

КИРИЦЯ І. Ю.

Вінницький національний технічний університет

<https://orcid.org/0000-0002-8280-5552>e-mail: [kyrytsya@vntu.edu.ua](mailto:kyrytsya@vntu.edu.ua)

## ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІ КРИТЕРІЇ РУЙНУВАННЯ

В роботі виконано огляд відомих критеріїв деформовності, які отримали поширення для оцінки ймовірності руйнування як при монотонній, так і при немонотонній пластичній деформації.

Найбільшого застосування набули методи оцінки пластичності, в яких залежність пластичності від схеми напруженого стану описується діаграмами пластичності. Діаграма пластичності являє собою експериментальну залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану. В більшості робіт ця залежність представлена плоскою кривою.

Загальним недоліком відомих критеріїв деформовності є те, що вплив схеми напруженого стану на пластичність описується діаграмою пластичності, а вплив історії навантаження – плоскими траєкторіями.

Ключові слова: теорія деформовності, критерій деформовності (руйнування), використаний ресурс пластичності, гранична деформація, напружений стан, обробка тиском, пластична деформація.

Inna KYRYTSYA

Vinnytsia national technical University

## PHENOMENOLOGICAL CRITERIA OF DESTRUCTION

The paper reviews the known deformability criteria, which have become widespread to assess the probability of failure in both monotonic and nonmonotonic plastic deformation.

The most widely used methods of assessing plasticity, in which the dependence of plasticity on the stress state scheme is described by plasticity diagrams. The plasticity diagram is an experimental dependence of the ultimate deformation on the stiffness index of the stress state. In most works, this dependence is represented by a flat curve.

The plasticity of metals depends on many factors, namely the nature of the metal and the thermomechanical parameters of the process. With cold plastic deformation, the main factor influencing plasticity is the stress state and the law of its change during loading.

To quantify the impact of stress state on the probability of failure using failure criteria. Under the destruction is understood the appearance of macrocracks, which leads to irreparable damage to the product.

A common disadvantage of the known deformation criteria, which are common to assess the probability of failure in both monotonic and nonmonotonic plastic deformation is that the subintegral functions of these criteria are based on the hypothesis that the effect of stress state on plasticity is described by the plasticity diagram and the influence of load history - flat trajectories.

Due to the fact that the plasticity diagrams cover a rather narrow class of stress states, in applied theories of deformability there is no single approach to estimating the value of the used plasticity resource in the processes of metal forming.

From the performed research it follows that at present there are almost very few works in which the dependence of plasticity on the history of loading is described by spatial trajectories. Therefore, the question of the destruction criteria remains open and relevant.

Keywords: deformability theory, deformability criterion (destruction criterion), used plasticity resource, ultimate deformation, stress state, pressure treatment, plastic deformation.

### Постановка проблеми у загальному вигляді

#### та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Методи оцінки деформовності заготовок в процесах обробки тиском базуються на феноменологічній теорії деформовності, перевага якої перед іншими теоріями руйнування полягає в тому, що вона враховує вплив історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень. Теорія деформовності дозволяє також одержати кількісну оцінку впливу параметрів технологічного процесу на ймовірність руйнування і, на основі цього, раціонально використати резерви пластичності.

Пластичність металів залежить від багатьох факторів, а саме: від природи металу та термомеханічних параметрів процесу. При холодній пластичній деформації основним фактором, який впливає на пластичність, є напружений стан і закон його зміни в процесі навантаження.

Для кількісної оцінки впливу напруженого стану на ймовірність руйнування використовують **критерій руйнування**. Під руйнуванням будемо розуміти появу макротріщини, яка приводить до непоправного браку виробу.

### Формулювання цілей статті

Метою роботи є проведення аналізу відомих критеріїв деформовності (руйнування), які отримали поширення для оцінки ймовірності руйнування як при монотонній, так і при немонотонній пластичній деформації, визначення переваг та недоліків існуючих критеріїв та особливостей їх застосування.

### Виклад основного матеріалу

В класичних теоріях міцності для оцінки граничного стану використовують, в основному, критерій руйнування, в яких накладаються обмеження на напруження. Таким є, наприклад, критерій Шлейхера-Надаї, згідно якого інтенсивність дотичних напружень  $T$  при руйнуванні є визначеною для даного матеріалу функцією середнього напруження  $\sigma$

$$T = f(\sigma) \tag{1}$$

Якщо виходити із гіпотези єдиної кривої течії в координатах  $\sigma_u - e_u$ , то із умови (1) витікає, що гранична деформація  $e_p$  для даного матеріалу не залежить від історії навантаження. З фізичної точки зору перевага критерію (1) в тому, що він враховує подвійний характер руйнування, оскільки одночасно враховується вплив інваріантів дотичних і нормальних напружень. В залежності від виду функції  $f(\sigma)$  можна отримати різні формули граничних поверхонь, які більш достовірно описують ймовірність руйнування.

Близьким є підхід Давіденкова-Фрідмана, в якому враховується експериментально установленний факт, що в залежності від умов навантаження один і той же матеріал може руйнуватися і шляхом відриву, і шляхом зсуву. Тобто при фіксованій температурі і швидкості навантаження руйнування має двоїстий характер. Самий простий спосіб врахування такої двоїстості полягає в одночасному врахуванні дотичних і нормальних напружень. Я. Б. Фрідман з цією метою вводить показник

$$\alpha_1 = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}^{прив}}, \tag{2}$$

де  $\tau_{max}$  – максимальне дотичне напруження;

$\sigma_{max}^{прив}$  – максимальне значення приведенного нормального напруження розтягу, вирахованого по другій теорії міцності.

Тому формулу (2) можна переписати у вигляді

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sigma_1 - 2\mu(\sigma_2 + \sigma_3)},$$

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

Недоліком цього підходу є те, що показник  $\alpha_1$  неоднозначно описує напружений стан, крім того, теорія Я. Б. Фрідмана не враховує вплив історії навантаження на пластичність.

Останнім часом розвиваються критерії руйнування, в яких накладаються обмеження на деформації. Наприклад, для формулювання умови локального руйнування у вершині тріщини використано двопараметричний критерій руйнування. Відповідно умова локального руйнування у вершині тріщини має вид

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(r) = \left( \chi + \frac{1-\chi}{m} \right)^{-\frac{1}{n}} = e_p \text{ при } r = \rho_c \tag{3}$$

де  $m = \left[ (1 + \alpha + \beta)^2 - 3(\alpha + \beta + \alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \right]$

$n$  – показник степені деформаційного зміцнення,

$\alpha = \sigma_2/\sigma_1, \beta = \sigma_3/\sigma_1,$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження в межах пластичної зони перед тріщиною,

$\chi$  – стала, яка враховує величину крихкості матеріалу,

$\rho_c$  – відстань від вершини тріщини.

Для крихкого матеріалу  $\rho_c$  може корелювати з розміром зерна, відстанню між ферітними прошарками, неметалевими включеннями і ін. При в'язкому руйнуванні величина  $\rho_c$  може бути пов'язана з відстанню між порами або включеннями.

Таким чином критерій (3) враховує вид напруженого стану в вершині тріщини, інтенсивність зміцнення, крихкість матеріалу. В критерії (3) практично не враховується вплив законів зміни показників напруженого стану  $\alpha$  і  $\beta$  на величину граничної деформації  $e_p$ .

Близьким є підхід Г. А. Смірнова-Аляєва

$$\psi = \frac{e_u}{e_p(\eta)}, \tag{4}$$

де  $\psi$  – використаний ресурс пластичності, який при деформуванні без руйнування менше одиниці. При руйнуванні  $\psi = 1$ ,

$$e_u = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u d\tau \text{ – ступінь деформації,}$$

$e_p(\eta)$  – діаграма пластичності.

При оцінці величини граничної деформації за критерієм (4) історія деформування не враховується, а граничну деформацію  $e_p$ , при якій має місце руйнування, визначають по діаграмі пластичності  $e_p(\eta)$  за відомим значенням  $\eta$ . Такий підхід в окремих випадках може привести до значних похибок, до 30% і більше.

Критерій руйнування В. Л. Колмогорова має більш фундаментальне фізичне обґрунтування. При його розробці використано гіпотезу про пропорційну залежність між інтенсивністю накопичення пошкоджень і приростом ступені деформації. Дана гіпотеза запропонована В. В. Новожиловим і отримала експериментальне підтвердження для монотонного навантаження. Умова руйнування по В. Л. Колмогорову записується в вигляді

$$\psi = \int_0^{t_p} B(\tau) \frac{\dot{\varepsilon}_u}{e_p(\eta(\tau))} d\tau = 1, \quad (5)$$

де  $B(\tau)$  – величина, яка описує швидкість розвитку тріщин і їх заліковування при холодній пластичній деформації.

Використання критерію В. Л. Колмогорова в формі (5) практично неможливе, так як в літературі не приводяться дані про коефіцієнт  $B(\tau)$ . Тому цей коефіцієнт приймають рівним одиниці. Тоді при простому навантаженні ( $\eta = const$ ) критерій (5) співпадає з (4). Необхідно також відмітити, що критерій (5) аналогічний критерію А. А. Ільющина

$$\int_0^{t_p} \frac{d\tau}{t_r(\sigma(\tau))} = 1, \quad (6)$$

де  $t_r(\sigma)$  – час руйнування зразка в умовах повзучості (при сталому напруженні  $\sigma$ ),  
 $t_p$  – час деформування до руйнування.

Критерій (6) побудований на основі гіпотези про справедливість лінійного закону накопичення пошкоджень при повзучості і не враховує впливу історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень.

Г. Д. Дель, В. А. Огородніков і В. Г. Нахайчук, виходячи із гіпотези про нелінійний закон накопичення пошкоджень при пластичній деформації одержали критерій руйнування

$$\psi = \int_0^{e_p} n \frac{e_u^{n-1}}{e_p(\eta)^n} de_u = 1, \quad (7)$$

$$\text{де } n = 1 + a \frac{d\eta}{de_u}. \quad (8)$$

Константа  $a$  для досліджених матеріалів виявилась рівною 0,2.

Експериментальна перевірка показала, що для шляхів деформування середньої і великої кривизни критерій (7) практично непридатний. Тому залежність (8) була уточнена В. А. Огородніковим і рівняння (8) замінено наступним [1]

$$n = 1 + a \cdot \operatorname{arctg} \frac{d\eta}{de_u}. \quad (9)$$

Критерій (7) враховує вплив історії навантаження, а також нелінійність залежності між приростом ступені деформації  $e_u$  і густиною пошкоджень. При  $\eta = const$  ( $d\eta/de_u = 0$ ), критерій (7) співпадає з (5) і розрахунки граничних деформацій дають однакові результати. Для складних навантажень похибка при розрахунках по критерію (5) перевищує 20%. Тому при складному монотонному навантаженні для оцінки ймовірності руйнування необхідно надати перевагу критерію (7).

Теорія деформовності, в основу якої покладена модель накопичення пошкоджень відповідно до критерію (7), отримала подальший розвиток в роботах О. О. Розенберга, присвячених оптимізації процесів деформуючого протягування та комбінованих процесів протяжки зі згином трубних заготовок. Використання гіпотез, покладених в основу критерію (7), виправдано, так як в більшості схем формозмінення має місце плоский напружений стан, тому вплив об'ємності напруженого стану незначний.

У випадку немонотонного навантаження механізм накопичення і заліковування дефектів суттєво змінюється. Розглянуті вище критерії не враховують особливостей процесу накопичення пошкоджень при немонотонній деформації і не можуть бути використані для оцінки пластичності в процесах з немонотонним

навантаженням.

Для кількісної оцінки впливу немонотонної деформації на пластичність С. Менсон виходячи із результатів експериментальних досліджень, запропонував рівняння, яке описує залежність між числом циклів  $N$  і розмахом (амплітудою) пластичної деформації в циклі  $\Delta e_u$

$$\Delta e_u N^a = c, \tag{10}$$

де  $a, c$  – сталі, які залежать від властивостей матеріалу.

Вважаючи, що інтенсивність пластичного розсіювання на будь-якому етапі знакозмінної деформації не залежить від попередньої деформації А. А. Богатов запропонував використаний за  $n$  етапів знакозмінного деформування ресурс пластичності визначати підсумовуванням. При цьому на кожному  $i$ -му етапі використаний запас пластичності визначається формулою

$$\psi = \sum_{i=1}^n \int_0^{e_{ui}} \frac{ae_u^{a-1}}{e_p^a} de_u. \tag{11}$$

Підінтегральний вираз в (11) отримано раніше Г. Д. Делем та В. А. Огородніковим, виходячи із уявлень про степеневу залежність між накопиченою пластичною деформацією і пластичним розсіюванням. Величина  $a$  залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу і умов деформування. Для жорстких схем напруженого стану  $a = 3$ , а при усебічному стиску  $a$  наближається до одиниці.

В умові (11) за межу пластичності прийнята скалярна величина, тому ця умова не враховує направлено характеру пошкоджень і не описує анізотропію пластичності деформованого металу, із умови не впливає здатність тіл, зруйнованих при одному напруженому стані (наприклад, при розтягу), підлягати наступним значним деформаціям при іншому напруженому стані (наприклад, при стиску). Крім того, при знакозмінному навантаженні умова (11) не враховує впливу величин амплітуд деформацій, що безумовно призведе до помилок при розрахунках використаного ресурсу пластичності.

В зв'язку з цим, останнім часом набула розвитку тензорна модель накопичення пошкоджень при немонотонній деформації. Так як пошкодження є функціоналами трьохмірних тензорів напружень, то вони можуть бути тільки трьохмірними тензорами або сукупністю тензорів деяких порядків. Найпростіший варіант теорії накопичення пошкоджень макрочастинки будується в припущенні, що процес накопичення пошкоджень описується симетричним тензором другого рангу. Ідея О. А. Ільюшина отримала розвиток в роботах Г. Д. Деля, І. А. Кийко, А. А. Мішуліна і В. М. Михалевича. В якості міри пошкоджень в названих роботах прийнято другий інваріант девіатора пошкоджень  $\psi_{ij}$ , який будується як функціонал, що залежить від тензора прирощень деформацій, схеми напруженого стану і фізико-механічних властивостей матеріалу.

Г. Д. Дель, вважає, що руйнування з'являється тоді, коли деяка функція інваріантів тензора  $\psi_{ij}$  досягає певного визначеного значення. Перший інваріант цього тензора дорівнює нулю. Нехтуючи впливом третього інваріанта, Г. Д. Дель записав умову руйнування у вигляді [2]

$$\psi_{ij}\psi_{ij} = 1. \tag{12}$$

Г. Д. Дель розробив тензорно-лінійну модель накопичення пошкоджень, згідно якої компоненти тензора пошкоджень визначаються формулою [3, 4]

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} F(e_u, \eta, \mu) \beta_{ij} de_u, \tag{13}$$

де  $\beta_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{de_u}$  – компоненти направляючого тензора прирощень деформацій,

$F(e_u, \eta, \mu)$  – функція, яка визначається механічними властивостями матеріалу,  $F = \frac{d\varphi}{de_u}$ , а

функція  $\varphi$  вибрана у вигляді

$$\varphi = (1 - a) \frac{e_u}{e_p} + a \left( \frac{e_u}{e_p} \right)^2, \tag{14}$$

де  $a$  коефіцієнт прийнятий рівним 0,5.

А. А. Мишуліним і В. М. Михалевичем розроблена тензорно-нелінійна модель накопичення пошкоджень, яка являється узагальненням розглянутого вище варіанту лінійної моделі. Виходячи із

загального зв'язку між двома тензорами, розглянутого О. А. Ільюшиним, в роботі одержано наступний вираз для компонент девіатора пошкоджень

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} \left( A\beta_{ij} + B \left( \beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right) \right) de_u, \quad (15)$$

де  $A$  і  $B$  деякі функції.

Якщо в межах окремих етапів деформація являється простою ( $\beta_{ij} = \text{const}$ ), вираз (15) перетворюється до виду

$$\psi_{ij} = a\beta_{ij} + b \left( \beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right), \quad (16)$$

де  $a$  і  $b$  – первісні функції  $A$  і  $B$ , які виражаються через монотонно зростаючу функцію накопичення пошкоджень

$$\varphi = (1 - c) \frac{e_u}{e_p} + c \left( \frac{e_u}{e_p} \right)^2. \quad (17)$$

Особливістю розглянутих вище методів є те, що в основу критеріїв ((4),(5),(7),(11)) покладена гіпотеза про те, що залежність пластичності металів від схеми напруженого стану описується діаграмою пластичності  $e_p(\eta)$ . Такий же недолік характерний і для критеріїв, які описують немонотонне деформування, так як для апроксимацій функцій пошкоджень, які є первісними підінтегральних виразів в критеріях (13),(15), також використана діаграма пластичності (14), (17).

Із результатів досліджень останніх років витікає, що при об'ємному напруженому стані, а також в деяких випадках плоского напруженого стану, значення граничної деформації  $e_p$  виявляються різними для схем, які характеризуються одним і тим же значенням показника напруженого стану  $\eta$ .

Більшість дослідників вважають, що для характеристики експериментальної залежності пластичності від напруженого стану необхідно використовувати не менше двох показників напруженого стану.

В. А. Огородніков [1] вперше висунув гіпотезу про те, що на пластичність впливає третій інваріант тензора напружень  $I_3(T_\sigma)$ . Для кількісної оцінки цього впливу ним введено показник напруженого стану, який характеризує залежність пластичності від третього інваріанта тензора напружень і відрізняється від нуля тільки при об'ємному напруженому стані, що підтверджено в роботі [5]

$$\chi = \frac{\sqrt{I_3(T_\sigma)}}{\sqrt{3I_2(D_\sigma)}}. \quad (18)$$

В роботі [6] запропоновано будувати діаграми пластичності в координатах  $e_p - \eta - \chi$ , а значення граничних накопичених деформацій розраховувати за допомогою критерію, що враховує вплив інваріантів тензора і девіаторів напружень:

$$\psi = \int_0^{e_u^*} (1 + f) \frac{e_u^f de_u}{e_p^*[\eta(e_u)]^{1+f}} \leq 1, \quad (19)$$

де  $f = 0.2 \arctg \left( \frac{d\eta}{de_u} + \frac{d\chi}{de_u} \right)$ , а  $\frac{d\eta}{de_u}$  і  $\frac{d\chi}{de_u}$  – швидкості їх зміни.

В роботах рекомендують в якості другого показника напруженого стану використовувати параметр Надаї-Лоде по напруженнях  $\mu_\sigma$ . Експериментальні залежності  $e_p$  від  $\eta$  при фіксованих значеннях  $\mu_\sigma$  одержані А. А. Богатовим, С. В. Смірновим, а також Ю. Б. Важенцевим, В. В. Ісасвим. Гранична деформація  $e_p$  при об'ємному напруженому стані залежить від двох показників  $\eta$  і  $\mu_\sigma$ .

Існує характерний недолік і для критеріїв, які описують немонотонне навантаження (13),(15), оскільки апроксимуючі функції (первісні підінтегральних функціоналів в критеріях (14),(17)) базуються на діаграмі пластичності. Це зумовлено тим, що явної залежності накопиченої до моменту руйнування деформації  $e_p$  від показників  $\eta$  і  $\mu_\sigma$  або інших еквівалентних їм безрозмірних характеристик напруженого стану в даний час не одержано.

Проте, І. О. Сиваком в роботі [7, 8] було запропоновано проводити оцінку використаного ресурсу пластичності  $\Psi$  за формулою

$$\Psi = \int_0^{e_u} \frac{de_u}{e_p(\eta, \mu_\sigma)}, \quad (20)$$

де  $e_p(\eta, \mu_\sigma)$  – поверхня граничних деформацій.

Використання поверхонь граничних деформацій для оцінки використаного ресурсу пластичності дозволило врахувати об'ємність схеми напруженого стану.

Феноменологічний підхід створює перспективи щодо побудови діаграми пластичності з використанням нового показника напруженого стану, запропонованого О. В. Грушко [9]. Даний показник використовується в якості аргументу діаграми пластичності

$$\xi = \frac{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3}{\sigma_i} = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 \quad (21)$$

де  $a_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_i}$ ,  $a_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_i}$ ,  $a_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_i}$  – відносні головні напруження,  $k_1, k_2, k_3$  – коефіцієнти впливу

відносного головного напруження на пластичність металу.

Встановлено, що вплив головних нормальних напружень є неоднаковим щодо накопичення пошкоджень в матеріалі, який пластично деформується. Причому, даний вплив залежить від виду матеріалу, що дає можливість формування моделі пластичності, зокрема для матеріалів з різною реологією.

Діаграма пластичності  $e_p(\xi)$  описується експоненціальними функціями і має суттєво кращу

кореляцію з експериментом, ніж традиційна діаграма пластичності  $e_p(\eta)$ .

$$e_p = d \cdot \exp(-q \cdot \xi) = d \cdot \exp\left(-q \cdot (a_1 + \bar{k}_2 a_2 + \bar{k}_3 a_3)\right), \quad (22)$$

де  $\bar{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}$ ,  $\bar{k}_3 = \frac{k_3}{k_1}$  – коефіцієнти впливу відносного головного напруження, які виражені в

частках стосовно коефіцієнта  $k_1$  першого головного напруження  $a_1$ .

Незручність використання показника  $\xi$  полягає в його унікальності для кожного матеріалу, що робить неможливим порівняння діаграм  $e_p(\xi)$  для різних металів на одному рисунку, на відміну від звичайної діаграми пластичності.

В основі сучасної теорії деформовності лежить гіпотеза про залежність пластичності від схеми напруженого стану, яка описується діаграмою пластичності. Діаграми пластичності в більшості теорій описують експериментальну залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану. Однак в останніх роботах В. А. Огороднікова, А. А. Богатова, Ю. Г. Важенцева, С. В. Смірнова показано, що залежність пластичності від схеми напруженого стану характеризується, як мінімум, двома показниками напруженого стану. В. А. Огородніков вважав, що при об'ємному напруженому стані необхідно враховувати вплив на пластичність третього інваріанта тензора напружень. Такий підхід дозволив отримати позитивні результати при розробці ряду процесів обробки тиском, які реалізуються в умовах об'ємного напруженого стану.

Для оцінки деформовності заготовок і для технологічного забезпечення якості готових виробів необхідна інформація про історію деформування кожної матеріальної частинки в об'ємі заготовки.

### Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Загальним недоліком відомих критеріїв деформовності, які отримали поширення для оцінки ймовірності руйнування як при монотонній, так і при немонотонній пластичній деформації є те, що підінтегральні функції цих критеріїв базуються на гіпотезі про те, що вплив схеми напруженого стану на пластичність описується діаграмою пластичності, а вплив історії навантаження – плоскими траєкторіями.

В зв'язку з тим, що діаграми пластичності охоплюють досить вузький клас напружених станів, в прикладних теоріях деформовності відсутній єдиний підхід до оцінки величини використаного ресурсу пластичності в процесах обробки металів тиском.

З приведенного вище огляду виконаних досліджень випливає, що в даний час практично дуже мало робіт, в яких залежність пластичності від історії навантаження описується просторовими траєкторіями. Тому питання про критерії руйнування залишається відкритим та актуальним.

### Література

1. Огородніков В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В. А. Огородніков. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 175 с.
2. Дель Г.Д. Технологическая механика / Г. Д. Дель. – М. : Машиностроение, 1978. – 174 с.

3. Del G. D. Plasticity of metal subjected to complex loading / Del G. D., Ogorodnikov V. A., Spiridonov L. K. // *Izv. Uchebn. Zaved. «Mashinostr.»*. – 1974. – № 12. – P. 22–26.
4. Dell H. Crach FEM–A Comprehensive Approach For The Prediction Of Sheet Metal Failure / H. Dell, H. Gese, G. Oberhofer // *AIP Conference Proceedings*. – 2007. – V. 908, May 17. – P. 165–170.
5. Огородніков В. А. Механіка процесів холодного пластичного деформування вісесиметричних заготовок з глухим отвором : [монографія] / В. А. Огородніков, І. Ю. Кириця, В. С. Перлов. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 164 с.
6. Огородніков В. А. Энергия. Деформация. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы) : [монографія] / В. А. Огородніков, В. Б. Киселев, И. О. Сивак. – В. : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. – 204 с.
7. Сивак И. О. Поверхность предельной пластичности / И. О. Сивак // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні та металургії. – Краматорськ : ДДМА, 1999. – С. 9–15.
8. Сивак И. О. Пластичность металлов при объемном напряженном состоянии / И. О. Сивак, К. И. Коцюбивская // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні : зб. наук. праць. – Краматорськ, 2007. – С. 74–76.
9. Грушко А.В. Карты материалов в холодной обработке давлением : монографія / А. В. Грушко. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 348 с.

#### References

1. Ogorodnikov V. A. Ocenka deformiruemosti metallov pri obrabotke davleniem / V. A. Ogorodnikov. – К. : Vishha shkola. Golovnoe izd-vo, 1983. – 175 s.
2. Del' G.D. Tehnologicheskaja mehanika / G. D. Del'. – М. : Mashinostroenie, 1978. – 174 s.
3. Del G. D. Plasticity of metal subjected to complex loading / Del G. D., Ogorodnikov V. A., Spiridonov L. K. // *Izv. Uchebn. Zaved. «Mashinostr.»*. – 1974. – № 12. – P. 22–26.
4. Dell H. Crach FEM–A Comprehensive Approach For The Prediction Of Sheet Metal Failure / H. Dell, H. Gese, G. Oberhofer // *AIP Conference Proceedings*. – 2007. – V. 908, May 17. – P. 165–170..
5. Ogorodnikov V. A. Mekhanika protsesiv kholodnoho plastychnoho deformuvannia visesymetrychnykh zahotovok z hlukhym otvorom : [monohrafiia] / V. A. Ogorodnikov, I. Yu. Kyrytsia, V. Ye. Perlov. – Vinnytsia : VNTU, 2015. – 164 s.
6. Ogorodnikov V. A. Jenergija. Deformacija. Razrushenie (zadachi avtotehnicheskoi jekspertizy) : [monografija] / V. A. Ogorodnikov, V. B. Kiselev, I. O. Sivak. – V. : UNIVERSUM – Vinnicja, 2005. – 204 s.
7. Sivak I. O. Poverhnost' predel'noj plastichnosti / I. O. Sivak // Udoskonalennja procesiv ta obladnannja obrobki tiskom u mashinobuduvanni ta metalurgii. – Kramators'k : DDMA, 1999. – S. 9–15.
8. Sivak I. O. Plastichnost' metallov pri ob#emnom naprjazhenom sostojanii / I. O. Sivak, K. I. Kocjubivskaja // Udoskonalennja procesiv i obladnannja obrobki tiskom v metalurgii i mashinobuduvanni : zb. nauk. prac'. – Kramators'k, 2007. – S. 74–76.
9. Grushko A.V. Karty materialov v holodnoj obrabotke davleniem : monografija / A. V. Grushko. – Vinnica : VNTU, 2015. – 348 s.