DOI 10.31891/2307-5732-2022-311-4-42-45
УДК 539.3: 624.13

БАГРІЙ О. В.
https://orcid.org/0000-0003-2267-7162
e-mail: bahriio@khmnu.edu.ua
Хмельницький національний університет

ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЕРЕДОВИЩА З СУТТЄВИМ ПРОЯВОМ ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ

Розглядається обґрунтування ітераційного алгоритму чисельного розв'язання плоскої фізично нелінійної граничної задачі механіки дискретного середовища. Особливістю задачі є урахування впливу на деформування середовища внутрішнього кулонового тертя.
Ключові слова: ітераційний алгоритм, дискретне середовище, внутрішнє тертя.

Olena BAHRII
Khmelnytskyi National University

ITERATIVE ALGORITHMS FOR SOLVING A PLANE PROBLEM FOR AN ENVIRONMENT WITH SIGNIFICANT MANIFESTATION OF INTERNAL FRICTION

The purpose of research is to develop an algorithm for solving of a flat nonlinear problem of mechanics of discrete environment, which laws of deformation of take into account the effect of the internal friction. Described the explanation of the iterative algorithm for the numerical solution of the plane physically nonlinear boundary value problems of mechanics of discrete environment. Feature of the problem is the consideration of the effect of internal Coulomb friction on the deformation of the environment. When solving the problem in displacements for finite simplex elements, the continuity conditions are always satisfied at the nodes and at the faces of the element. Solving the system of canonical linear equations of the displacement method ensures the fulfillment of the equilibrium conditions in each node of the discrete computational domain. Therefore, the calculation procedure is organized in such a way that the obtained solutions also comply with the laws of deformation of the material. Known iterative methods of variable stiffness, initial stresses or initial deformations, which differ only in the method of obtaining solutions, can be used for this purpose. The analysis showed that the most effective method for solving the formulated physically nonlinear problem is the variable stiffness, on the basis of which the iterative algorithm was developed. Described in the article iterative algorithm for solving of a flat boundary value problems of mechanics of a discrete environment allows to take into account the influence on the process of deformation internal friction. It can also be used to solve problems in the mechanics of solid deformable body with a most influence of internal friction, thermo-elasticity problems, etc.
Keywords: iterative algorithm, discrete environment, internal friction.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Сформульована в [1] система рівнянь, що описує крайову задачу плоскої області, заповненої матеріалом з суттєвим внутрішнім тертям, включає фізичні співвідношення зі змінними модулями деформації, величини яких не можуть бути наперед заданими, оскільки вони залежать від досягнутого в кожній точці області напружено-деформованого стану.

Для розв'язання такої фізично нелінійної задачі розроблено спеціальні чисельні ітераційні процедури. Як зазначено у [2], найбільш раціональним з відомих для реалізації таких процедур є метод скінчених елементів. Цей метод з урахуванням принципових особливостей деформування матеріалів у дограничній стадії прийнято за базовий при розробці ітераційних процедур.

Формулювання цілей статті

Метою роботи є розробка алгоритму розв'язання плоскої нелінійної задачі механіки дискретного середовища, закони деформування якого враховують вплив внутрішнього тертя.

Виклад основного матеріалу

Математичне формулювання задачі наведено у [1].

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь [1]:

$[B]^T\{\sigma\}=\{V\}$ – рівняння рівноваги;

$\{\varepsilon\}=[B]\{u\}$ – геометричні співвідношення Коші;

$\{\sigma\}=[D]_{зм}\{\varepsilon\}$ – нелінійні фізичні рівняння з урахуванням силових та кінематичних умов на межі розрахункової області.

Зведення вказаної системи диференціальних рівнянь до одного чи декількох розв'язувальних рівнянь вищого порядку, як це зазвичай робиться при розв'язанні задач аналітичними методами, виявилось мало ефективним. Тому при розробці алгоритмів чисельного розв'язання плоскої фізично нелінійної задачі механіки дискретних матеріалів розроблено ітераційні процедури, аналогічні тим, що використовуються при розв'язанні задач теорії пластичності [3, 4], коли ітерації виконуються в межах кожного скінченого елемента, а не для всієї області, а рішення крайової задачі континуальної плоскої області введенням скінченех елементів зводиться до розв'язання системи канонічних рівнянь методу переміщень будівельної механіки з урахуванням відповідно сформульованих крайових умов.

Для прийнятих симплекс-елементів ітераційні процедури можуть бути реалізовані одним з трьох відомих методів [4]: змінних жорсткостей, початкових напружень та початкових деформацій.

Відомо, що розв’язок задачі буде єдиним, якщо воно задовольняє умовам рівноваги, нерозривності деформацій, прийнятим в моделі законам деформування та відповідає крайовим умовам розрахункової схеми.

Під час розв’язання задачі в переміщеннях [2] з використанням МСЕ для прийнятих симплекс-елементів умови нерозривності завжди виконуються у вузлах і на гранях елемента. Розв’язання системи канонічних лінійних рівнянь методу переміщень, які за своїм змістом є рівняннями рівноваги, забезпечує виконання умов рівноваги у кожному вузлі дискретної розрахункової області. Тому розрахункова процедура організовується таким чином, щоб одержані рішення відповідали також і законам деформування матеріалу. Для цього можуть бути використані відомі ітераційні методи змінних жорсткостей, початкових напружень або початкових деформацій, які відрізняються тільки способом одержання рішень.

При розв’язанні нелінійної задачі методом змінних жорсткостей усі „нелінійності” зводять в матрицю $[D]_{зм}$ змінних деформаційних параметрів, а далі – в матрицю $[k_e]$ жорсткості елемента. Деформаційні параметри $G_{зм}$ і $K_{зм}$, що входять в ці матриці, корегуються для кожного наступного етапу ітерації в залежності від досягнутого на попередньому етапі рівня напружень і деформацій.

Метод початкових напружень відрізняється тим, що значення G і K залишаються постійними протягом всього розрахунку. В якості нев’язок між лінійним та нелінійним рішенням розглядають різницю напружень, яка приймається за початкові напруження для наступного етапу ітерацій.

Метод початкових деформацій аналогічний попередньому, але в якості нев’язок розглядають різниці деформацій.

Проведений аналіз показав, що найбільш ефективним для розв’язання сформульованої фізично нелінійної задачі є метод змінних жорсткостей, на основі якого і розроблено ітераційний алгоритм.

На першому етапі ітераційного алгоритму за цим методом розв’язують лінійну задачу однорідної області. Для усіх скінчених елементів задають одні і ті ж початкові значення модуля зсуву G_1 та модуля об’ємної деформації K_1, які призначають за результатами випробувань зразків матеріалу в умовах плоскої деформації [5]. Формують матриці жорсткості $\left[k_1^e\right]$ кожного елемента, а за правилом „збирання” і глобальну матрицю жорсткості $[K_1]$ системи.

Розв’язують систему канонічних рівнянь методу переміщень з урахуванням крайових умов, в результаті чого визначають вектор вузлових переміщень $\{\delta\}_1$

$$\{\delta\}_1 = [K_1]^{-1}\{R\},$$

де $\{R\}$ – вектор вузлових сил.

За визначеними вузловими переміщеннями знаходять вектори досягнутих на першій ітерації деформацій $\{\varepsilon\}_1$ і напружень $\{\sigma\}_1$ в кожному елементі

$$\{\varepsilon\}_1 = [B]\{\delta\}_1;$$

$$\{\sigma\}_1 = [D]_1[B]\{\delta\}_1.$$

За цими величинами обчислюють інваріанти S_1, P_1, Γ_1 тензорів напружень і деформацій. В просторі інваріантів значенням S_1, P_1, Γ_1 відповідає точка A_1 (рис. 1), а напруження $\{\sigma\}_1$ і деформації $\{\varepsilon\}_1$, що одержані з рішення на першому етапі лінійної задачі, відповідають призначеним величинам модулів G_1 і K_1, але не узгоджуються з нелінійними законами деформування. Визначений з лінійного розв’язку напружено-деформований стан кожного скінченого елемента задовольняє умовам рівноваги і суцільності, але не задовольняє фізичним нелінійним рівнянням, що описують поверхню деформування матеріалу. Тому одержана точка A_1 (рис. 1) в загальному випадку не лежить на поверхні деформування. Досягнутій деформації Γ_1 на цій поверхні відповідає точка a_1. Відрізок A_1a_1 відображає різницю між лінійним і нелінійним розв’язком (нев’язку).

Для зменшення нев’язки проводять наступні ітерації.

На другій ітерації призначають нові значення модулів деформації $G_2 = \dfrac{S_1}{\Gamma_1} = \dfrac{n}{m+\Gamma_1}P_1$; $K_2 = 2G_2\dfrac{1+\nu}{1-\nu}$, свої для кожного елемента, і розв’язують лінійну задачу вже для неоднорідної області, оскільки деформаційні параметри G_2 і K_2 будуть різними для кожного скінченого елемента. Далі формують матриці жорсткості $\left[k_2^e\right]$ елементів, глобальну матрицю жорсткості $[K_2]$ системи, знаходять вузлові переміщення $\{\delta\}_2$, деформації $\{\varepsilon\}_2$ і напруження $\{\sigma\}_2$ в усіх елементах. Підраховують інваріанти S_2, P_2, Γ_2 одержаних на другому етапі тензорів напружень і деформацій, визначають нев’язку між лінійним рішенням і поверхнею деформування. Якщо нев’язка більша наперед заданої малої величини, продовжують ітераційний процес з модулями деформації $G_3 = \frac{S_2}{\Gamma_2} = \frac{n}{m+\Gamma_2} P_2$; $K_3 = 2G_3 \frac{1+\nu}{1-\nu}$.

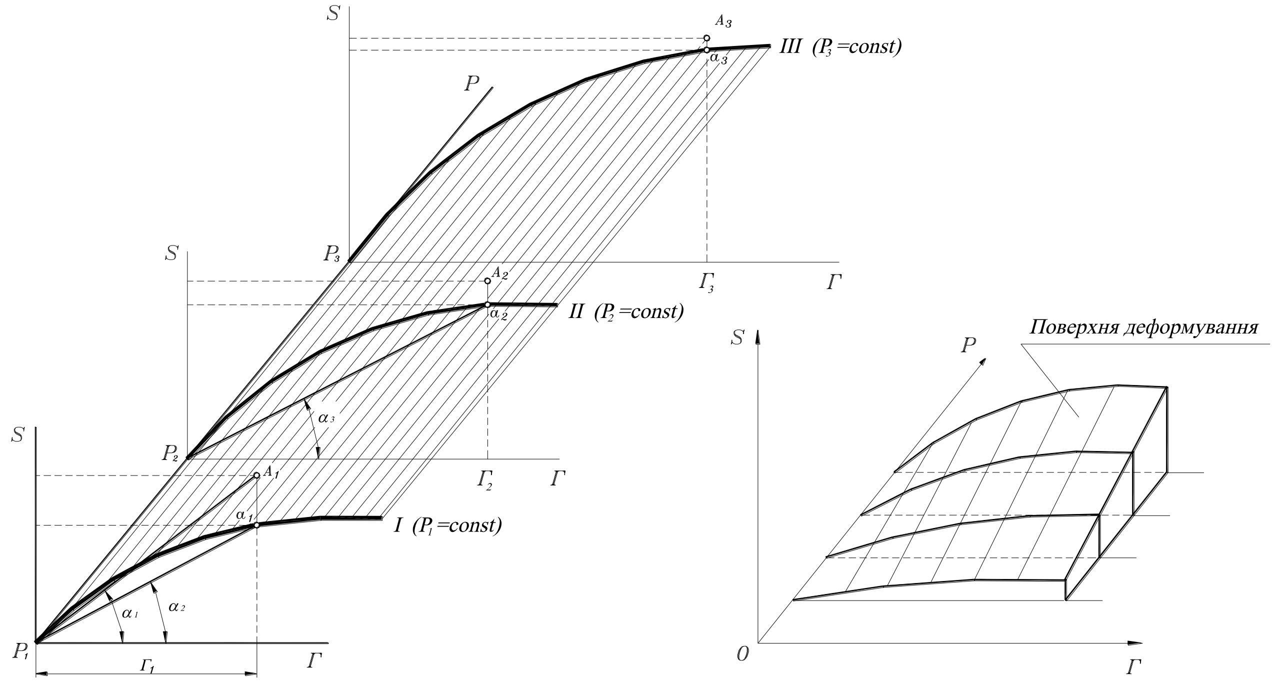

Рис. 1. Графічне представлення ітераційного процесу

Описаний процес наглядно ілюструється побудовами, що показані на рис. 1.

Лінійному рішенню на першому етапі в просторі інваріантів Γ, S, P відповідає точка $A_1(\Gamma_1, S_1, P_1)$ і крива I, що є зрізом поверхні деформування площиною $P_1 = const$, а досягнутому рівню деформацій Γ_1 – точка a_1 на кривій I. Відрізок A_1a_1 розглядається як нев’язка між лінійним і нелінійним рішеннями. Модуль зсуву G_2, що використовується на 2-му етапі ітерації дорівнює тангенсу кута нахилу січної O_1a_1 $(G_2 = tg\alpha_2)$. Відповідно для третього етапу $G_3 = tg\alpha_3$ і т.д. Таким чином, на кожному наступному етапі ітераційного процесу величини модулів деформації призначають за напружено-деформативним станом, досягнутим в елементі на попередньому етапі. Процес закінчується на k-му етапі, коли нев’язка ξ стає меншою прийнятої допустимої величини $[\xi]$

$$\xi = \left| \frac{S_Л^{(k)} - S_T^{(k)}}{S_T^{(k)}} \right| \le [\xi],$$

де $S_Л^{(k)}$ – значення інваріанта тензора напружень, що відповідає досягнутим в лінійному рішенні деформаціям $\Gamma^{(k)}$;

$S_T^{(k)}$ – значення інваріанта тензора напружень, що знаходиться з нелінійного фізичного співвідношення

$$S_T^{(k)} = \frac{n\Gamma^{(k)}}{m+\Gamma^{(k)}} P^{(k)}.$$

Рекурентні залежності, що описують запропонований алгоритм для *k*-го етапу, можна записати таким чином:

$$\left.\begin{aligned} G_{зм}^{(k)} &= \frac{S^{(k-1)}}{\Gamma^{(k-1)}}; \\ K_{зм}^{(k)} &= 2G_{зм}^{(k)} \frac{1+\nu}{1-2\nu}; \end{aligned}\right\} - \text{корегування деформаційних параметрів;}$$

$$\left[D^{(k)}\right]_{зм} = [D]\left(G_{зм}^{(k)}, K_{зм}^{(k)}\right) - \text{формулювання нової матриці деформаційних параметрів;}$$

$\left[k_e^{(k)}\right] = [B]^T \left[D^{(k)}\right]_{зм} [B] A \to \left[K^{(k)}\right]$ – формування матриці жорсткості кожного скінченого елемента;

$\left[K^{(k)}\right] \left\{\delta^{(k)}\right\} = \{R\}$ – формування системи рівнянь методу переміщень;

$\left\{\delta^{(k)}\right\} = \left[K^k\right]^{-1} \{R\}$ – визначення вузлових переміщень лінійних алгебраїчних рівнянь (розв'язання системи лінійних рівнянь методу переміщень);

$\left\{\varepsilon^{(k)}\right\} = \left[B^{(k)}\right] \left\{\delta^{(k)}\right\} \to \Gamma^{(k)}$ – обчислення деформацій;

$\left\{\sigma^{(k)}\right\} = \left[D^{(k)}\right] \left[B^{(k)}\right] \left\{\delta^{(k)}\right\} \to S^{(k)}, P^{(k)}$ – обчислення напружень;

$S_T^{(k)} = \dfrac{n\Gamma^{(k)}}{m + \Gamma^{(k)}} P^{(k)}$ – визначення величини інваріанту, що відповідає поверхні деформування;

$\xi = \left| \dfrac{S^{(k)} - S_T^{(k)}}{S_T^{(k)}} \right| \leftrightarrow [\xi]$ – перевірка розходження.

Відмінність описаної ітераційної процедури від відомих процедур теорії пластичності полягає в тому, що "зближення" відбувається не в одній площині напружень – деформацій $(S - \Gamma)$, а в тривимірному просторі (S, Γ, P). Положення кожної кривої $\left(S^{(k)} - \Gamma^{(k)}\right)$ визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження $P^{(k)}$.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Розроблено ітераційний алгоритм розв'язання плоскої задачі механіки дискретних матеріалів, який відрізняється від алгоритмів теорії пластичності тим, що "зближення" відбувається не в одній площині напружень – деформацій $(S - \Gamma)$, а в тривимірному просторі (S, Γ, P). Положення кожної кривої $\left(S^{(k)} - \Gamma^{(k)}\right)$ визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження $P^{(k)}$. Це дозволяє врахувати вплив стискуючого напруження на деформування та руйнування матеріалу.

Література

8. Ковтун В. В. Визначальні співвідношення механіки дискретного середовища / В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 5. – С. 69–76.

9. Багрій О. В. Алгоритми розв'язання плоскої задачі механіки дискретного середовища чисельним методом / О. В. Багрій, В. В. Ковтун // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2013. – № 5. – С. 36–42.

10. Морозов Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : Наука, 1980. – 255 с.

11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

12. Пат. 11675 Україна, МПК (2006) G 01 N 33/24. Спосіб визначення деформаційних параметрів пористих матеріалів за результатами лабораторних випробувань / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В. ; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2005 03929 ; заявл. 25.04.05 ; опубл. 16.01.06, Бюл. № 1. – 3 с.

References

1. Kovtun V. V. Vyznachalni spivvidnoshennia mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha / V. V. Kovtun // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2008. – № 5. – S. 69–76.

2. Bahrii O. V. Alhorytmy rozviazannia ploskoi zadachi mekhaniky dyskretnoho seredovyshcha chyselnym metodom / O. V. Bahrii, V. V. Kovtun // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Tekhnichni nauky. – 2013. – № 5. – S. 36–42.

3. Morozov E. M. Metod konechnyh elementov v mekhanike razrusheniya / E. M. Morozov, G. P. Nikishkov. – M. : Nauka, 1980. – 255 s.

4. Zenkevich O. Metod konechnyh elementov v tekhnike / Zenkevich O. – M. : Mir, 1975. – 541 s.

5. Pat. 11675 Ukraina, MPK (2006) G 01 N 33/24. Sposib vyznachennia deformatsiinykh parametriv porystykh materialiv za rezultatamy laboratornykh vyprobuvan / zaiavnyky Kovtun V. V., Bahrii O. V. ; vlasnyk Khmeln. nats. un-t. – № u 2005 03929 ; zaiavl. 25.04.05 ; opubl. 16.01.06, Biul. № 1. – 3 s.

Рецензія/Peer review : 12.06.2022 р. Надрукована/Printed :02.08.2022 р.