

КАПЛУН ПАВЛО

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-1675-5104>e-mail: kaplunpavel@gmail.com**СЛЄПКО ТАРАС**

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0003-3322-190X>e-mail: taras.sliepko@gmail.com

ВІЛЬНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ НЕСУЧОГО КАНАТУ З ПРУЖНОПОДАТЛИВИМИ ОПОРАМИ НА РІЗНИХ РІВНЯХ

Дослідження вільних поперечних коливань несучого канату з пружно податливими опорами на різних рівнях, формування аналітичних виразів для визначення коефіцієнта приведення маси несучого канату, а також аналіз впливу динамічних навантажень на несучий канат із зосередженим вантажем.

Ключові слова: несучий канат, поперечні коливання, пружно податливі опори, динамічні навантаження, коефіцієнт приведення маси, система вантаж-канат.

KAPLUN PAVLO, SLIEPKO TARAS

Khmelnitskyi National University

FREE TRANSVERSE VIBRATIONS OF A LOAD-BEARING ROPE WITH SPRING-COMPLIANT SUPPORTS AT DIFFERENT LEVELS

This article investigates the free transverse vibrations of a load-bearing rope with spring-compliant supports at different levels. The study is motivated by the widespread use of load-bearing ropes in mechanical engineering, transport systems, and construction, where they experience significant dynamic loads that affect structural stability and operational safety. The precise modeling of such systems is essential for understanding their behavior under varying operational conditions and ensuring their long-term reliability.

Using Lagrange's equation and the geometrical approach to flexible string modeling, a nonlinear differential equation is derived to describe the free transverse vibrations of the rope. A systematic methodology for solving this equation is presented, leading to an analytical expression for the mass reduction coefficient of the system. This coefficient is a crucial parameter for evaluating the dynamic behavior of load-bearing ropes and is determined considering different support levels and a concentrated load acting on the rope. The influence of these factors on the natural frequencies and amplitude of vibrations is thoroughly analyzed.

The study highlights the role of support compliance in altering the dynamic response of the rope. Experimental and theoretical findings indicate that supports with high compliance significantly affect the magnitude of dynamic forces, leading to nonlinear oscillatory behavior and changes in stress distribution along the rope. This aspect is particularly relevant for the design of mobile suspended rope systems, where load stability and oscillatory behavior must be precisely controlled. The results also provide insights into energy dissipation mechanisms and the potential resonance phenomena that may arise in practical applications.

The proposed analytical approach provides an efficient method for predicting the mechanical response of suspended rope structures. The results contribute to the optimization of engineering designs, enabling improved load distribution strategies, enhanced damping techniques, and structural reinforcements to mitigate adverse vibrational effects. The research findings are applicable to crane systems, cableways, suspension bridges, and other mechanical systems relying on load-bearing ropes, ensuring their operational efficiency, safety, and durability under dynamic loading conditions.

Keywords: load-bearing rope, transverse vibrations, spring-compliant supports, dynamic loads, mass reduction coefficient, rope-load system.

Постановка проблеми у загальному вигляді

та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

У сучасному машинобудуванні, транспортних системах та будівельних конструкціях широко використовуються несучі канати, які піддаються значним динамічним навантаженням. Однією з важливих наукових і практичних проблем є забезпечення надійності та довговічності таких конструкцій, що вимагає глибокого аналізу їхньої динамічної поведінки. Особливо актуальним є дослідження вільних поперечних коливань несучих канатів, оскільки ці явища впливають на експлуатаційну стійкість та безпеку конструкцій.

Важливість досліджень у цій сфері зумовлена необхідністю підвищення ефективності проектування та експлуатації канатних систем, зокрема мобільних підвісних установок. Вплив пружно податливих опор на динамічні характеристики канатів залишається недостатньо вивченим, що ускладнює розробку оптимальних методик розрахунку та прогнозування їхньої поведінки.

Дослідження вільних поперечних коливань несучого канату з пружно податливими опорами дозволяє отримати важливі аналітичні залежності для визначення коефіцієнта приведення маси та оцінки впливу параметрів системи на динамічні навантаження.

Аналіз досліджень та публікацій

Несучі канати мобільних підвісних канатних установок в процесі експлуатації піддаються, крім статичних, динамічним навантаженням. В роботі [1] одержано в загальному виді рівняння вільних коливань несучого канату від власної ваги, який провисає по ланцюговій лінії. Вільні коливання несучого канату із опорами на одному рівні навантаженого зосередженою силою, як одної масової системи, розглянуті в роботі [2] і, як попередньо деформованого розтягнутого стержня із малою стрілкою прогину,

в роботі [3].

В якості кінцевих опор на мобільних підвісних канатних установках використовуються опори, які характеризуються великою податливістю і яка, як показали експериментальні дослідження [4], впливає на величину динамічних зусиль, які виникають в несучому канаті.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є: дослідження вільних коливання жорстко закріпленого по кінцях несучого канату однопрольотної установки з пружно податливими опорами, розташованими на різних рівнях модуля осевого стискання, напруження стандартної пенетрації.

Виклад основного матеріалу

В даній роботі досліджуються Дослідження проводяться при допущенні, що головній формі коливань канату відповідає пружна лінія статичного прогину від власної ваги, розподіленої по хорді прольоту, і від зосередженої сили P (рис.1).

Оскільки для інженерних розрахунків несучих канатів необхідно мати тільки максимальні динамічні зусилля, то силами опору та внутрішнього тертя нехтуємо.

Для аналітичного описання коливань несучого канату використовуємо рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

де K – кінетична енергія системи, N – потенційна енергія системи, Q_i і q_i – узагальнені сили і координати, t – час.

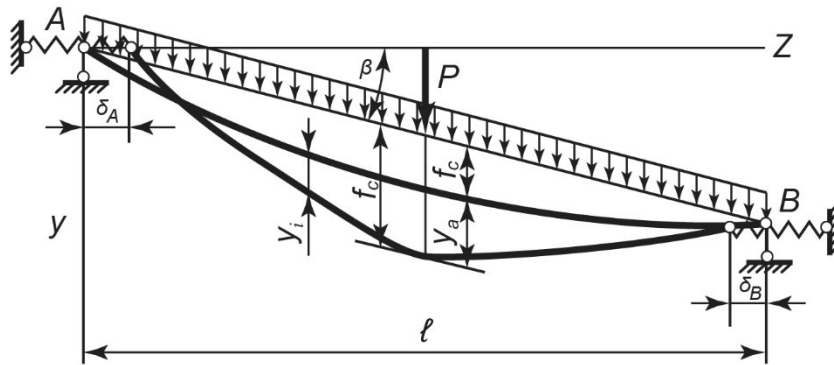


Рис. 1. Схема деформацій несучого канату з пружно податливими опорами на різних рівнях

Кінетична енергія несучого канату з зосередженим вантажем вагою P , як одно масової системи:

$$K = \frac{M(\dot{y}_0)^2}{2}, \quad (2)$$

де M – приведена маса системи, \dot{y}_0 – швидкість руху приведеної маси.

Згідно [5], приведена маса системи:

$$M = \left[\int_0^l m(z)y^2(z)dz + \sum_{i=1}^n m_i y^2(a_i) \right] \frac{1}{y^2(a)}, \quad (3)$$

де $m(z)$ – розподілена маса, $y(z)$ – головна форма коливань канату, m_i – маса i -того зосередженого вантажу, $y(a_i)$ – прогин канату в точці прикладання i -того вантажу; $y(a)$ – прогин канату в точці приведення маси.

Середину прольоту несучого канату приймемо за точку приведення маси, оскільки положення вантажу в цій точці відповідає максимальному натягу канату. Для несучого канату з опорами на різних рівнях (рис.2) відповідно до [6] маємо:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \left(P + \frac{ql}{2\cos\beta} + 2H \cdot \operatorname{tg}\beta \right) \frac{l}{4H}, \quad (4)$$

$$y_z = \left(\left(P + \frac{ql}{\cos\beta} \right) \frac{1}{2H} + \operatorname{tg}\beta \right) z - \frac{qz^2}{2H \cos\beta}, \quad (5)$$

де l – довжина прольоту установки, β – кут нахилу хорди прольоту до горизонту, z – координата перетину, H – горизонтальна складова натягу канату, q – вага 1 м.п. канату, P – вага зосередженого вантажу із врахуванням ваги вантажного візка, тобто $P = G + P'$, P' – вага вантажу, G – вага вантажного візка.

Оскільки середина прольоту канату прийнята за точку приведення маси системи несучий канат-вантаж, тобто $a_i = \frac{l}{2}$, і розглядається випадок коли візок із вантажем розташований посередині прольоту,

тобто $a_i = \frac{l}{2}$, то відповідно складова приведеної маси системи від зосереджених вантажів рівна:

$$\frac{1}{y^2(a)} \sum_{i=1}^n m_i y_i^2(a_i) = m_1 + m_2, \tag{6}$$

де m_1 – маса вантажу, m_2 – маса вантажного візка.

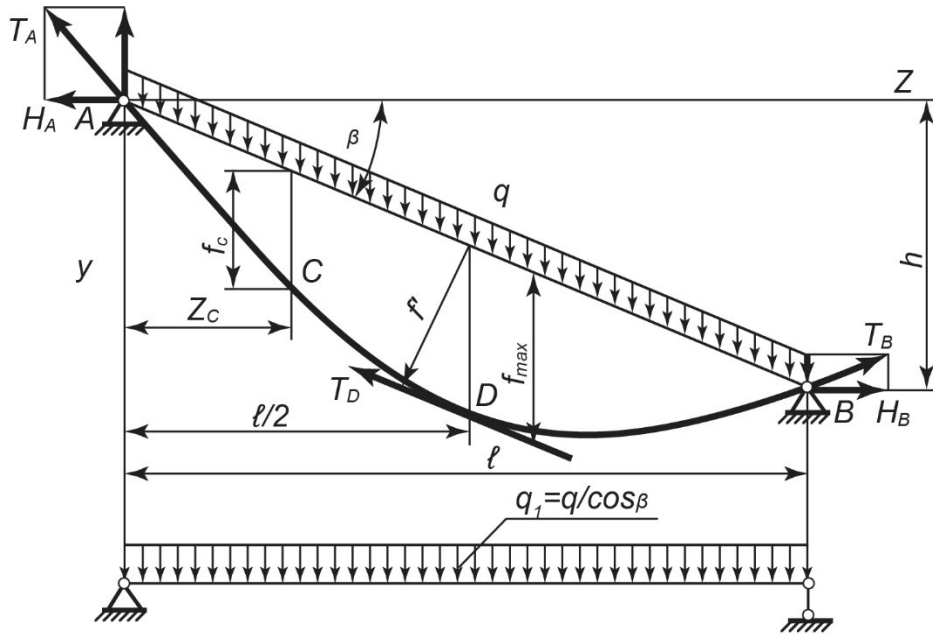


Рис. 2. Схема прогинів несучого канату

Складова приведеної маси системи від маси несучого канату m_k , приймаючи, що маса канату рівномірно розподілена, тобто що $m_2 = \rho / \cos \beta$, деп – маса 1 п.м. канату, рівна:

$$m_k = \frac{2\rho}{y^2(\frac{l}{2}) \cos \beta} \int_0^{l/2} y^2(z) dz. \tag{7}$$

Підставивши значення із виразів (4) і (5) в рівність (7), одержимо:

$$m_k = \frac{8\rho}{\left(P + \frac{ql}{2 \cos \beta} + 2H \cdot tg \beta\right)^2} \int_0^{l/2} \left(\left(P + \frac{ql}{\cos \beta} + 2H \cdot tg \beta\right) z - \frac{qz^2}{\cos \beta} \right)^2 dz. \tag{8}$$

Про інтегрувавши вираз (8), одержимо:

$$m_k = k_m \cdot \frac{\rho l}{\cos \beta}, \tag{9}$$

де k_m – коефіцієнт приведення маси канату до середини прольоту.

$$k_m = \frac{1}{3} (1 + \xi + 0,4 \cdot \xi^2), \tag{10}$$

$$\xi = \frac{ql}{4 \left(\left(P + \frac{ql}{2 \cos \beta}\right) + 2H \cdot tg \beta \right) \cos \beta}, \tag{11}$$

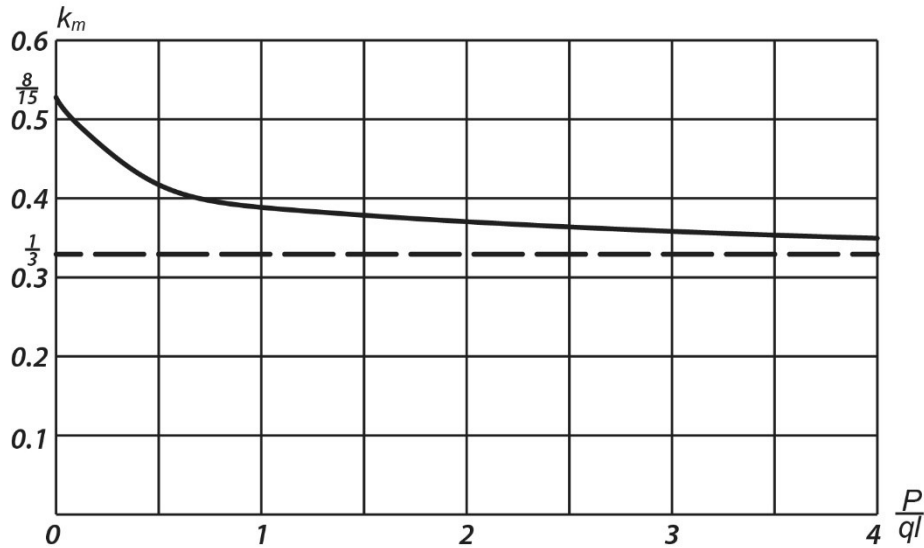
На основі виразів (3), (6) і (9), одержимо:

$$M = m_1 + m_2 + k_m \frac{\rho l}{\cos \beta}. \tag{12}$$

Із виразів (10) і (11) випливає, що величина приведеної маси канату із зосередженим вантажем залежить від величини сили P , кута β та натягу канату. Якщо в виразі (11) прийняти $\beta = 0$, то він прийме вигляд, одержаного в роботі [1].

Якщо прийняти $P = \beta = 0$, то одержимо $k_m = \frac{8}{15}$, що відповідає значенню коефіцієнту приведення маси несучого канату по В.Г. Рекачу [7], а при $P \gg \frac{ql}{\cos \beta}$ одержимо $k_m = 1/3$, що відповідає значенню коефіцієнту приведення маси канату по Кебу [8].

На рис.3 приведено графік залежності коефіцієнта k_m від величини відношення ваги вантажу до ваги канату в прольоті.

Рис. 3. Графік залежності $k_m = f\left(\frac{P}{ql}\right)$

Із графіка випливає, що маса канату суттєво впливає на приведену масу системи, якщо вона рівна або більша маси вантажу з візком.

Потенціальна енергія системи:

$$N = T\Delta L + G\frac{\Delta L^2}{2} + T(\delta_l + \delta_n) \cos \beta + C_l \frac{\delta_l^2}{2} + C_n \frac{\delta_n^2}{2} - Q_{np} \cdot y_d, \quad (13)$$

де T – статичний натяг несучого канату, ΔL – абсолютне видовження канату, C – відносна повздовжня жорсткість канату,

$$C = \frac{A \cos \beta}{l}, \quad (14)$$

A – коефіцієнт повздовжньої жорсткості канату, C_l, C_n – коефіцієнти жорсткості кінцевих опор, δ_l, δ_n – зміщення кінцевих опор, Q_{np} – вага системи приведена до середини несучого канату і рівна:

$$Q_{np} = M \cdot g = P + G + k_m \frac{ql}{\cos \beta}, \quad (15)$$

y_d – зміщення осі канату (рис.1).

З геометричної сторони задачі теорії гнучких ниток, маємо:

$$\Delta L = L_d - L, \quad (16)$$

де L_d – довжина канату при його динамічному навантаженні, L – статична довжина несучого канату.

Розглядаючи несучий канат з опорами на одному рівні, який навантажений зосередженою силою, як двопрольотну нитку, яка навантажена власною вагою, в роботі [2] одержано:

$$\Delta L = \frac{2y_d}{l} (2f_0 + y_d), \quad (17)$$

де f_0 – статичний прогин канату в точці прикладання вантажу і з деяким наближенням можна прийняти:

$$f_0 = \frac{Q_{np} \cdot l}{4T_1}. \quad (18)$$

Розглянемо видовження канату з опорами на різних рівнях (рис. 2). В цьому випадку довжина $l' = l / \cos \beta$, а прогини виміряні по перпендикуляру до лінії опор:

$$f' = f \cdot \cos \beta. \quad (19)$$

Підставивши ці значення в формулу (13), одержимо рівняння зв'язку між видовженням канату ΔL_{np} та його прогином для несучого канату з опорами на різних рівнях.

$$\Delta L_{np} = 2 \frac{y_d}{l} (2f_0 + y_d) \cos^3 \beta. \quad (20)$$

Зміна прогинів несучого канату викликається пружним видовженням канату ΔL та зміщенням опор δ_i відповідно для несучого канату з пружно податливими опорами на різних рівнях. Пружне видовження канату:

$$\Delta L = \Delta L_{np} - (\delta_l + \delta_n) \cos \beta, \quad (21)$$

де ΔL_{np} – приведена зміна довжини несучого канату з жорсткими опорами.

Величина $\Delta L_G = (\delta_l + \delta_n) \cos \beta$ є малою порівняно із довжиною несучого канату і її можна розглядати, як видовження канату за рахунок пружної податливості опор. З фізичної сторони задачі одержимо:

$$\Delta L = \frac{T_d - T}{A} \cdot \frac{l}{\cos \beta} = \frac{T_d - T}{C}. \quad (22)$$

Виходячи з допущення пружної податливості опор, одержимо:

$$\delta_l + \delta_n = (T_0 - T) \cdot K_{on} \cdot \cos \beta, \quad (23)$$

де K_{on} – коефіцієнт податливості кінцевих опор:

$$K_{on} = K_l + K_n,$$

де K_l, K_n – коефіцієнти податливості кожної опори зокрема.

На основі виразів (21),(22) і (23) одержимо:

$$\Delta L_{np} = \frac{T_0 - T}{A} \cdot \frac{l}{\cos \beta} \cdot k_{np}. \quad (24)$$

Тут k_{np} – коефіцієнт приведення для канату з пружно податливими опорами на різних рівнях:

$$k_{np} = 1 + \frac{K_{on} A \cdot \cos^3 \beta}{l}. \quad (25)$$

Якщо $\beta = 0$, одержимо:

$$k_{np} = 1 + \frac{K_{on} A}{l}. \quad (26)$$

Величину $L_{np} = \frac{l \cdot k_{np}}{\cos \beta}$ можна розглядати, як приведену довжину несучого канату із пружно податливими опорами, а $A_{np} = \frac{A}{k_{np}}$ – як приведену повздовжню динамічну жорсткість системи несучого канату – пружно податливі опори. Відповідно одержимо:

$$\Delta L_{np} = \frac{T_0 - T}{C_{np}}, \quad (27)$$

де C_{np} – приведена відносна повздовжня жорсткість системи несучий канат – пружно податливі опори.

Рівняння (13) запишемо у вигляді:

$$N = T(\Delta L + (\delta_l + \delta_n) \cos \beta) - \frac{1}{2}(\Delta T \cdot \Delta L + \Delta T \delta_l \cdot \cos \beta + \Delta T \delta_n \cdot \cos \beta) - Q_{np} \cdot y_0, \quad (28)$$

де $\Delta T = T_0 - T$.

Враховуючи (21), одержимо:

$$N = T \cdot \Delta L_{np} - \frac{1}{2} \Delta T \cdot \Delta L_{np} - Q_{np} \cdot y_0. \quad (29)$$

Також враховуючи (27), одержимо:

$$N = T \cdot \Delta L_{np} - \frac{1}{2} C_{np} \cdot \Delta L_{np}^2 - Q_{np} \cdot y_0. \quad (30)$$

Із формул (13), (20) і (22) із врахуванням виразу (18) одержимо:

$$N = 2 \left(\frac{T}{l} + 4C_{np} \left(\frac{f_0}{l} \right)^2 \cos^3 \beta \right) y_0^2 \cdot \cos^3 \beta + 8C_{np} \frac{f_0}{l^2} y_0^3 \cdot \cos^6 \beta + 2C_{np} \frac{1}{l^2} y_0^4 \cdot \cos^6 \beta - Q_{np}(1 - \cos^3 \beta) y_0. \quad (31)$$

На основі виразів (1), (2) і (31), розглядаючи y_0 як узагальнену координату одержимо рівняння вільних поперечних коливань несучого канату з пружноподатливими опорами на різних рівнях:

$$\ddot{y}_0 + k^2 y_0 = a - \mu(3f_0 y_0^2 + y_0^3), \quad (32)$$

де $a = Q_{np}(1 - \cos^3 \beta)$,

$$k^2 = 4 \frac{T_0 + 4C_{np} \left(\frac{f_0}{l} \right)^2 \cos^3 \beta}{M \cdot l} \cos^3 \beta, \quad (33)$$

$$\mu = 8 \frac{C_{np}}{M \cdot l^3} \cos^6 \beta.$$

Якщо в виразах (33) прийmemo $\beta = 0$, то одержимо рівняння аналогічне, одержаному в роботі [2] для несучого канату з жорстко закріпленими кінцями на одному рівні. Розв'язок рівняння (32) шукаємо в вигляді ряду:

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y_n(t). \quad (34)$$

Розклавши в ряд по малому параметру μ квадрат шуканої частоти p , знайдемо:

$$p^2 = k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n h_n. \quad (35)$$

Підставляючи вирази (35) і (34) в (32) та обмежуючись трьома членами ряду, одержимо рівняння для визначення функцій y_0, y_1, y_2 і сталих h_1 і h_2 .

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + p^2 y_0 &= a \\ \ddot{y}_1 + p^2 y_1 &= h_1 y_0 - y_0^2 (3f_0 + y_0) \\ \ddot{y}_2 + p^2 y_2 &= h_2 y_0 + h_1 y_1 - 3(2f_0 + y_0) y_0 y_1. \end{aligned} \quad (36)$$

Початкові умови для системи рівнянь (36) залежать від режиму роботи установки. Характерними режимами роботи несучих канатів є:

1. обрив чокера тягового канату та відрив примерзлого вантажу від землі, для яких початкові умови мають вигляд $y_0(0) = y_{max}$, $y_i(0) = 0 (i = 1, 2, 3, \dots)$, $\dot{y}_i(0) = 0 (i = 0, 1, 2, \dots)$, де y_{max} – максимальний прогин канату;

2. стопоріння вантажу до вантажного візка та падіння вантажу на несучий канат, для яких початкові умови мають вигляд $y_i(0) = 0 (i = 0, 1, 2, \dots)$, $\dot{y}_0(0) = u$, $\dot{y}_i(0) = 0 (i = 1, 2, 3, \dots)$, де u – швидкість руху приведеної маси системи після удару.

Одержані рівняння дозволяють дослідити динамічні зусилля в несучому канаті при різних режимах його роботи.

Література

1. Голубець В.М., Лютий Є.М., Мартинців М.П., Бариляк В.В. Основні напрямки дослідження роботи і вдосконалення конструкцій несучих і тягових канатних систем // Вісник Технологічного університету Поділля.- Хмельницький, 2002.- №6.- Ч.ІІ.- С. 155-159.
2. Ковальов Г. Г. Прикладна теорія коливань. Навчальний посібник. – Харків: НТУ "ХПІ", 2022.
3. Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Золотар Л. В., Шудра Н. С. Аналіз та оптимізація (мінімізація) динамічних навантажень у пружних елементах механізму підйому вантажу містобудівних кранів. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування, 2023, №2 (102), с. 118-128.
4. Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу: Конспект лекцій. 2-ге вид., перероб. і доп. – Харків: УкрДУЗТ, 2023. – Ч. 1. – 77 с.
5. Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Кравчук В. В., Остапущенко О., Кравченко І. Аналіз та оптимізація динамічних навантажень у пружних елементах/канатах будівельних кранів. Просторовий розвиток, 2023, №3, с. 90-107.
6. Прутян В. І., Варченко І. С. Динамічні зусилля в канаті при багатошаровій навивці. Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Нові рішення в сучасних технологіях, 2019.
7. Музыка О. О., Гудым О. О. Визначення зусиль в канаті підйомного пристрою з врахуванням пружності елементів. Вісник Приазовського державного технічного університету. Технічні науки, 2019, №39.
8. Візняк Р. І., Ловська А. О., Рибін А. В. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу. Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2020.

References

1. Holubets V. M., Liutyi Ye. M., Martynsiv M. P., Baryliak V. V. Osnovni napriamky doslidzhennia roboty i vdoskonalennia konstruktssii nesuchykh i tiahovykh kanatnykh system // Visnyk Tekhnolohichnoho universytetu Podillia.- Khmelnytskyi, 2002.- №6.- Ch.II.- S. 155-159.
2. Kovaliov H. H. Prykladna teoriia kolyvan. Navchalnyi posibnyk. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2022.
3. Chovniuk Yu. V., Cherednichenko P. P., Zolotar L. V., Shudra N. S. Analiz ta optymizatsiia (minimizatsiia) dynamichnykh navantazhen u pruzhnykh elementakh mekhanizmu pidniattia vantazhu mistobudivnykh kraniv. Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho gospodarstva ta pryrodokorystuvannia, 2023, №2 (102), s. 118-128.
4. Vizniak R. I., Lovska A. O., Rybin A. V. Osnovy teorii kolyvan ta stiikosti rukhomoho skladu: Konspekt lektssii. 2-he vyd., pererob. i dop. – Kharkiv: UkrDZUT, 2023. – Ch. 1. – 77 s.
5. Chovniuk Yu. V., Cherednichenko P. P., Kravchuk V. V., Ostapushchenko O., Kravchenko I. Analiz ta optymizatsiia dynamichnykh navantazhen u pruzhnykh elementakh/kanatakh budivelnnykh kraniv. Prostorovyi rozvytok, 2023, №3, s. 90-107.
6. Prutian V. I., Varchenko I. S. Dynamichni zusyillia v kanati pry bahatosharovii navyvtsi. Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Serii: Novi rishennia v suchasnykh tekhnolohiiakh, 2019.
7. Muzyka O. O., Hudyma O. O. Vyznachennia zusyil v kanati pidiiomnoho prystroiu z vrakhuvanniam pruzhnosti elementiv. Visnyk Priazovskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. Tekhnichni nauky, 2019, №39.
8. Vizniak R. I., Lovska A. O., Rybin A. V. Osnovy teorii kolyvan ta stiikosti rukhomoho skladu. Konspekt lektssii. – Kharkiv: UkrDZUT, 2020.