DOI 10.31891/2307-5732-2022-309-3-99-103
УДК 621.313

БІЛИЙ Л. А.
Хмельницький національний університет
ПОЛІЩУК О. С.
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0002-9764-8561
e-mail: opolishchuk71@gmail.com
ЛІСЕВИЧ С. П.
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0002-5501-9038
e-mail: lisevichsv@gmail.com
ЗАЛІЗЕЦЬКИЙ А. М.
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0002-0914-0814
e-mail: zam09042020@gmail.com
МЕЛЬНИК В. І.
Хмельницький національний університет
https://orcid.org/0000-0002-1173-4638
e-mail: oks81mik@i.ua

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЧУТЛИВОСТІ СИСТЕМИ ДО СВОЇХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Представлено типовий підхід для побудови та аналізу моделі об'єкта. Визначено, що задачі аналізу нелінійних систем складаються з розрахунку перехідних процесів і процесів, що встановилися; визначення статичної та динамічної стійкості знайдених процесів; розрахунку чутливості вихідних характеристик системи до зміни її внутрішніх та зовнішніх параметрів. Встановлено, що ефективність аналізу в цілому визначається не тільки ефективністю алгоритмів кожного з етапів розрахунку, а і узгодженістю математичного апарату, який лежить в їх основі. Визначено, що розрахунок перехідних процесів зводиться до задачі з початковими умовами, у яких значення залежних змінних задаються для одного і того ж значення незалежної змінної, а саме часу. Визначено, що нелінійні динамічні системи, моделі яких побудовано на якісній теорії загальних диференціальних рівнянь, є основним інструментом вирішення багатьох практичних задач. Встановлено, що це пояснюється такими факторами: наявністю добре розвиненого аналітичного апарату та чисельних методів розв'язання загальних диференціальних рівнянь; прозорістю та природністю загальних диференціальних рівнянь як математичної моделі для опису процесу переходу реальних об'єктів з одного стану до іншого під дією зовнішніх та внутрішніх причин; наявністю загальнодоступних якісних методів дослідження рішень загальних диференціальних рівнянь, зокрема методів оцінки стійкості, аналізу поведінки рішень в межах особливих точок та їх асимптотичної поведінки. Зазначено обставини, які призводять до того, що системи, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, є методично дуже зручним матеріалом для створення загальних алгоритмів дослідження динамічних систем. Побудовано математичну модель чутливості до початкових умов на основі неоднорідних диференціальних рівняннях першої варіації, що відкриває можливості для розв'язання основних задач аналізу, якими є: розрахунок перехідних процесів та процесів, що встановилися; визначення статичної стійкості та розрахунок параметричної чутливості, на основі єдиного алгоритму вирішення двоточкової T-періодичної крайової задачі для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, диференційне рівняння, періодична крайова задача, метод Коші.

Leonid BILYI, Oleh POLISHCHUK,
Svitlana LISEVICH, Anatoly ZALIZETSKY, Vasiliy MELNIK
Khmelnytskyi National University

MODELING OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS ON THE BASIS OF THE SYSTEM SENSITIVITY MODEL TO ITS INITIAL CONDITIONS

A typical approach for building and analyzing an object model is presented. It is determined that the tasks of analysis of nonlinear systems consist of: calculation of transients and established processes; determination of static and dynamic stability of the found processes; calculation of the sensitivity of the initial characteristics of the system to changes in its internal and external parameters. It is established that the efficiency of the analysis as a whole is determined not only by the efficiency of the algorithms of each of the stages of calculation, but also by the consistency of the mathematical apparatus that underlies them. It is determined that the calculation of transients is reduced to a problem with initial conditions in which the values of dependent variables are set for the same value of the independent variable, namely time. It is determined that nonlinear dynamic systems whose models are built on the qualitative theory of general differential equations are the main tool for solving many practical problems. It is established that this is explained by the following factors: the presence of a well-developed analytical apparatus and numerous methods of solving general differential equations; transparency and naturalness of general differential equations as a mathematical model to describe the process of transition of real objects from one state to another for external and internal causes; The availability of public qualitative methods of studying decisions of general differential equations, in particular methods of evaluation of stability, analysis of behavior within special points and their asymptotic behavior. The circumstances that lead to the fact that the systems described by conventional differential equations are a methodically very convenient material to create general algorithms for the study of dynamic systems. A mathematical model of sensitivity to the initial conditions is constructed on the basis of heterogeneous differential equations of the first variation, which opens up opportunities for solving the basic problems of analysis, which are: calculation of *transitional processes and processes that have been established; Determination of static stability and calculation of parametric sensitivity, on the basis of a single algorithm for solving a two-point T-periodic marginal problem for conventional nonlinear differential equations.*

Keywords: nonlinear dynamic system, differential equation, periodic marginal problem, basket method.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Реальні фізичні системи, як правило, нелінійні. За своєю фізичною природою процеси в нелінійних системах складніші та багатогранніші ніж процеси в лінійних системах. Відповідно до цього аналіз нелінійних систем у математичному відношенні значно складніший у порівнянні з аналізом лінійних систем.

Основна властивість лінійної системи полягає в тому, що сума будь-яких двох її рішень є також її рішенням (принцип суперпозиції) та будь-яке рішення системи, помножене на константу також є її рішенням. Крім того, якщо лінійна система має періодичне рішення, то воно не може бути ізольованим. Тому рішення, помножене на будь-яку константу дає періодичне рішення.

В нелінійних системах може не виконуватися ні одна із зазначених властивостей. Дійсно, принцип суперпозиції не виконується і періодичні рішення можуть бути ізольовані.

Вчені з різних позицій досліджували та аналізували споріднені за своєю фізичною суттю явища у найрізноманітніших нелінійних системах, а також розглядали різні сторони цих явищ. В результаті створено значну кількість методів аналізу, які можуть бути об'єднані в групи, близькі за своєю основою, але різні за математичним оформленням.

Типовий підхід для побудови та аналізу моделі об'єкта можна представити у вигляді наступних етапів:

- аналіз процесу визначення елементарних явищ;
- створення фізичної моделі на основі опису елементарних явищ, тобто його теоретичний опис у фізичних термінах;
- представлення фізичної моделі у вигляді математичної;
- аналіз та дослідження математичної моделі;
- інтерпретація рішення у термінах фізичної моделі;
- порівняння результатів з процесом, що досліджується.

Для лінійних систем вказана методика майже повністю розроблена. У випадку нелінійних систем її розробку тільки розпочато.

Нелінійні завдання вимагають кінцевого закріплення ітераційної процедури, і зазвичай перевірки збіжності відповідної чисельної схеми, що звісно викликає певні труднощі при її вирішенні. Оскільки нелінійні задачі у своїй різноманітності мають досить значну подібність, фахівці з чисельного аналізу приклали чимало зусиль на розробку прийнятних методів розв'язання таких завдань.

Задачі аналізу нелінійних систем складаються: з розрахунку перехідних процесів і процесів, що встановилися; визначення статичної та динамічної стійкості знайдених процесів; розрахунку чутливості вихідних характеристик системи до зміни її внутрішніх та зовнішніх параметрів. Ефективність аналізу в цілому визначається не тільки ефективністю алгоритмів кожного з етапів розрахунку, а і узгодженістю математичного апарату, який лежить в їх основі.

Розрахунок перехідних процесів зводиться до задачі з початковими умовами, у яких значення залежних змінних задаються для одного і того ж значення незалежної змінної t, тобто часу. У деяких випадках доводиться вирішувати систему диференціальних рівнянь при наявності умов на значення залежних змінних, заданих для різних значень t. Подібна задача називається крайовою задачею. Методи вирішення крайових задач відрізняються від методів вирішення задач Коші.

У більшості нелінійних систем різної природи перехідні процеси мають асимптотично стійкий характер, тобто при $t \to \infty$ об'єкт переходить у певний стійкий стан. Іноді динамічний об'єкт має кілька стійких станів, тоді необхідно розрахувати декілька його статичних процесів. У зв'язку з цим важливою задачею аналізу є розрахунок статичного режиму та визначення його стійкості.

Статичний режим можна визначити, інтегруючи вихідну систему звичайних диференціальних рівнянь на достатньо великому інтервалі часу. Цей метод називається методом встановлення. Він надійний, але не завжди ефективний, так як вимагає багато часу для обчислення і у разі існування кількох статичних режимів призведе лише до одного з них.

Об'єкт та методи дослідження

Об'єктом досліджень є нелінійні динамічні системи. В ході розв'язання поставлених задач були використані основні положення загальної теорії диференціальних рівнянь.

Постановка завдання

Враховуючи актуальність питання завданням досліджень є розробка методу розв'язку нелінійних динамічних систем на основі єдиного математичного апарату – загальної теорії диференціальних рівнянь.

Результати та їх обговорення

Нехай фізичній системі відповідає система звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку, записана в нормальній формі, тобто у вигляді рівнянь першого порядку, вирішених відносно похідних:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X, t)\,, \tag{1}$$

де X – n-мірний вектор.

Для знаходження єдиного рішення систем з n диференціальних рівнянь першого порядку потрібно n граничних умов. Однак у більшості випадків використовують більш просту форму граничних умов. Обмежимося практично важливою проблемою визначення періодичних рішень системи (1). Обмежимо границі інтегрування (1) часовим відрізком $[t_1, t_2]$ і будемо вважати, що значення шуканих функцій відомі на межах відрізка тобто $x_i(t_1)$ і $x_i(t_2)$, $i = 1, 2, ..., n$. Такі крайові умови називаються граничними і мають вигляд:

$$x_i(t_1) = x_i(t_2)\,. \tag{2}$$

Серед безлічі крайових задач система нелінійних диференціальних рівнянь (1) та крайові умови (2) утворюють двоточкову крайову задачу. Якщо система (1) має періодичну вхідну функцію (наприклад, з періодом повторюваності T), тоді серед безлічі її рішень існують і T-періодичні. Така задача називається двоточковою T-періодичної крайової задачі, для якої граничні умови (2) записуються у вигляді співвідношення:

$$X(t) = X(t + T)\,, \tag{3}$$

або для $t = 0$

$$X(0) = X(T)\,. \tag{4}$$

Задачу (1), (4) можна вирішити методами Коші, якщо вдасться отримати достатню кількість крайових умов на одному з кінців відрізка інтегрування, наприклад, при заданому $X(0)$ знайти $X(T)$, тобто. якщо можна отримати n шуканих функцій $x_i(t)$ в точці $t = 0$ і $t = T$. Тому задача полягає у поетапному поліпшенні початкових граничних умов до тих пір, поки рішення не співпадуть. У цьому полягає сутність методу пристрілок [1].

Відомо декілька методів, які дозволяють уникнути інтегрування системи (1) протягом тривалого часу. Один з них, як показала практика, найефективніший і був використаний у [2]. Суть його полягає у тому, що інтегруючи систему (1) за деяких початкових умовах $X(0)$ протягом періоду, отримуємо вектор $X(T)$. Якщо система знаходиться в стаціонарному режимі, то $X(T) = X(0)$ та знайдене рішення є періодичним. Якщо ж ні, відзначаємо, що $X(T)$ є функцією $X(0)$ і визначаємо вектор помилок:

$$\varepsilon(X(0)) = X(0) - X(T)\,. \tag{5}$$

Необхідно знайти таке рішення, при якому цей вектор був рівний нулю. При такій постановці задачі початкові умови стають шуканими параметрами.

Такий підхід отримав назву методу чутливості до початкових умов на відміну від параметричної чутливості, коли досліджують зміни зовнішніх і внутрішніх параметрів системи на її вихідні характеристики.

Трансцендентна система (5) нелінійна відносно n змінних $X(0)$ і може бути вирішена методом ітерацій. Найбільш придатний для цього метод Ньютона, у відповідності якого на кожній ітерації початкові умови уточнюються за формулою:

$$X^{k+1}(0) = X^k(0) - (1 - W)^{-1}(X^k(0) - X(T))\,, \tag{6}$$

де k – індекс ітерації, а

$$W(x(0)) = \frac{\partial X(X(0,T))}{\partial X(0)} \tag{7}$$

– матриця чутливості змінних систем (1) до своїх початкових значень. Кожен рядок цієї матриці є градієнтом змінної в просторі початкових умов, а кожен її стовпчик характеризує чутливість всієї множини змінних до однієї початкової умови. Її отримують із співвідношення (5), де $\varepsilon(X(0))$ стає цільовою функцією, права частина якої при досягненні сталого процесу дорівнюватиме нулю, тобто:

$$\varepsilon(X(0)) = X(0) - X(T) = 0\,. \tag{8}$$

В результаті диференціювання (8) по $X(0)$ отримуємо:

$$\varepsilon'(X(0)) = 1 - \frac{\partial X(X(0,T))}{\partial X(0)} = 1 - W(X(0)) = 0\,, \tag{9}$$

де 1 – одинична матриця.

Елементи матриці (7) можна обчислити за допомогою різницевих формул, розв'язуючи задачу Коші та знаходячи цільову функцію (8) для однієї ітерації в загальній кількості $n+1$ разів. Через громіздкість та складність цей метод використовують рідко. Для цього зручніше використовувати диференціальні рівняння у варіаціях, які є результатом диференціювання системи (1) за початковими умовами $X(0)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X(X(0,T))}{\partial X(0)}=\frac{\partial F(X,t)}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial X(0)}\,. \tag{10}$$

Позначимо:

$$A(t)=\frac{\partial F(X,t)}{\partial X}\,. \tag{11}$$

Враховуючи (7) та (11), система диференціальних рівнянь першої варіації набуде вигляду:

$$\frac{dW(X)(0))}{dt}=A(t)\cdot W(X(0))\,. \tag{12}$$

Загальноприйняту систему варіаційних рівнянь (12) інтегрувати на періоді будь-яким чисельним методом разом з вихідною системою (1), тобто елементи матриці чутливості шукають разом з вектором X. При цьому порядок системи диференціальних рівнянь зростає вдвічі, що утруднює процес розрахунку нелінійних динамічних систем.

Через незалежність вхідної функції від початкових умов система варіаційних рівнянь (12) є однорідною системою лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Її доцільно вирішувати окремо на підставі представлення Флоке для фундаментальної системи розв'язків системи таких рівнянь у вигляді добутку періодичної матриці періоду T та матричного рішення деякої системи з постійними коефіцієнтами. Підставою цього є теорема [3].

Теорема. Якщо $W(t)$ – фундаментальна система рішення системи диференціальних рівнянь то матриця $W(t+T)$. також є фундаментальною системою рішень. Для кожної такої фундаментальної системи $W(t)$ існує неособлива періодична матриця $D(t)$ періоду T і постійна матриця B.

$$W(t)=D(t)e^{-tB}\,. \tag{13}$$

Підбираємо таку постійну матрицю B, щоб матриця $W(t)=D(t)e^{-tB}$ для системи рівнянь (12) була T-періодична, тобто

$$W(t)\cdot e^{-tB}=W(t+T)\cdot e^{(t+T)B}=W(t+T)\cdot e^{-tB}\cdot e^{-TB}\,. \tag{14}$$

Поділивши обидві частини (14) на e^{-tB} отримаємо:

$$W(t)=D(t)e^{-TB}\,. \tag{15}$$

Початкові умови для варіаційних рівнянь (12) знайдемо з (9). При $t=0$ маємо:

$$W(0)=1 \tag{16}$$

та умову періодичності можна записати так:

$$W(0)=W(T)\cdot e^{-TB}\,. \tag{17}$$

Підставивши формули (16) і (17), отримаємо

$$W(T)=e^{-TB}\,. \tag{18}$$

Для визначення матриці прологарифмуємо вираз (18):

$$B=1/T\cdot\ln(W(T))\,. \tag{19}$$

Наслідком теорема Флоке є існування принаймні одного рішення рівняння (12) такого, що:

$$W(X(0),t)=W(X(0),t+T)\,.$$

Тобто якщо функція $F(X,t)$ періодична по t з періодом T, то рішення вирішення варіаційного рівняння також періодичне з тим самим періодом.

Ляпунов А.М. у своїй роботі «Загальна задача про стійкість руху» обґрунтував доцільність дослідження стійкості розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь на основі їх лінійних варіаційних рівнянь. Про це свідчить наступна його теорема, доказ якої міститься у [3].

Теорема. Якщо – $X(t)$ періодичне рішення системи (1) періоду T і функція $F(X,t)$ періодична з тим самим періодом, а характеристичні показники варіаційного рівняння (12) мають від’ємні дійсні частини, то $X(t)$ – асимптотично стійке рішення систем (1). Якщо хоча б один характеристичний показник системи (12) має додатну дійсну частину, то $X(t)$ нестійке рішення.

Отже, стійкість періодичного рішення визначатимемо виходячи з рівнянь першої варіації – моделі чутливості до зміни початкових умов. Для того щоб всі рішення (12) прямували до нуля при $t\to\infty$, необхідно і достатньо, щоб усі власні значення матриці B відповідно до (19) мали від’ємну дійсну частину, тобто, щоб усі власні значення матриці $W(X(0),T)$ були по модулю менше одиниці. Власні значення матриці W називають мультиплікаторами. Мультиплікатори не залежать від вибору початкового моменту часу t_0.

Математичне моделювання динамічних систем зводиться до розв'язання групи задач, які належать до задач синтезу або до задач аналізу.

Аналіз системи – вивчення її властивостей. Під час аналізу не створюються нові об'єкти, а досліджуються задані.

Синтез систем націлений на створення нових варіантів об'єкта, а аналіз використовується з метою оцінки цих варіантів. Задача синтезу зазвичай зводиться до багаторазового розв'язання задачі аналізу з наступним перебором її розв'язків.

Отже, синтез та аналіз виступають у процесі проектування у діалектичній єдності.

Як було сказано на початку статті, задачі аналізу включають в себе розрахунок перехідних процесів і процесів, що встановилися та оцінку стійкості отриманих рішень і аналіз параметричної чутливості. Для вирішення кожної задачі використовують абсолютно різний математичний апарат. Задача аналізу перехідних процесів – це завдання Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Аналіз процесів, що встановилися, здійснювався у часовій області методами гармонічного балансу, колокації тощо. Статична стійкість визначалась на підставі алгебраїчних критеріїв. Аналіз чутливості виконувався складними, в алгоритмічному відношенні, методами, тобто методом приросту, варіаційним методом, регресивним методом тощо.

Модель чутливості до початкових умов дозволяє об'єднати вирішення всіх чотирьох задач аналізу на основі схожого математичного апарату і звести їх до вирішення двоточкової T -періодичної крайової задачі.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

1. Нелінійні динамічні системи, моделі яких побудовано на якісній теорії загальних диференціальних рівнянь, є основним інструментом вирішення багатьох практичних задач. Пояснюється це такими факторами:

- наявністю добре розвиненого аналітичного апарату та чисельних методів розв'язання загальних диференціальних рівнянь;
- прозорістю та природністю загальних диференціальних рівнянь як математичної моделі для опису процесу переходу реальних об'єктів з одного стану до іншого під дією зовнішніх та внутрішніх причин;
- наявністю загальнодоступних якісних методів дослідження рішень загальних диференціальних рівнянь, зокрема методів оцінки стійкості, аналізу поведінки рішень в межах особливих точок та їх асимптотичної поведінки.

2. Зазначені обставини призводять до того, що системи, що описуються звичайними диференціальними рівняннями, є методично дуже зручним матеріалом для створення загальних алгоритмів дослідження динамічних систем.

3. Математична модель чутливості до початкових умов, побудована на неоднорідних диференціальних рівняннях першої варіації, відкриває можливості для вирішення основних задач аналізу, якими є розрахунок перехідних процесів та процесів, що встановилися, визначення статичної стійкості та розрахунок параметричної чутливості, на основі єдиного алгоритму вирішення двоточкової T-періодичної крайової задачі для звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.

Література

1. Холл Дж., Уатт Дж. Современные многочисленное методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во «Мир». 1999. 311 с.
2. Aprille T.I., Trick T.N. A computer algorithm to determine the steady - state response of non linear oscialators. IEEE, Trance. Circuit Theory. 1972. Vol. CT–19. P. 354–360.
3. Коддингатон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во «Мир». 1995. 395 с.

References

1. Holl Dzh., Uatt Dzh. Sovremennye mnogochislennoe metody reshenija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M. : Izd-vo «Mir». 1999. 311 s.
2. Aprille T.I., Trick T.N. A computer algorithm to determine the steady - state response of non linear oscialators. IEEE, Trance. Circuit Theory. 1972. Vol. CT–19. P. 354–360.
3. Koddingaton Je.A., Levinson N. Teorija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M. : Izd-vo «Mir». 1995. 395 s.