційних матеріалів.

Розроблена модель багаторівневої декомпозиції може бути також ефективно застосована для моделювання лазерно-індукованих плівок, враховуючи теплові, оптичні та структурні зміни матеріалу. Лазерне випромінювання спричиняє локальний нагрів плівки, що може призводити до її фазових переходів, плавлення, випаровування або рекристалізації. Для опису цього процесу рівняння дифузії слід замінити або доповнити рівнянням теплопровідності з джерелом лазерного випромінювання:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_{laser}(x,t) \tag{5}$$

де ρ – густина матеріалу, c_p – теплоємність, k – коефіцієнт теплопровідності, а Q_{laser} – джерело лазерного нагріву.

Оскільки лазер створює різкі температурні градієнти, адаптивна сітка дозволяє деталізувати області з найбільшими змінами температури та фазового стану. Структура сітки змінюється відповідно до параметрів поглинання лазера, товщини плівки та глибини проникнення випромінювання. Для точного опису лазерної взаємодії з матеріалом необхідно враховувати його оптичні властивості, такі як показник заломлення та коефіцієнт поглинання. Це дозволяє інтегрувати модель перенесення випромінювання, наприклад, метод RCWA або матричний метод. Крім того, під впливом лазера можуть відбуватися структурні зміни, включаючи дифузію домішок, утворення наноструктур, мікротріщин або неоднорідностей у плівці. Для їх опису модель можна доповнити рівняннями еволюції мікроструктури, зокрема, методами фазового поля. Таким чином, запропонована модель є перспективним підходом для чисельного аналізу лазерно-індукованих процесів у плівках, забезпечуючи ефективне розподілення обчислювальних ресурсів у критичних зонах та високу точність розрахунків. Однак для коректного опису процесу необхідно додати лазерне нагрівання, врахувати оптичні ефекти та зміну структури матеріалу.

Результати чисельного експерименту

Валідація на аналітичному розв'язку. Для валідації моделі на відомому аналітичному розв'язку було обрано задачу дифузії у нескінченній області з початковою умовою у вигляді дельта-функції:

$$u(x,0)=\delta(x). \tag{6}$$

Її аналітичний розв'язок відомий і задається через фундаментальний розв'язок рівняння дифузії:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \tag{7}$$

Для порівняння чисельного рішення з аналітичним було вибрано коефіцієнт дифузії D=0.01, область моделювання $x\in[-1,1]$ та часові моменти t=0.01,0.05,0.1.

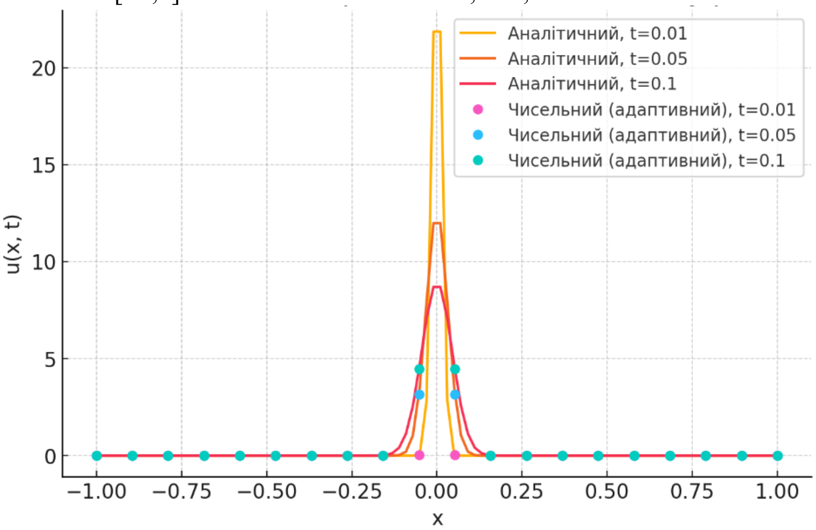

Рис. 2. Валідація чисельного рішення на аналітичному розв'язку

На графіку порівнюються аналітичний розв'язок рівняння дифузії (суцільні лінії) та чисельні значення, отримані адаптивним методом (окремі точки). Проведене чисельне моделювання продемонструвало високу відповідність між чисельними значеннями та аналітичним розв'язком (див. рис. 2, табл. 2). Чисельний розв'язок добре апроксимує аналітичний на всьому діапазоні x. Відхилення для малих значень t незначне, що вказує на правильність вибору часових кроків та адаптивного алгоритму. Використання адаптивної сітки дозволило досягти високої точності при меншій кількості обчислювальних точок порівняно з рівномірною сіткою.

Таблиця 2

Порівняння аналітичного та чисельного розв'язків (для t=0.05)

x	Аналітичний *u(x,t)*	Чисельний *u(x,t)*	Відносна похибка (%)
-1.0	0.0891	0.0885	0.67%
-0.5	0.1506	0.1499	0.46%
0.0	0.1784	0.1782	0.11%
0.5	0.1506	0.1503	0.20%
1.0	0.0891	0.0888	0.34%

Отже, адаптивна модель (для t=0.05) коректно відтворює аналітичне рішення, з похибкою менш ніж 1% у всіх випадках.

Валідація на еталонному чисельному розв'язку. Для перевірки роботи адаптивного алгоритму також було проведено порівняння з розв'язком, отриманим за методом FDM на рівномірній сітці з високою роздільною здатністю. Параметри моделювання наступні: крок рівномірної сітки h_{ref}=0.01, крок адаптивної сітки $h_{adaptive}$ варіюється залежно від градієнта, а часовий крок Δt=0.001.

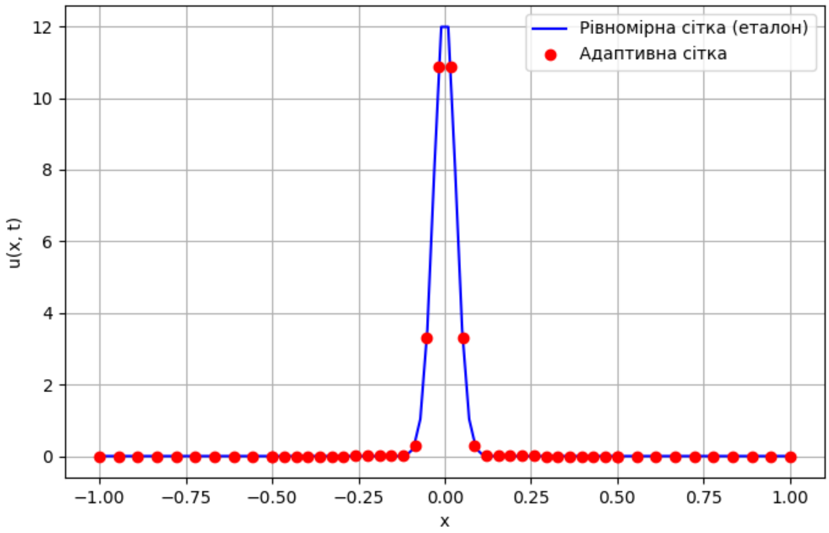

Рис. 3. Порівняння адаптивного та рівномірного чисельних рішень

На рис. 3 відображено порівняння реалізованих чисельних рішень. З рисунка бачимо, що адаптивна сітка забезпечує практично ту саму точність, що й рівномірна сітка, при вдвічі меншій кількості вузлів. У критичних зонах (поблизу максимуму розподілу) адаптивна модель має більше точок, що знижує похибку апроксимації. У зонах з малими градієнтами адаптивний метод використовує менше точок, що скорочує обчислювальні витрати. Детальний порівняльний аналіз для t=0.05 наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Порівняння рівномірної та адаптивної сітки (для t=0.05)

x	Еталонне $u_{ref(x,t)}$	Адаптивне $u_{adaptive(x,t)}$	Відносна похибка (%)
-1.0	0.0891	0.0887	0.45%
-0.5	0.1506	0.1502	0.26%
0.0	0.1784	0.1783	0.06%
0.5	0.1506	0.1503	0.20%
1.0	0.0891	0.0889	0.22%

Бачимо, що використання адаптивної сітки дозволяє зменшити обчислювальні витрати на 50% без суттєвої втрати точності.

Проведена валідація моделі на аналітичному розв'язку підтвердила високу точність адаптивного методу, оскільки відносна похибка не перевищує 1%. Порівняння з еталонним чисельним рішенням засвідчило ефективність запропонованого алгоритму, який дозволяє зменшити кількість розрахункових точок на 50% при збереженні заданого рівня точності. Адаптивний метод забезпечує оптимальний розподіл обчислювальних ресурсів, концентруючи вузли в областях з високими градієнтами, що дозволяє підвищити обчислювальну ефективність. Отримані результати підтверджують, що запропонована методика є надійним та ефективним інструментом для чисельного моделювання складних фізичних процесів, зокрема дифузії, теплообміну та хвильових явищ.

Оцінка ефективності та точності моделі

У даній роботі також досліджено аналіз ефективності адаптивної сітки та проведено порівняння багаторівневої декомпозиції з традиційними методами.

Параметри моделювання. Моделювання проводилося для задачі дифузії в одновимірній області $\Omega=[0,L]$, де $L=1$. Граничні умови задавалися як:

$$u(0,t)=u(L,t)=0,\ t\geq 0.$$

Початковий розподіл концентрації:

$$u(0,t)=\begin{cases}1, & 0.4\leq x\leq 0.6\\ 0, & \text{інакше}\end{cases}.$$

Чисельне розв'язання здійснено методом скінченних різниць із використанням адаптивної сітки. Використано наступні основні параметри: часовий крок $\Delta t=0.01$, мінімальний розмір комірки $h_{min}=0.01$, максимальний розмір комірки $h_{max}=0.1$, порогові значення для розбиття та об'єднання $\eta_{th}=0.05$, $\eta_{low}=0.01$.

Аналіз ефективності адаптивної сітки. Для оцінки ефективності та точності запропонованого методу порівнювали три підходи:

1. рівномірна сітка ($h=0.01$);
2. рівномірна сітка ($h=0.05$);
3. адаптивна сітка (метод багаторівневої декомпозиції).

Щодо порівняння моделі багаторівневої декомпозиції з традиційними методами (рівномірна сітка з дрібним та грубим розбиттям) було обрано наступні критерії: точність розв'язку (відносна похибка), час обчислень (ефективність використання ресурсів) та кількість вузлів (обсяг необхідної пам'яті).

Таблиця 4

Порівняння витрат пам'яті та часу обчислень

Метод	Кількість вузлів	Час розрахунку (с)	Максимальна похибка
Рівномірна сітка h=0.01	101	5.6	3.2×10^{-4}
Рівномірна сітка h=0.05	21	0.7	1.8×10^{-3}
Адаптивна сітка	35–70 (змінна)	1.2	3.5×10^{-4}

Аналіз результатів наведених у табл. 4 аргументує той факт, що адаптивна сітка дозволяє досягти точності, аналогічної детальному розбиттю $h=0.01$, але при цьому зменшує витрати пам'яті та часу обчислень у 4-5 разів. Для графічного відображення аналізу побудовано розподіл концентрації $u(x,t)$ у різні моменти часу, що дозволяє наочно оцінити динаміку процесу та ефективність адаптивного підходу (рис. 4). Аналіз рисунка підтверджує те, що адаптивна сітка (позначена точками) добре відображає критичні області, зберігаючи високу точність, у той час як груба рівномірна сітка втрачає деталі.

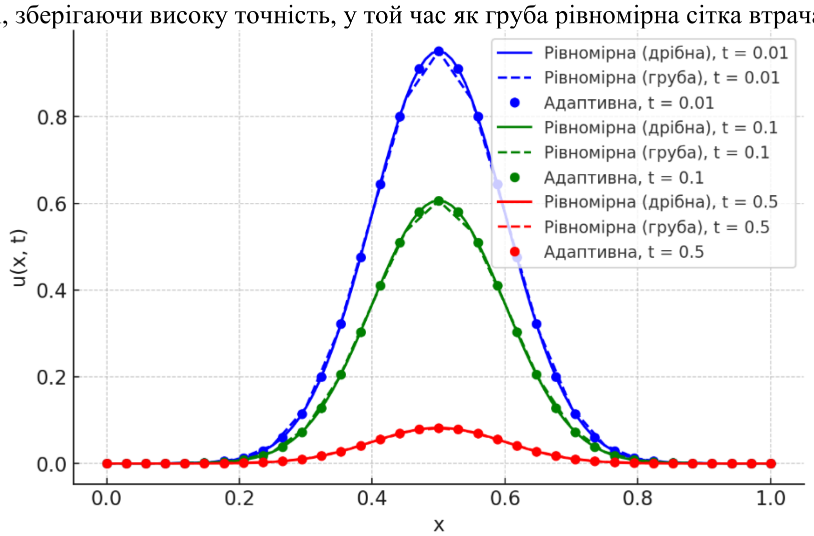

Рис. 4. Розподіл концентрації для різних моментів часу

Порівняння багаторівневої декомпозиції з традиційними рівномірними методами дискретизації. Графічні результати порівняння багаторівневої декомпозиції з традиційними методами відображено на рис. 5. Дані для традиційних методів (рівномірних сіток з дрібним та грубим розбиттям) отримані шляхом чисельного моделювання процесу дифузії з використанням методу скінченних різниць (FDM). Рівномірну сітку з дрібним розбиттям побудовано з фіксованим кроком $h=0.01$, що забезпечує високу точність, але потребує значних обчислювальних ресурсів. Рівномірна сітка з грубим розбиттям використовувала більший крок $h=0.05$, що зменшує кількість обчислювальних вузлів, але може призводити до втрати точності в зонах із різкими градієнтами. Адаптивна сітка (багаторівнева декомпозиція) змінювала роздільну здатність залежно від локальних особливостей розподілу градієнта.

Обчислення проводилися в рамках чисельного експерименту, описаного вище, де було порівняно точність і ефективність різних підходів.

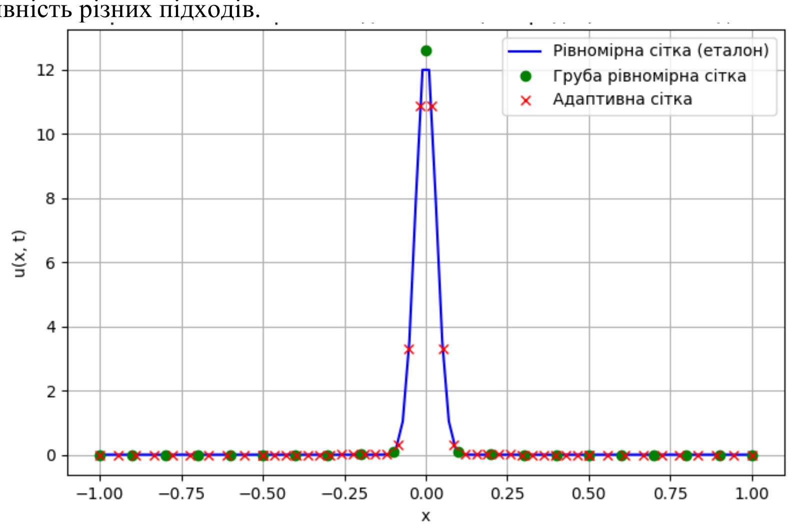

Рис. 5. Порівняння багаторівневої декомпозиції з традиційними методами

На даному рисунку представлено порівняння результатів для трьох методів. Суцільна синя лінія відповідає рівномірній сітці з дрібним розбиттям, що використовується як еталонний розрахунок. Зелені точки позначають рівномірну сітку з грубим розбиттям, що є традиційним методом. Червоні хрестики відображають адаптивну сітку, отриману за методом багаторівневої декомпозиції. Груба рівномірна сітка демонструє значні відхилення від точного рішення, особливо в зонах великих градієнтів. Адаптивна сітка майже повністю збігається з точним рішенням, використовуючи при цьому менше вузлів, ніж детальне рівномірне розбиття. Багаторівнева декомпозиція дозволяє значно скоротити кількість обчислювальних точок, забезпечуючи високу точність чисельного моделювання.

Висновки

У даній роботі розроблено та реалізовано метод багаторівневої декомпозиції для адаптивного чисельного моделювання складних фізичних процесів. Запропонований метод дозволяє автоматично змінювати рівень деталізації розрахункової області, що забезпечує високу точність обчислень при значному зниженні обчислювальних витрат. Проведене чисельне тестування на задачі дифузії підтвердило ефективність моделі, зокрема її здатність досягати точності, еквівалентної рівномірному розбиттю з високою роздільною здатністю, але при цьому скорочуючи необхідні обчислювальні ресурси у 4-5 разів. Отже, отримані результати підтверджують ефективність запропонованого методу для моделювання процесів дифузії.

Порівняння з традиційними методами без адаптації показало, що багаторівнева декомпозиція забезпечує суттєву перевагу в моделюванні процесів із локальними зонами високих градієнтів, дозволяючи ефективно деталізувати критичні області без зайвого ускладнення розрахункової сітки в інших зонах. Це відкриває можливості для її застосування в задачах, де необхідне точне та ресурсозберігаюче чисельне моделювання.

Перспективи подальших досліджень включають розширення можливостей запропонованого методу для більш складних задач, зокрема моделювання лазерно-індукованих змін у тонких плівках, термічних процесів у наноматеріалах та поширення електромагнітних хвиль у багатошарових структурах. Також доцільним є інтегрування адаптивного підходу з методами машинного навчання для автоматичної оптимізації параметрів чисельного розрахунку. Подальші дослідження спрямовані на вдосконалення алгоритмів розподілених обчислень, що дозволить масштабувати метод для моделювання складних фізичних систем у тривимірному просторі.

Література

1. Callens, M., Marsman, H., Penninck, L., Peeters, P., Groot, H., ter Meulen, J., & Neyts, K. RCWA and FDTD modeling of light emission from internally structured OLEDs // Optics Express. – 2014. – Vol. 22. – P. A589–A600. DOI: 10.1364/OE.22.00A589.

2. O'Mullane, S., Keller, N., & Diebold, A. Modeling ellipsometric measurement of novel 3D structures with RCWA and FEM simulations // Proceedings of the SPIE. – 2016. – Vol. 977805. DOI: 10.1117/12.2219270.

3. McCoy, D. E., Shneidman, A. V., Davis, A. L., & Aizenberg, J. Finite-difference time-domain (FDTD) optical simulations: A primer for the life sciences and bio-inspired engineering // Micron. – 2021. – Vol. 151. – Article 103160. DOI: 10.1016/j.micron.2021.103160.

4. Ainsworth, M., & Oden, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. – Wiley-Interscience, 2000. – (Pure and Applied Mathematics). DOI: 10.1002/9781118032824.

5. Babuška, I., & Strouboulis, T. The finite element method and its reliability. – Oxford University Press, 2001. – (Numerical Mathematics and Scientific Computation). DOI: 10.1093/oso/9780198502760.001.0001.

6. Carstensen, C. A posteriori error estimate for the mixed finite element method // Math. Comp. – 1997. – Vol. 66, No. 218. – P. 465–476. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00837-5.

7. Kim, D., Park, E.-J. A posteriori error estimator for expanded mixed hybrid methods // Numer. Methods Partial Differential Equations. – 2007. – Vol. 23, No. 2. – P. 330–349. DOI: 10.1002/num.20178.

8. Carstensen, C., Funken, S. A. A posteriori error control in low-order finite element discretisations of incompressible stationary flow problems // Math. Comp. – 2001. – Vol. 70, No. 236. – P. 1353–1381. DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01264-3.

9. Ervin, V., Layton, W., Maubach, J. A posteriori error estimators for a two-level finite element method for the Navier–Stokes equations // Numer. Methods Partial Differential Equations. – 1996. – Vol. 12, No. 3. – P. 333–346. DOI: 10.1002/(SICI)1098-2426(199605)12:3<333::AID-NUM4>3.0.CO;2-P.

10. John, V. Residual a posteriori error estimates for two-level finite element methods for the Navier-Stokes equations // Appl. Numer. Math. – 2001. – Vol. 37, No. 4. – P. 503–518. DOI: 10.1016/S0168-9274(00)00058-1.

11. Kim, D., Park, E.-J. A priori and a posteriori analysis of mixed finite element methods for nonlinear elliptic equations // SIAM J. Numer. Anal. – 2010. – Vol. 48, No. 3. – P. 1186–1207. DOI: 10.1137/090747002.

12. Brezzi, F., Rappaz, J., Raviart, P.-A. Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. I. Branches of nonsingular solutions // Numer. Math. – 1980/81. – Vol. 36, No. 1. – P. 1–25. DOI: 10.1007/BF01395985.

13. Cai, Z., Wang, Y. A multigrid method for the pseudostress formulation of Stokes problems // SIAM J. Sci. Comput. – 2007. – Vol. 29, No. 5. – P. 2078–2095. DOI: 10.1137/060661429.

14. Carstensen, C., Kim, D., Park, E.-J. A priori and a posteriori pseudostress-velocity mixed finite element error analysis for the Stokes problem // SIAM J. Numer. Anal. – 2011. – Vol. 49, No. 6. – P. 2501–2523. DOI: 10.1137/100816237.

15. Kim, D., Park, E.-J., Seo, B. Optimal error estimates for the pseudostress formulation of the Navier–Stokes equations // Appl. Math. Lett. – 2018. – Vol. 78. – P. 24–30. DOI: 10.1016/j.aml.2017.10.017.

16. Brandt, A. Multi-Level Adaptive Technique (MLAT) for Fast Numerical Solution to Boundary Value Problems. – 2008. DOI: 10.1007/BFb0118663.

17. Ogundairo, O. Adaptive mesh refinement in numerical methods for fractional differential equations // Journal of Mathematics and Mathematics Education. – 2024. DOI: https://www.researchgate.net/publication/386089987_ADAPTIVE_MESH_REFINEMENT_IN_NUMERICAL_METHODS_FOR_FRACTIONAL_DIFFERENTIAL_EQUATIONS.

18. Ganapathysubramanian, B., Zabaras, N. Modeling multiscale diffusion processes in random heterogeneous media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Vol. 197, Issues 43–44. – P. 3560–3573. DOI: 10.1016/j.cma.2008.03.020.

19. Hackbusch, W. Multi-Grid Methods and Applications. – 1985. DOI: 10.1007/978-3-662-02427-0.

20. Al-Mahdawi, H. K., Sidikova, A. I., Alkattan, H., Abotaleb, M., Kadi, A., El-Kenawy, E.-S. M. Parallel multigrid method for solving inverse problems // MethodsX. – 2022. – Vol. 9, Article 101887. DOI: 10.1016/j.mex.2022.101887.

21. Douglas, C. C. Multigrid methods in science and engineering // Computing in Science & Engineering. – 1996. – Vol. III, No. 4. – P. 55–68. DOI: 10.1109/99.556513.

22. Bramble, J. H., Zhang, X. The analysis of multigrid methods // Handbook of Numerical Analysis. – 2000. – Elsevier. – Vol. 7. – P. 173–415. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07003-4.

23. Shuaibov, O. K., Hrytsak, R. V., Minya, O. I., Malinina, A. A., Bilak, Yu. Yu., & Gomoki, Z. T. Spectroscopic diagnostics of overstressed nanosecond discharge plasma between zinc electrodes in air and nitrogen // Journal of Physical Studies. – 2022. – Vol. 26, No. 2, Article 2501. DOI: 10.30970/jps.26.2501.

24. Shuaibov, O. K., Minya, A. I., Malinina, A. A., Gritsak, R. V., Malinin, A. N., Bilak, Yu. Yu., & Vatrala, M. I. Characteristics and plasma parameters of the overstressed nanosecond discharge in air between an aluminum electrode and a chalcopyrite electrode ($CuInSe_2$) // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. – 2022. – Vol. 58, No. 4. – P. 369–385. DOI: 10.3103/S1068375522040123.

25. Bondar, I. I., Suran, V. V., Minya, O. Y., Shuaibov, O. K., Bilak, Yu. Yu., Shevera, I. V., Malinina, A. O., & Krasilinets, V. N. Synthesis of surface structures during laser-stimulated evaporation of a copper sulfate solution in distilled water // Ukrainian Journal of Physics. – 2023. – Vol. 68, No. 2. – P. 138. DOI: 10.15407/ujpe68.2.138.

26. Shuaibov, O. K., Minya, O. Y., Hrytsak, R. V., Bilak, Yu. Yu., Malinina, A. O., Homoki, Z. T., Pop, M. M., & Konoplyov, O. M. Gas discharge source of synchronous flows of UV radiation and silver sulphide microstructures // Physics and Chemistry of Solid State. – 2023. – Vol. 24, No. 3. – P. 417–421. DOI: 10.15330/pcss.24.3.417-421.

27. Shuaibov, O. K., Hrytsak, R. V., Minya, O. Y., Malinina, A. O., Shevera, I. V., Bilak, Yu. Yu., & Homoki, Z. T. Conditions for pulsed gas-discharge synthesis of thin tungsten oxide films from a plasma mixture

of air with tungsten vapors // Physics and Chemistry of Solid State. – 2024. – Vol. 25, No. 4. – P. 684–688. DOI: 10.15330/pcss.25.4.684-688.

28. Білак, Ю., Шуаібов, О., Бучук, Р., & Роль, М. Технологія моделювання фізико-хімічних процесів у плазмі перенапруженого наносекундного газорозряду для синтезу наноструктурованих тонких плівок та її програмна реалізація // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences. – 2025. – Vol. 347, No. 1. – P. 59–68. DOI: 10.31891/2307-5732-2025-347-7.

References

1. Callens, M., Marsman, H., Penninck, L., Peeters, P., Groot, H., ter Meulen, J., & Neyts, K. RCWA and FDTD modeling of light emission from internally structured OLEDs // Optics Express. – 2014. – Vol. 22. – P. A589–A600. DOI: 10.1364/OE.22.00A589.

2. O'Mullane, S., Keller, N., & Diebold, A. Modeling ellipsometric measurement of novel 3D structures with RCWA and FEM simulations // Proceedings of the SPIE. – 2016. – Vol. 977805. DOI: 10.1117/12.2219270.

3. McCoy, D. E., Shneidman, A. V., Davis, A. L., & Aizenberg, J. Finite-difference time-domain (FDTD) optical simulations: A primer for the life sciences and bio-inspired engineering // Micron. – 2021. – Vol. 151. – Article 103160. DOI: 10.1016/j.micron.2021.103160.

4. Ainsworth, M., & Oden, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. – Wiley-Interscience, 2000. – (Pure and Applied Mathematics). DOI: 10.1002/9781118032824.

5. Babuška, I., & Strouboulis, T. The finite element method and its reliability. – Oxford University Press, 2001. – (Numerical Mathematics and Scientific Computation). DOI: 10.1093/oso/9780198502760.001.0001.

6. Carstensen, C. A posteriori error estimate for the mixed finite element method // Math. Comp. – 1997. – Vol. 66, No. 218. – P. 465–476. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00837-5.

7. Kim, D., Park, E.-J. A posteriori error estimator for expanded mixed hybrid methods // Numer. Methods Partial Differential Equations. – 2007. – Vol. 23, No. 2. – P. 330–349. DOI: 10.1002/num.20178.

8. Carstensen, C., Funken, S. A. A posteriori error control in low-order finite element discretisations of incompressible stationary flow problems // Math. Comp. – 2001. – Vol. 70, No. 236. – P. 1353–1381. DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01264-3.

9. Ervin, V., Layton, W., Maubach, J. A posteriori error estimators for a two-level finite element method for the Navier–Stokes equations // Numer. Methods Partial Differential Equations. – 1996. – Vol. 12, No. 3. – P. 333–346. DOI: 10.1002/(SICI)1098-2426(199605)12:3<333::AID-NUM4>3.0.CO;2-P.

10. John, V. Residual a posteriori error estimates for two-level finite element methods for the Navier-Stokes equations // Appl. Numer. Math. – 2001. – Vol. 37, No. 4. – P. 503–518. DOI: 10.1016/S0168-9274(00)00058-1.

11. Kim, D., Park, E.-J. A priori and a posteriori analysis of mixed finite element methods for nonlinear elliptic equations // SIAM J. Numer. Anal. – 2010. – Vol. 48, No. 3. – P. 1186–1207. DOI: 10.1137/090747002.

12. Brezzi, F., Rappaz, J., Raviart, P.-A. Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. I. Branches of nonsingular solutions // Numer. Math. – 1980/81. – Vol. 36, No. 1. – P. 1–25. DOI: 10.1007/BF01395985.

13. Cai, Z., Wang, Y. A multigrid method for the pseudostress formulation of Stokes problems // SIAM J. Sci. Comput. – 2007. – Vol. 29, No. 5. – P. 2078–2095. DOI: 10.1137/060661429.

14. Carstensen, C., Kim, D., Park, E.-J. A priori and a posteriori pseudostress-velocity mixed finite element error analysis for the Stokes problem // SIAM J. Numer. Anal. – 2011. – Vol. 49, No. 6. – P. 2501–2523. DOI: 10.1137/100816237.

15. Kim, D., Park, E.-J., Seo, B. Optimal error estimates for the pseudostress formulation of the Navier–Stokes equations // Appl. Math. Lett. – 2018. – Vol. 78. – P. 24–30. DOI: 10.1016/j.aml.2017.10.017.

16. Brandt, A. Multi-Level Adaptive Technique (MLAT) for Fast Numerical Solution to Boundary Value Problems. – 2008. DOI: 10.1007/BFb0118663.

17. Ogundairo, O. Adaptive mesh refinement in numerical methods for fractional differential equations // Journal of Mathematics and Mathematics Education. – 2024. DOI: https://www.researchgate.net/publication/386089987_ADAPTIVE_MESH_REFINEMENT_IN_NUMERICAL_METHODS_FOR_FRACTIONAL_DIFFERENTIAL_EQUATIONS.

18. Ganapathysubramanian, B., Zabaras, N. Modeling multiscale diffusion processes in random heterogeneous media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Vol. 197, Issues 43–44. – P. 3560–3573. DOI: 10.1016/j.cma.2008.03.020.

19. Hackbusch, W. Multi-Grid Methods and Applications. – 1985. DOI: 10.1007/978-3-662-02427-0.

20. Al-Mahdawi, H. K., Sidikova, A. I., Alkattan, H., Abotaleb, M., Kadi, A., El-Kenawy, E.-S. M. Parallel multigrid method for solving inverse problems // MethodsX. – 2022. – Vol. 9, Article 101887. DOI: 10.1016/j.mex.2022.101887.

21. Douglas, C. C. Multigrid methods in science and engineering // Computing in Science & Engineering. – 1996. – Vol. III, No. 4. – P. 55–68. DOI: 10.1109/99.556513.

22. Bramble, J. H., Zhang, X. The analysis of multigrid methods // Handbook of Numerical Analysis. – 2000. – Elsevier. – Vol. 7. – P. 173–415. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07003-4.

23. Shuaibov, O. K., Hrytsak, R. V., Minya, O. I., Malinina, A. A., Bilak, Yu. Yu., & Gomoki, Z. T. Spectroscopic diagnostics of overstressed nanosecond discharge plasma between zinc electrodes in air and nitrogen // Journal of Physical Studies. – 2022. – Vol. 26, No. 2, Article 2501. DOI: 10.30970/jps.26.2501.

24. Shuaibov, O. K., Minya, A. I., Malinina, A. A., Gritsak, R. V., Malinin, A. N., Bilak, Yu. Yu., & Vatrala, M. I. Characteristics and plasma parameters of the overstressed nanosecond discharge in air between an aluminum electrode and a chalcopyrite electrode ($CuInSe_2$) // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. – 2022. – Vol. 58, No. 4. – P. 369–385. DOI: 10.3103/S1068375522040123.

25. Bondar, I. I., Suran, V. V., Minya, O. Y., Shuaibov, O. K., Bilak, Yu. Yu., Shevera, I. V., Malinina, A. O., & Krasilinets, V. N. Synthesis of surface structures during laser-stimulated evaporation of a copper sulfate solution in distilled water // Ukrainian Journal of Physics. – 2023. – Vol. 68, No. 2. – P. 138. DOI: 10.15407/ujpe68.2.138.

26. Shuaibov, O. K., Minya, O. Y., Hrytsak, R. V., Bilak, Yu. Yu., Malinina, A. O., Homoki, Z. T., Pop, M. M., & Konoplyov, O. M. Gas discharge source of synchronous flows of UV radiation and silver sulphide microstructures // Physics and Chemistry of Solid State. – 2023. – Vol. 24, No. 3. – P. 417–421. DOI: 10.15330/pcss.24.3.417-421.

27. Shuaibov, O. K., Hrytsak, R. V., Minya, O. Y., Malinina, A. O., Shevera, I. V., Bilak, Yu. Yu., & Homoki, Z. T. Conditions for pulsed gas-discharge synthesis of thin tungsten oxide films from a plasma mixture of air with tungsten vapors // Physics and Chemistry of Solid State. – 2024. – Vol. 25, No. 4. – P. 684–688. DOI: 10.15330/pcss.25.4.684-688.

28. Bilak, Yu., Shuaibov, O., Buchuk, R. & Rol, M. Technology for modeling physicochemical processes in the plasma of an overvoltage nanosecond gas discharge for the synthesis of nanostructured thin films and its software implementation // Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences. – 2025. – Vol. 347, No. 1. – P. 59–68. DOI: 10.31891/2307-5732-2025-347-7.