DOI 10.31891/2307-5732-2022-309-3-7-12
УДК 004.94+519.218

ФРИЗ М. Є.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
https://orcid.org/0000-0002-8720-6479
e-mail: mykh.fryz@gmail.com
МЛИНКО Б. Б.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
https://orcid.org/0000-0003-0780-5365
e-mail: b.mlynko@gmail.com

УМОВНІ ЛІНІЙНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Умовні лінійні випадкові процеси з неперервним часом зображаються у вигляді стохастичного інтеграла від випадкового ядра за процесом із незалежними приростами. Такі процеси використовуються в задачах математичного та комп'ютерного моделювання, опрацювання стохастичних сигналів, фізична природа породження яких допускає їх представлення у вигляді суми великого числа випадкових імпульсів, які виникають у пуассонівські моменти часу. Імпульси при цьому є стохастично залежними функціями, на відміну від іншої поширеної математичної моделі – лінійного випадкового процесу, який має подібну структуру, але являє собою суму великого числа незалежних випадкових імпульсів, що виникають у пуассонівські моменти часу. Прикладними областями, де є поширеними згадані моделі є математичне, комп'ютерне моделювання та опрацювання електроенцефалографічних сигналів, кардіосигналів, процесів ресурсоспоживання, радіолокаційних сигналів та ін.

У даній роботі наведено означення умовного лінійного випадкового процесу (УЛВП) з дискретним часом, показано його зв'язок із відповідною моделлю з неперервним часом. Відповідно до наведеного означення УЛВП із дискретним часом можна трактувати як відгук лінійного цифрового фільтра з випадковими параметрами на вплив білого шуму з безмежно подільним розподілом. Проведено аналіз моментних функцій першого і другого порядку УЛВП із дискретним часом, зокрема, отримано вирази для його математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції.

Результати можуть бути використані для дослідження ймовірнісних характеристик досліджуваних інформаційних стохастичних сигналів, які для конкретних прикладних задач будуть залежати від властивостей відповідного ядра та породжуючого білого шуму в зображенні УЛВП. Зокрема, в роботі наведено умови, яким повинні задовольняти складові УЛВП із дискретним часом для того, щоб цей процес був стаціонарним у широкому розумінні.

Ключові слова: математична модель, умовний лінійний випадковий процес, математичне сподівання, кореляційна функція, ядро, білий шум, стаціонарний процес.

Mykhailo FRYZ, Bogdana MLYNKO
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

DISCRETE-TIME CONDITIONAL LINEAR RANDOM PROCESSES AND THEIR PROPERTIES

Continuous-time conditional linear random process is represented as a stochastic integral of a random kernel driven by a process with independent increments. Such processes are used in the problems of mathematical modelling, computer simulation, and processing of stochastic signals, the physical nature of which generates them to be represented as the sum of many random impulses that occur at Poisson moments. Impulses are stochastically dependent functions, in contrast to another well-known mathematical model which is a linear random process, that has a similar structure but is represented as the sum of a large amount of independent random impulses that occur at Poisson moments of time. The application areas of these models are mathematical modelling, computer simulation, and processing of electroencephalographic signals, cardio signals, resource consumption processes (such as electricity consumption, water consumption, gas consumption), radar signals, etc.

A discrete-time conditional linear random process has been defined in the paper, the relationships with corresponding continuous-time model has been shown. According to the given definition the discrete-time conditional linear random process can be considered as an output of linear digital filter with random parameters on the input of the white noise which is infinitely divisible distributed. Moment functions of first and second order have been analyzed. In particular, the expressions for mathematical expectation, variance and covariance function have been obtained.

The results can be utilized to study the probabilistic characteristics of the investigated information stochastic signals, which will depend on the properties of the corresponding kernel and white noise. In particular, the conditions for the process to be wide-sense stationary have been represented.

Keywords: mathematical model, conditional linear random process, mathematical expectation, covariance function, kernel, white noise, stationary process.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Обґрунтування математичної моделі є одним із основних етапів розробки сучасних інформаційних систем та технологій, побудованих на основі методів опрацювання сигналів. Серед моделей стохастичних сигналів поширеними є лінійні випадкові процеси, методологія використання яких для теоретичних та прикладних задач є добре відомою [1–3]. Узагальненням лінійної моделі є умовні лінійні випадкові процеси (УЛВП), які використовуються для задач математичного моделювання сигналів, представлених у вигляді суми великого числа стохастично *залежних* випадкових імпульсів (на відміну від лінійних моделей, де ці імпульси є незалежними), що виникають у пуассонівські моменти часу [4–6]. Прикладними областями, де є поширеними згадані моделі є, зокрема, математичне, комп'ютерне моделювання та опрацювання електроенцефалографічних сигналів, кардіосигналів, процесів ресурсоспоживання, радіолокаційних сигналів та ін [4, 7–9].

При здійсненні статистичного аналізу випадкових сигналів із використанням цифрових обчислювальних засобів, які входять до складу інформаційних систем, використовується варіант моделі УЛВП з дискретним часом. Розвиток методології математичного моделювання з використанням УЛВП, аналізу їх ймовірнісних властивостей, а також побудова методів їх статистичного аналізу та прогнозування у інформаційних системах є актуальною науково-прикладною проблемою.

Аналіз досліджень та публікацій

УЛВП з неперервним часом вперше було означено у роботі [4] стосовно задачі математичного моделювання радіолокаційних сигналів. Теоретичні та прикладні аспекти моделі УЛВП з неперервним часом розглянуто у роботах [4–10]. Зокрема, в [5] здійснено аналіз в рамках кореляційної теорії, в [6, 10] отримано вирази для характеристичної функції УЛВП, а також розглянуто загальну методологію математичного моделювання стохастичних сигналів на основі умовних лінійних випадкових процесів, включаючи обґрунтування стаціонарності та стохастичної періодичності. Застосування до прикладних задач у технічних та медичних системах наведено, зокрема, у роботах [4, 7–9].

Умовний лінійний випадковий процес з дискретним часом вперше проаналізовано в [4], де він означений у вигляді стохастичної суми зі стаціонарним породжуючим білим шумом. Автор [4] наводить результати щодо умов, за яких для УЛВП з дискретним часом справедливою є центральна гранична теорема.

У низці робіт вивчаються граничні теореми (центральна гранична теорема, закон великих чисел) стосовно випадкових послідовностей, які мають структуру, подібну до УЛВП з дискретним часом: випадково зважені суми випадкових величин [11–13], лінійні процеси з випадковими коефіцієнтами [14] (вивчаються функціональні граничні теореми).

В роботі [15] автори аналізують властивості частинного випадку моделі УЛВП, а саме, стаціонарної послідовності ковзної суми з випадковими коефіцієнтами. Охарактеризовано основні властивості, зокрема, наведено вирази для математичного сподівання та кореляційної функції стаціонарної послідовності.

На основі проведеного аналізу літературних джерел можна зробити висновок про відсутність загального підходу щодо означення поняття УЛВП з дискретним часом, аналізу їх ймовірнісних розподілів, зв'язку із УЛВП із неперервним часом.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є формулювання означення умовного лінійного випадкового процесу з дискретним часом із врахуванням його взаємозв'язку з відповідною моделлю неперервного часу, встановлення умов існування відповідного стохастичного ряду, отримання виразів для математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції моделі у загальному випадку, що дасть можливість встановити умови, за яких досліджуваний процес є стаціонарним у широкому розумінні.

Виклад основного матеріалу

Умовним лінійним випадковим процесом (з неперервним часом) $\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in (-\infty, \infty)$, заданим на деякому ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P}\}$, називається стохастичний інтеграл виду [5, 6, 10]:

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \tau, t) d\eta(\omega, \tau), \tag{1}$$

де $\varphi(\omega, \tau, t), \tau, t \in (-\infty, \infty)$ − дійсна *випадкова* функція (ядро); $\eta(\omega, \tau), \tau \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{P}(\eta(\omega, 0) = 0) = 1$ − дійсний гільбертовий стохастично неперервний породжуючий випадковий процес із незалежними приростами; випадкові функції $\varphi(\omega, \tau, t)$ і $\eta(\omega, \tau)$ є *стохастично незалежними*.

Дійсним умовним лінійним випадковим процесом із дискретним часом $\xi_t(\omega)$, $t \in \mathbf{Z}$, $\omega \in \Omega$ називається випадкова послідовність виду:

$$\xi_t(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t}(\omega) \zeta_\tau(\omega), \tag{2}$$

де $\varphi_{\tau,t}(\omega)$, $t, \tau \in \mathbf{Z}$ – дійсна *випадкова* функція (ядро умовного лінійного випадкового процесу); $\zeta_\tau(\omega)$, $\tau \in \mathbf{Z}$ - гільбертова послідовність дійсних безмежно подільних незалежних випадкових величин (безмежно подільний білий шум з дискретним часом); випадкові функції $\varphi_{\tau,t}(\omega)$ і $\zeta_\tau(\omega)$ є стохастично незалежними за означенням.

Позначимо математичне сподівання та дисперсію білого шуму $\zeta_\tau(\omega)$ наступним чином: $\mathbf{M}\zeta_\tau(\omega) = a_\tau < \infty$, $\mathbf{D}\zeta_\tau(\omega) = \sigma_\tau^2 < \infty$, $\forall\tau$. Змінну ω будемо далі для спрощення позначень опускати.

Якщо в задачах математичного моделювання інформаційних сигналів потрібно показати взаємозв'язок моделей УЛВП з неперервним та дискретним часом, то це можна зробити наступним чином.

Відповідно до побудови стохастичного інтеграла [6], $\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)d\eta(\tau) = \underset{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}}{l.i.m.}\int\limits_a^b \varphi(\tau,t)d\eta(\tau)$,

крім того $\int\limits_a^b \varphi(\tau,t)d\eta(\tau)$ можна зобразити як границю в середньоквадратичному розумінні послідовності інтегральних сум виду:

$$I_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\tilde{\tau}_i, t)\Delta\eta(\tau_i), \tag{3}$$

де $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = b$, $\Delta\eta(\tau_i) = \eta(\tau_i) - \eta(\tau_{i-1}),\ \tilde{\tau}_i \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i\right),\ i = \overline{1,n}$.

Тобто, якщо $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(\tau_i - \tau_{i-1}) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(\tilde{\tau}_i, t)\Delta\eta(\tau_i) = \int\limits_a^b \varphi(\tau,t)d\eta(\tau)$.

Виберемо тепер $\tau_i = i\Delta t,\ \tilde{\tau}_i = \tau_{i-1},\ i = 1, 2, ...,\ t_k = k\Delta t,\ k \in \mathbf{Z}$ (де Δt – крок дискретизації за часом) і позначимо $\varphi(\tau_{i-1}, t_k) = \varphi_{i,k}$, $\Delta\eta(\tau_i) = \zeta_i$ (приріст процесу з незалежними приростами $\eta(\tau)$ на інтервалі $\left[\tau_{i-1}, \tau_i\right)$), тоді (3) запишемо як

$$I_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}\zeta_i .$$

Зрозуміло, що $\zeta_i,\ i = 1, 2, 3, ...$ – *незалежні* випадкові величини (бо вони є приростами процесу з незалежними приростами), а також $\zeta_i,\ i = 1, 2, 3, ...$ - *безмежно подільні* випадкові величини.

Нехай тепер $n \to \infty$, але при цьому $(\tau_i - \tau_{i-1}) = \Delta t,\ i = \overline{1,n}$, але $a \to -\infty,\ b \to \infty$. Якщо при цьому існує границя в середньоквадратичному розумінні послідовності $I_{n,k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{i,k}\zeta_i$, то будемо писати

$$\underset{\substack{n\to\infty \\ a\to-\infty \\ b\to\infty}}{l.i.m.} I_{n,k} = \xi_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_{i,k}\zeta_i,\ k \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

тобто отримаємо випадкову послідовність (2).

Питання близькості розподілів випадкових послідовностей $\xi_k = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_{i,k}\zeta_i$ та $\xi(t_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t_k)d\eta(\tau)$ виходить за межі даної роботи.

Ймовірнісні характеристики УЛВП з дискретним часом можна отримати, використовуючи методи, подібні до тих, що були застосовані для аналізу УЛВП з неперервним часом в роботах [5, 6, 10]. Тому далі наведемо лише основні результати.

Перш за все, зауважимо, що ряд (2) збігається у середньоквадратичному розумінні тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$\mathbf{M}\xi_t^2 = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left(\varphi_{\tau,t}\varphi_{s,t}\right)a_\tau a_s + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left(\varphi_{\tau,t}^2\right)\sigma_\tau^2 < \infty . \tag{5}$$

Якщо $\varphi_{\tau,t}$ – детермінована функція, то ξ_t – лінійний випадковий процес з дискретним часом [1, 2].

Математичне сподівання УЛВП з дискретним часом дорівнює:

$$\mathbf{M}\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\varphi_{\tau,t} a_\tau . \quad (6)$$

Кореляційна функція $R_{t_1,t_2} = \mathbf{M}\left[\left(\xi_{t_1} - \mathbf{M}\xi_{t_1}\right)\left(\xi_{t_2} - \mathbf{M}\xi_{t_2}\right)\right]$, має вигляд:

$$R_{t_1,t_2} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{\tau,t_1}\overset{\circ}{\varphi}_{s,t_2}\right) a_\tau a_s + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left(\varphi_{\tau,t_1}\varphi_{\tau,t_2}\right)\sigma_\tau^2,\ t_1, t_2 \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

де $\overset{\circ}{\varphi}_{\tau,t} = \varphi_{\tau,t} - \mathbf{M}\varphi_{\tau,t}$ – центроване ядро УЛВП з дискретним часом.

З (7) отримаємо вираз для дисперсії УЛВП з дискретним часом:

$$\mathbf{D}\xi_t = R_{t,t} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{\tau,t}\overset{\circ}{\varphi}_{s,t}\right) a_\tau a_s + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\varphi_{\tau,t}^2 \sigma_\tau^2. \quad (8)$$

Позначимо $\phi_{\tau,t} = \mathbf{M}\varphi_{\tau,t}$ – математичне сподівання ядра УЛВП з дискретним часом, а $R^{\varphi}_{\tau,s;t_1,t_2} = \mathbf{M}\left(\overset{\circ}{\varphi}_{\tau,t_1}\overset{\circ}{\varphi}_{s,t_2}\right)$ – кореляційна функція ядра.

Отримані вирази для математичного сподівання та кореляційної функції УЛВП з дискретним часом можна використовувати для обґрунтування ймовірнісних властивостей моделі, які в конкретних прикладних задачах залежать від особливостей ядра і породжуючого білого шуму. Зокрема, нижче встановлено умови, за яких УЛВП з дискретним часом буде стаціонарним у широкому розумінні.

Твердження. Якщо ζ_τ, $\tau \in \mathbf{Z}$ – послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $\mathbf{M}\zeta_\tau = a$ і дисперсією $\mathbf{D}\zeta_\tau = \sigma^2$, а математичне сподівання та кореляційна функція ядра $\varphi_{\tau,t}$ задовольняють умовам

$$\phi_{\tau,t} = \phi_{t-\tau}, \quad R^{\varphi}_{\tau,s;t_1,t_2} = R^{\varphi}_{\tau+t,s+t;t_1+t,t_2+t},\ \forall t \in \mathbf{Z}, \quad (9)$$

то УЛВП (2) є стаціонарною у широкому сенсі випадковою послідовністю, тобто $\mathbf{M}\xi_t = const$ і $R_{t_1,t_2} = R_{t_2-t_1}$.

Дійсно, враховуючи наведене вище можемо написати:

$$\mathbf{M}\xi_t = a\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\phi_{t-\tau} = a\sum_{s=-\infty}^{\infty}\phi_s = const .$$

Враховуючи, що $\mathbf{M}\left(\varphi_{\tau,t_1}\varphi_{\tau,t_2}\right) = R^{\varphi}_{\tau,\tau;t_1,t_2} + \phi_{\tau,t_1}\phi_{\tau,t_2}$, можемо записати:

$$R_{t_1,t_2} = a^2\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} R^{\varphi}_{\tau+t,s+t;t_1+t,t_2+t} + \sigma^2\left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R^{\varphi}_{\tau+t,\tau+t;t_1+t,t_2+t} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\phi_{t_1-\tau}\phi_{t_2-\tau}\right) =$$

$$= a^2\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} R^{\varphi}_{\tau,s;t_2-t_1} + \sigma^2\left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R^{\varphi}_{\tau,\tau;t_2-t_1} + \sum_{s=-\infty}^{\infty}\phi_s\phi_{t_2-t_1+s}\right) = R_{t_2-t_1}.$$

Отже, в умовах даного твердження, математичне сподівання процесу не залежить від часу, а його кореляційна функція залежить лише від різниці своїх аргументів, тому УЛВП є стаціонарним в широкому сенсі.

Висновки

У роботі наведено означення умовного лінійного випадкового процесу з дискретним часом, показано взаємозв’язок із відповідною моделлю з неперервним часом. Обґрунтовано вирази для математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції УЛВП з дискретним часом, що дало можливість охарактеризувати умови, за яких процес буде стаціонарним у широкому сенсі. На основі наведених співвідношень можна також встановити умови, яким повинні задовольняти ядро та породжуючий білий шум зображення УЛВП з дискретним часом для того, щоб процес був періодично корельованим, що є важливим для задач математичного моделювання циклостаціонарних сигналів.

Література

1. Babak V. P. Methods and Models for Information Data Analysis / V. P. Babak, S. V. Babak, A. O. Zaporozhets, M. V. Myslovych, V. M. Zvaritch // Diagnostic Systems For Energy Equipments, volume 281 of Studies in Systems, Decision and Control. – Springer, Cham, 2020. – P. 23–70. – DOI: doi.org/10.1007/978-3-030-44443-3_2

2. Фриз М. Е. Эргодические свойства линейных процессов в задачах математического моделирования и статистического анализа случайных сигналов / М. Е. Фриз, Л. Н. Щербак // Электронное моделирование. — К. : Ин.-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, 2010. — Т. 32. — № 1. — С. 3–14.

3. Фриз М. Є. Властивість перемішування та ергодичність лінійних процесів у задачах математичного моделювання та статистичного аналізу випадкових сигналів / М. Є. Фриз, Л. М. Щербак // Моделювання та інформаційні технології : збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. — К., 2009. — Вип. 51. — С. 53–57.

4. Pierre P. A. Central Limit Theorems for Conditionally Linear Random Processes / P. A. Pierre // SIAM J. of Applied Math. — 1971. — Vol. 20, № 3. — P. 449–461. – DOI: http://doi.org/10.1137/0120048

5. Фриз М. Є. Властивості умовних лінійних процесів та їх застосування в прикладних задачах математичного моделювання стохастичних сигналів / М. Є. Фриз // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 6. – С. 228–238.

6. Fryz M. Characteristic Function of Conditional Linear Random Process / M. Fryz, L. Scherbak, M. Karpinski, B. Mlynko // Proceedings of the 1st International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems. – Ternopil, Ukraine, 2021. – C. 129–135.

7. Фриз М. Є. Статистичний аналіз періодичної авторегресії з випадковими коефіцієнтами в задачах оперативного прогнозування електроспоживання підприємств / М. Є. Фриз, Л. М. Щербак // Технічна електродинаміка. – К. : Інститут електродинаміки Національної академії наук України, 2019. – Вип. 2. – С. 38–47. – DOI: https://doi.org/10.15407/techned2019.02.038

8. Fryz M. Conditional linear random process and random coefficient autoregressive model for EEG analysis / M. Fyz // Proceedings of the 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering. – Kyiv Ukraine, 2017. – P. 305–309. – DOI:10.1109/UKRCON.2017.8100498

9. Iwankiewicz R. Dynamic response of mechanical systems to impulse process stochastic excitations: Markov approach / R. Iwankiewicz // Journal of Physics: Conference Series, 2016.

10. Fryz M., Mlynko B. Properties of Stationarity and Cyclostationarity of Conditional Linear Random Processes / M. Fryz, B. Mlynko // Proceedings of the 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). – Lviv, Slavske, Ukraine, 2020. – P. 166–170. – DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235415

11. Chen P. Strong laws for randomly weighted sums of random variables and applications in the bootstrap and random design regression / P. Chen, T. Zhang, S. H. Sung // Statistica Sinica. – 2019. – Vol. 29, No. 4. – P. 1739–1749. – DOI: 10.5705/ss.202017.0106

12. Vasudeva R. Limit Theorems for randomly weighted sums of random variables / R. Vasudeva // ProbStat Forum. – 2018. – Volume 11. – P. 8–18.

13. Kevei P. The asymptotic distribution of randomly weighted sums and self-normalized sums / P. Kevei, D. Mason // Electron. J. Probab. – 2012. – Vol. 17. – P. 1–21. – DOI: 10.1214/EJP.v17-2092

14. Krizmanić D. Maxima of linear processes with heavy-tailed innovations and random coefficients / D. Krizmanić // J. Time Ser. Anal. – 2022. – Volume 43, Issue2. – P. 238–262.

15. Marek T. On invertibility of a random coefficient moving average model / T. Marek // Kybernetika. – 2005. – Vol. 41, No. 6. – P. 743–756.

References

1. Babak V. P. Methods and Models for Information Data Analysis / V. P. Babak, S. V. Babak, A. O. Zaporozhets, M. V. Myslovych, V. M. Zvaritch // Diagnostic Systems For Energy Equipments, volume 281 of Studies in Systems, Decision and Control. – Springer, Cham, 2020. – P. 23–70. – DOI: doi.org/10.1007/978-3-030-44443-3_2

2. Fryz M. Ergodic properties of linear processes in problems of random signal mathematical modelling and statistical analysis / M. Fryz, L. Scherbak // Electronic Modeling. - 2010. - V. 32. – No.1. – PP. 3 – 14.

3. Fryz M. Mixing property and ergodicity of linear processes in the problems of random signal mathematical modelling and statistical analysis / M. Fryz, L. Scherbak // Modeliuvannia ta informatsiini tekhnolohii : zbirnyk naukovykh prats Instytutu problem modeliuvannia v enerhetytsi im. H. Ye. Pukhova NAN Ukrainy. — K., 2009. — Vol. 51. — PP. 53–57.

4. Pierre P. A. Central Limit Theorems for Conditionally Linear Random Processes / P. A. Pierre // SIAM J. of Applied Math. — 1971. — Vol. 20, № 3. — P. 449–461. – DOI: http://doi.org/10.1137/0120048

5. Fryz M. Properties of conditional linear random processes and their applications in the applied problems of stochastic signal mathematical modelling / M. Fryz // Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: Tekhnichni nauky: zbirnyk naukovykh prats, 2012. - Vol. 6. - P.228–238. doi: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2012-6.228-238

6. Fryz M. Characteristic Function of Conditional Linear Random Process / M. Fryz, L. Scherbak, M. Karpinski, B. Mlynko // Proceedings of the 1st International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems. – Ternopil, Ukraine, 2021. – C. 129–135.

7. Fryz M. Statistical analysis of random coefficient periodic autoregression and its application for short-term electricity consumption forecasting / M. Fryz, L. Scherbak // Tekhnichna elektrodynamika. – K. : Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine, 2019. – Vol. 2. – PP. 38 – 47. doi: https://doi.org/10.15407/techned2019.02.038

8. Fryz M. Conditional linear random process and random coefficient autoregressive model for EEG analysis / M. Fyz // Proceedings of the 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering. – Kyiv Ukraine, 2017. – P. 305–309. – DOI:10.1109/UKRCON.2017.8100498

9. Iwankiewicz R. Dynamic response of mechanical systems to impulse process stochastic excitations: Markov approach / R. Iwankiewicz // Journal of Physics: Conference Series, 2016.

10. Fryz M., Mlynko B. Properties of Stationarity and Cyclostationarity of Conditional Linear Random Processes / M. Fryz, B. Mlynko // Proceedings of the 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). – Lviv, Slavske, Ukraine, 2020. – P. 166–170. – DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235415

11. Chen P. Strong laws for randomly weighted sums of random variables and applications in the bootstrap and random design regression / P. Chen, T. Zhang, S. H. Sung // Statistica Sinica. – 2019. – Vol. 29, No. 4. – P. 1739–1749. – DOI: 10.5705/ss.202017.0106

12. Vasudeva R. Limit Theorems for randomly weighted sums of random variables / R. Vasudeva // ProbStat Forum. – 2018. – Volume 11. – P. 8–18.

13. Kevei P. The asymptotic distribution of randomly weighted sums and self-normalized sums / P. Kevei, D. Mason // Electron. J. Probab. – 2012. – Vol. 17. – P. 1–21. – DOI: 10.1214/EJP.v17-2092

14. Krizmanić D. Maxima of linear processes with heavy-tailed innovations and random coefficients / D. Krizmanić // J. Time Ser. Anal. – 2022. – Volume 43, Issue2. – P. 238–262.

15. Marek T. On invertibility of a random coefficient moving average model / T. Marek // Kybernetika. – 2005. – Vol. 41, No. 6. – P. 743–756.